应用数学和力学，第7卷第9期（1986年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

磁流体力学方程组的解——Dirac-Pauli表象的复变函数理论及其在流体力学中的应用(IV)*

沈 惠 川

（中国科学技术大学，1985年5月24日收到）

摘 要

本文是文[1～3]的继续，在本文中

(1) 我们将等熵可压缩无耗散的磁流体力学方程组化归为理想流体力学方程组的形式；应用文[3]的结果，我们可以得到磁流体力学推广的Chaplygin方程；从而，我们找到了关于这一类问题的通解。

(2) 我们应用Dirac-Pauli表象的复变函数理论，将不可压缩磁流体力学的一般方程组化成关于流函数和"磁流函数"的两个非线性方程，并在有稳定磁场的条件下（即在运动粘性系数或粘流扩散系数等于磁扩散系数的条件下），求得了不可压缩磁流体力学方程组的精确稳定解。

一、前 言

对于磁流体力学(MHD)的研究，始于H.Alfven(1942)，至今只有几十年的历史。关于MHD发展的历史沿革以及它的基本内容，可参阅文[4～7]。

MHD 是介于电动力学和流体力学之间的交叉学科，但就其本质而言，应归于流体力学范畴。它是流体力学问题的拓展。本文的结果，将支持这一论点。

在文[8]中，我们得到电磁连续介质动力学的基本方程为

$$\partial_\nu T_{\mu\nu}=0 \tag{1.1}$$

$$(\mu,\nu=1,2,3,4)$$

$$\partial_\nu \Pi_{\mu\nu}=0 \tag{1.2}$$

式中$T_{\mu\nu}$为对称张量，$\Pi_{\mu\nu}$为反对称张量：

$$T_{\mu\nu}=\rho v_\mu v_\nu-\sigma_{\mu\nu}-\frac{1}{4\pi}\left[H_\mu H_\nu-\frac{1}{2}H^2\delta_{\mu\nu}\right] \tag{1.3}$$

$$\Pi_{\mu\nu}=H_\mu v_\nu-H_\nu v_\mu+\lambda[\partial_\mu H_\nu-\partial_\nu H_\mu] \tag{1.4}$$

对于MHD而言，

---

*钱伟长推荐。

$$\sigma_{\mu\nu}=-p\delta_{\mu\nu}+\zeta\partial_\beta v_\beta\delta_{\mu\nu}+\eta(\partial_\mu v_\nu+\partial_\nu v_\mu) \tag{1.5}$$

因而

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu}=&\rho v_\mu v_\nu+p\delta_{\mu\nu}-\zeta\partial_\beta v_\beta\delta_{\mu\nu}\\&-\eta[\partial_\mu v_\nu+\partial_\nu v_\mu]-\frac{1}{4\pi}\left[H_\mu H_\nu-\frac{1}{2}H^2\delta_{\mu\nu}\right]\\&(\mu,\nu,\beta=1,2,3,4)\end{aligned} \tag{1.6}$$

其中

$$x_4=t,\quad v_4=\frac{dx_4}{dt}=1,\qquad H_4=0,\qquad \delta_{44}=0 \tag{1.7}$$

式中

$$\lambda=\frac{c^2}{4\pi\sigma\mu} \tag{1.8}$$

为磁扩散系数；η,ζ为磁流体的粘性系数；ρ为磁介质的密度；σ为介质的电导率；μ为磁化率；c为光速；H_k为磁场强度的分量；v_k为磁介质的速度分量；$(k=1,2,3)$；$\delta_{ik}\ (i,k=1,2,3)$为Krönecker符号。

由(1.1)式和(1.2)式，我们引入了动力应力函数张量$\phi_{\alpha\beta\rho\sigma}$和$\psi_{\alpha\beta\rho\sigma}\ (\alpha,\beta,\rho,\sigma=1,2,3,4)$并且

$$T_{\mu\nu}=e_{\mu\alpha\beta\gamma}\,e_{\nu\rho\sigma\lambda}\,\partial_\gamma\,\partial_\lambda\,\phi_{\alpha\beta\rho\sigma} \tag{1.9}$$

$$\Pi_{\mu\nu}=e_{\mu\nu\beta\gamma}\,e_{\alpha\rho\sigma\lambda}\,\partial_\gamma\,\partial_\lambda\,\psi_{\alpha\beta\rho\sigma} \tag{1.10}$$

式中$e_{\mu\alpha\beta\gamma}$为四维 Ricci符号（或四维Levi-Civita符号）。

当

$$G_{\mu\nu}=T_{\mu\nu}-2\Pi_{\mu\nu}/7 \tag{1.11}$$

的时候，我们有

$$\partial_\nu G_{\mu\nu}=0 \tag{1.12}$$

由于$\phi_{\alpha\beta\rho\sigma}$和$\psi_{\alpha\beta\rho\sigma}$中的独立分量有21个[9]，因此(1.10)式中的系数 2/7 暗示着至少必须选取$\phi_{\alpha\beta\rho\sigma}$和$\psi_{\alpha\beta\rho\sigma}$中的6个分量$(21\times2/7=6)$，才能定解问题。

由文[8][即由(1.12)式和(1.3)式或(1.6)式]可以看出，电磁连续介质动力学具有与无电磁场作用的连续介质力学相同的形式。换言之，它们满足基本上相同的方程。

但这只是事情的一个方面。本文将证明事情的另一方面，即MHD方程组的解，同样具有与无电磁场作用的流体动力学方程组的解相同的形式。换言之，它们的解也基本上相同。

不仅如此，许多力学的和物理的问题，它们的基本方程都可以从方程(1.12)式导出，而且这些方程的解又都可以从自然界中为数不多的基本方程中得到[10~16]。这些事实再次说明，尽管存在“知识爆炸”的危机，但我们所处的自然界却是相当和谐的。

为了尽可能少地涉及热力学定律，本文将MHD分成等熵可压缩无耗散和不可压缩有耗散两类问题来处理。这两类问题是有关MHD的文献中经常使用的两种模型。由文[3]可知，不可压缩流体中将不出现声速，因此，我们的问题如果与声速关系不大，就应该采用不可压缩模型。

在等熵可压缩无耗散的MHD方程组中，因为磁流体是理想的，因而可以求得通解；而在有耗散的模型中，到目前为止，我们还只能求最精确解。当然，在“精确”的程度上各有不同。

本文中凡重复指标按 Einstein 约定求和.

二、等熵可压缩无耗散的MHD方程组的通解

由一般方程(1.1)式, (1.2)式、(1.4)式、(1.5)式和等熵条件, 可得等熵可压缩无耗散的MHD方程组为(式中$i,k=1,2,3$)

$$\partial_k H_k=0 \tag{2.1}$$

$$\partial_t\rho+\partial_k(\rho v_k)=0 \tag{2.2}$$

$$\partial_t H_i+(v_k\partial_k)H_i=(H_k\partial_k)v_i-H_i(\partial_k v_k) \tag{2.3}$$

$$\partial_t v_i+(v_k\partial_k)v_i=\frac{1}{4\pi\rho}(H_k\partial_k)H_i-\frac{1}{\rho}\partial_i\left(p+\frac{H^2}{8\pi}\right) \tag{2.4}$$

$$\partial_t s+(v_k\partial_k)s=0 \tag{2.5}$$

式中p为磁流体的压强, s为熵. (2.1)式至(2.5)式共九个方程, 含有九个未知函数: p,ρ,s, δ_k和H_k $(k=1,2,3)$.

首先, 由(2.2)式和(2.3)式, 我们有方程

$$[\partial_t+(v_k\partial_k)]\frac{H_i}{\rho}=\left(\frac{H_k}{\rho}\partial_k\right)v_i \tag{2.6}$$

根据磁力线与流线的"冻结"原理, 我们有

$$\frac{H_k}{\rho}\parallel\delta x_k \tag{2.7}$$

或由$\delta x_k\parallel v_k$, 可得

$$\frac{H_k}{\rho}\parallel v_k \tag{2.8}$$

式中 δx_k 为流线长度元 $\delta\mathbf{l}$ 的分量:

$$\delta\mathbf{l}=(\delta x_1,\ \delta x_2,\ \delta x_2) \tag{2.9}$$

选取适当的比例系数, 我们可有

$$H_k/\rho=\delta x_k \tag{2.10}$$

和

$$H_k=\rho v_k \tag{2.11}$$

其次, 我们来研究方程(2.4)式在流线上的首次(能量)积分. 因为由(2.10)式,

$$\frac{1}{4\pi\rho}(H_k\partial_k)H_i=\frac{1}{4\pi}(\delta x_k\partial_k)H_i=\frac{1}{4\pi}\delta H_i \tag{2.12}$$

而在流线上, 计及(2.1)式, 有

$$\delta H_i=(\partial_k H_k)\delta x_i=0 \tag{2.13}$$

所以在流线上(2.4)式成为 Euler 方程[17~20]

$$\partial_t v_i+(v_k\partial_k)v_i=-\frac{1}{\rho}\partial_i p^*\text{(沿流线)} \tag{2.14}$$

其中

$$p^*=p+\frac{H^2}{8\pi} \tag{2.15}$$

由于(2.14)式与理想流体力学的Euler 方程形式相同，因此我们可以利用通常理想流体动力学的全部结果。

由等熵条件(2.5)式，我们有

$$p=p(\rho) \tag{2.16}$$

如果Euler 方程(2.14)式存在首次积分的话，则应有

$$v_k=v_k(\rho) \tag{2.17}$$

此时由(2.11)式，我们得

$$p^*=p(\rho)+\frac{\rho^2}{8\pi}[v(\rho)]^2=p^*(\rho) \tag{2.18}$$

将(2.18)式代入(2.14)式，计及等熵条件(2.5)式，我们可得Euler方程(2.14)式的Cauchy积分

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}v^2+h+\int\frac{H_k dH_k}{4\pi\rho}=f(t)\ \text{（沿流线）} \tag{2.19}$$

式中$H_k=H_k(\rho)$；h为热力学焓，$dh=dp/\rho$；φ为速度势。

根据文[3]的结果，无旋流沿流线的Cauchy积分可用非无旋流沿迹线的广义Bernoulli-Canchy积分来代替：

$$\frac{1}{2}v^2+h+\int\frac{H_k dH_k}{4\pi\rho}=\text{const}\qquad\text{（沿迹线）} \tag{2.20a}$$

或

$$v^2/2+h^*=\text{const}\qquad\text{（沿迹线）} \tag{2.20b}$$

式中

$$h^*=h+\int\frac{H_k dH_k}{4\pi\rho} \tag{2.21}$$

由(2.20)式我们有

$$\rho=\rho(v_k),\quad\text{或}\quad v_k=v_k(\rho) \tag{2.22}$$

这与(2.17)式的假设是一致的。

另外，由(2.18)式，磁流体中的磁声速a^*为

$$a^*=\sqrt{\left(\frac{\partial p^*}{\partial\rho}\right)_s}=\sqrt{a^2+\frac{\rho v^2}{4\pi}}=\sqrt{a^2+\frac{H^2}{4\pi\rho}} \tag{2.23}$$

式中a为当地声速（或局部声速）。

从而，等熵可压缩无耗散的MHD方程组归结为

$$\partial_t\rho+\partial_k(\rho v_k)=0 \tag{2.24a}$$

$$v^2/2+h^*=\text{const}\qquad\text{（沿迹线）} \tag{2.24b}$$

$$h^*=h^*(\rho)\quad\text{或}\quad\rho=\rho(v_k) \tag{2.24c}$$

方程组(2.24)式与等熵理想流体方程组完全相同。

最后，我们利用文[3]中的方法，应用Dirac-Pauli表象的复变函数理论，可以将可压缩无耗散无旋流的MHD方程组化为推广的Chaplygin方程[21,22]

$$\left(1-\frac{u^2}{a^{*2}}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial u_k\partial\bar{u}_k}+\frac{u_k\bar{u}_l}{a^{*2}}\frac{\partial^2\phi}{\partial u_k\partial\bar{u}_l}=0\quad(k,l=1,2) \tag{2.25}$$

式中$\bar{u}_k$为u_k的共轭，

$$u^2=u_k\bar{u}_k \qquad (k=1,2) \tag{2.26}$$

$$\phi=-(\varphi+t)+(z_k\bar{u}_k+\bar{z}_k u_k) \quad (k=1,2) \tag{2.27}$$

$$\left.\begin{aligned} |z\rangle&=\frac{1}{2}\gamma_a|x_a\rangle \\ |u\rangle&=\frac{1}{2}\gamma_a|v_a\rangle \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha=1,2,3,4) \tag{2.28}$$

而γ_a为Dirac矩阵[23,24]，$|\rangle$为Dirac符号，$\bar{z}_k$为z_k 的共轭($k=1,2$)，φ 为无旋流的速度势：

$$\varphi+t=-\phi+\left(u_k\frac{\partial\phi}{\partial u_k}+\bar{u}_k\frac{\partial\phi}{\partial\bar{u}_k}\right) \qquad (k=1,2) \tag{2.29}$$

此外，等熵不可压缩无耗散的MHD方程组是等熵可压缩无耗散的MHD方程组的特例。它们同样可以化为推广的Chaplygin方程

$$\bar{u}_2u_k\frac{\partial^2\Psi}{\partial u_k\partial u_1}-\bar{u}_1u_k\frac{\partial^2\Psi}{\partial u_k\partial u_2}=0 \qquad (k=1,2) \tag{2.30}$$

及其共轭方程。式中函数Ψ为

$$\Psi=-\psi+(u_1z_2+\bar{u}_1\bar{z}_2-u_2z_1-\bar{u}_2\bar{z}_1) \tag{2.31}$$

而ψ为流函数

$$\psi=-\Psi+\left(u_k\frac{\partial\Psi}{\partial u_k}+\bar{u}_k\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{u}_k}\right) \qquad (k=1,2) \tag{2.32}$$

推广的 Chaplygin 方程(2.25)式和(2.30)式是线性方程。它们的通解至多由超几何函数的特殊积分族来表示。

从而，我们有

定理1 等熵可压缩无耗散的磁流体力学方程组，可以利用Dirac-Pauli表象的复变函数理论化为推广的Chaplygin方程。它的通解可以用超几何函数的特殊积分族来表示。

三、不可压缩的MHD方程组的精确稳定解

由一般方程(1.1)式，(1.2)式、(1.4)式和(1.5)式可得不可压缩的MHD方程组为

$$\partial_kH_k=0 \tag{3.1}$$

$$\partial_kv_k=0 \tag{3.2}$$

$$\partial_tH_i+(v_k\partial_k)H_i=(H_k\partial_k)v_i+\lambda(\partial_k\partial_k)H_i \tag{3.3}$$

$$\partial_tv_i+(v_k\partial_k)v_i=\frac{1}{4\pi\rho}(H_k\partial_k)H_i+\nu(\partial_k\partial_k)v_i-\partial_i\left(h+\frac{H^2}{8\pi\rho}\right) \qquad (i,k=1,2,3) \tag{3.4}$$

式中h为热力学焓，$h=p/\rho$；ν为运动粘性系数，$\nu=\eta/\rho$。方程组(3.1) 式至 (3.4) 式共八个方程，其中(3.1)式是附加方程，因此实际上是七个方程；七个方程中含有七个未知函数：p，v_k 和 H_k ($k=1,2,3$)。

令

$$H_k=\sqrt{4\pi\rho}\,H_k' \tag{3.5}$$

则方程组(3.1)式至(3.4)式成为

$$\partial_k H_k'=0 \tag{3.6}$$

$$\partial_k v_k=0 \tag{3.7}$$

$$\partial_t H_i'+(v_k\partial_k)H_i'=(H_k'\partial_k)v_i+\lambda(\partial_k\partial_k)H_i' \tag{3.8}$$

$$\partial_t v_i+(v_k\partial_k)v_i=(H_k'\partial_k)H_i'+\nu(\partial_k\partial_k)v_i-\partial_i\left(h+\frac{1}{2}H'^2\right)$$

$$(i,k=1,2,3) \tag{3.9}$$

依照文[2]，引入Kaluza“鬼”坐标，将方程组(3.6)式至(3.9)式改写为

$$\partial_\beta H_\beta'=0 \tag{3.10}$$

$$\partial_\beta v_\beta=0 \tag{3.11}$$

$$\partial_t H_\alpha'+(v_\beta\partial_\beta)H_\alpha'=(H_\beta'\partial_\beta)v_\alpha+\lambda(\partial_\beta\partial_\beta)H_\alpha' \tag{3.12}$$

$$\partial_t u_\alpha+(v_\beta\partial_\beta)v_\alpha=(H_\beta'\partial_\beta)H_\alpha'+\nu(\partial_\beta\partial_\beta)v_\alpha-\partial_\alpha\left(h+\frac{1}{2}H'^2\right)$$

$$(\alpha,\beta=1,2,3,4) \tag{3.13}$$

式中x_4为Kaluza“鬼”坐标；到最后，我们再令它为某一常数(通常取为0)，而$v_4=dx_4/dt=0$。同时，设$H_4=0$。

应用 Dirac-Pauli 表象的复变函数理论，设

$$\left.\begin{aligned}|z\rangle&=\gamma_\alpha|x_\alpha\rangle/2\\|u\rangle&=\gamma_\alpha|v_\alpha\rangle/2\\|m\rangle&=\gamma_\alpha|H_\alpha'\rangle/2\end{aligned}\right\}\quad(\alpha=1,2,3,4) \tag{3.14}$$

式中γ_α为Dirac矩阵，$|\rangle$为Dirac符号，z的共轭为$\bar z$，u的共轭为$\bar u$，m的共轭为$\bar m$，将(3.14)式代入(3.10)式至(3.13)式，我们得到不可压缩的MHD方程在Dirac-Pauli表象的复变函数理论中的表达式为（式中$i,k=1,2$）

$$\partial_k m_k+\bar\partial_k\bar m_k=0 \tag{3.15}$$

$$\partial_k u_k+\bar\partial_k\bar u_k=0 \tag{3.16}$$

$$\partial_t m_i+(u_k\partial_k+\bar u_k\delta_k)m_i=(m_k\partial_k+\bar m_k\bar\partial_k)u_i+2\lambda(\partial_k\bar\partial_k)m_i \tag{3.17}$$

$$\partial_t u_i+(u_k\partial_k+\bar u_k\bar\partial_k)u_i=(m_k\partial_k+\bar m_k\bar\partial_k)m_i+2\nu(\partial_k\bar\partial_k)u_i-\bar\partial_i(h+m^2) \tag{3.18}$$

及其共轭方程。式中

$$\left.\begin{aligned}&m^2=m_k\bar m_k\qquad(k=1,2)\\&\partial_k=\frac{\partial}{\partial z_k},\qquad\bar\partial_k=\frac{\partial}{\partial\bar z_k}\end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

引入实流函数ψ和实“磁流函数”（即电磁场的“势”）A，设

$$u_1=\frac{\partial\psi}{\partial z_2},\quad u_2=-\frac{\partial\psi}{\partial z_1},\quad m_1=\frac{\partial A}{\partial z_2},\quad m_2=-\frac{\partial A}{\partial z_1} \tag{3.20}$$

则同时应有

$$\bar u_1=\frac{\partial\psi}{\partial\bar z_2},\quad \bar u_2=-\frac{\partial\psi}{\partial\bar z_1},\quad \bar m_1=\frac{\partial A}{\partial\bar z_2},\quad \bar m_2=-\frac{\partial A}{\partial\bar z_1} \tag{3.21}$$

此时(3.15)式和(3.16)式自动满足。将(3.20)式和(3.21)式代入方程(3.17)式和(3.18)式，我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial A}{\partial z_2}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}-\frac{\partial\psi}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}+\frac{\partial\psi}{\partial\bar z_2}\frac{\partial}{\partial\bar z_1}-\frac{\partial\psi}{\partial\bar z_1}\frac{\partial}{\partial\bar z_2}\right)\frac{\partial A}{\partial z_2}$$

$$=\left(\frac{\partial A}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}-\frac{\partial A}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}+\frac{\partial A}{\partial\bar z_2}\frac{\partial}{\partial\bar z_1}-\frac{\partial A}{\partial\bar z_1}\frac{\partial}{\partial\bar z_2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial z_2}+2\lambda\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial\bar z_k}\left(\frac{\partial A}{\partial z_2}\right)\tag{3.22a}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial A}{\partial z_1}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}-\frac{\partial\psi}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}+\frac{\partial\psi}{\partial\bar z_2}\frac{\partial}{\partial\bar z_1}-\frac{\partial\psi}{\partial\bar z_1}\frac{\partial}{\partial\bar z_2}\right)\frac{\partial A}{\partial z_1}$$

$$=-\left(\frac{\partial A}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}-\frac{\partial A}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}+\frac{\partial A}{\partial\bar z_2}\frac{\partial}{\partial\bar z_1}-\frac{\partial A}{\partial\bar z_1}\frac{\partial}{\partial\bar z_2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial z_1}-2\lambda\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial\bar z_k}\left(\frac{\partial A}{\partial z_1}\right)\tag{3.22b}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z_2}\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}-\frac{\partial\psi}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}+\frac{\partial\psi}{\partial\bar z_2}\frac{\partial}{\partial\bar z_1}-\frac{\partial\psi}{\partial\bar z_1}\frac{\partial}{\partial\bar z_2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial z_2}$$

$$=\left(\frac{\partial A}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}-\frac{\partial A}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}+\frac{\partial A}{\partial\bar z_2}\frac{\partial}{\partial\bar z_1}-\frac{\partial A}{\partial\bar z_1}\frac{\partial}{\partial\bar z_2}\right)\frac{\partial A}{\partial z_2}$$

$$+2\nu\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial\bar z_k}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z_2}\right)-\frac{\partial}{\partial\bar z_1}(h+m^2)\tag{3.23a}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z_1}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}-\frac{\partial\psi}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}+\frac{\partial\psi}{\partial\bar z_2}\frac{\partial}{\partial\bar z_1}-\frac{\partial\psi}{\partial\bar z_1}\frac{\partial}{\partial\bar z_2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial z_1}$$

$$=-\left(\frac{\partial A}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}-\frac{\partial A}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}+\frac{\partial A}{\partial\bar z_2}\frac{\partial}{\partial\bar z_1}-\frac{\partial A}{\partial\bar z_1}\frac{\partial}{\partial\bar z_2}\right)\frac{\partial A}{\partial z_1}$$

$$-2\nu\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial\bar z_k}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z_1}\right)-\frac{\partial}{\partial\bar z_2}(h+m^2)\tag{3.23b}$$

将(3.22a)式对 $\bar z_2$ 求偏微分，(3.22b)式对 $\bar z_1$ 求偏微分，然后两式相减；与此同时，将(3.23a)式对$\bar z_2$求偏微分，(3.23b)式对$\bar z_1$求偏微分，然后两式相减．我们得到方程组

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-2\lambda\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial\bar z_k}\right)\frac{\partial^2 A}{\partial z_i\partial\bar z_i}$$

$$=\frac{\partial}{\partial\bar z_k}\left[\frac{\partial\psi}{\partial z_1}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial z_2\partial z_k}\right)-\frac{\partial\psi}{\partial z_2}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial z_1\partial z_k}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial\bar z_k}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\bar z_1}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial\bar z_2\partial z_k}\right)-\frac{\partial\psi}{\partial\bar z_2}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial\bar z_1\partial z_k}\right)\right]$$

$$-\frac{\partial}{\partial\bar z_k}\left[\frac{\partial A}{\partial z_1}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z_2\partial z_k}\right)-\frac{\partial A}{\partial z_2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z_1\partial z_k}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial\bar z_k}\left[\frac{\partial A}{\partial\bar z_1}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar z_2\partial z_k}\right)-\frac{\partial A}{\partial\bar z_2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar z_1\partial z_k}\right)\right]\tag{3.24}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-2\nu\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial\bar z_k}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial z_i\partial\bar z_i}$$

$$=\frac{\partial}{\partial\bar z_k}\left[\frac{\partial\psi}{\partial z_1}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z_2\partial z_k}\right)-\frac{\partial\psi}{\partial z_2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z_1\partial z_k}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial\bar z_k}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\bar z_1}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar z_2\partial z_k}\right)-\frac{\partial\psi}{\partial\bar z_2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial_1\bar z\partial z_k}\right)\right]$$

$$-\frac{\partial}{\partial\bar z_k}\left[\frac{\partial A}{\partial z_1}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial z_2\partial z_k}\right)-\frac{\partial A}{\partial z_2}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial z_1\partial z_k}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial\bar z_k}\left[\frac{\partial A}{\partial\bar z_1}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial\bar z_2\partial z_k}\right)-\frac{\partial A}{\partial\bar z_2}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial\bar z_1\partial z_k}\right)\right]\tag{3.25}$$

在方程组(3.24)式和(3.25)式中，实未知函数ψ和A有两个，但是除时间t之外的复自变量即 z_k 和 $\bar z_k$ $(k=1,2)$的数目却有两对．因此有条件将此两对复自变量组合成一对复自变量，而不失其一般性．重新组合复自变量的唯一原则，是保持方程组(3.24)式和(3.25)式的基本

形式不变。

研究表明，要保持方程组(3.24)式和(3.25)式基本形式不变的这种重新组合是

$$y=z_1+i\bar{z}_2 \tag{3.26}$$

同时有

$$\bar{y}=\bar{z}_1-iz_2 \tag{3.27}$$

对照文[1]中的(1.17)式，可知(3.26)式和(3.27)式不失一般性。

由全微分条件，我们有

$$\frac{\partial y}{\partial z_1}=1, \qquad \frac{\partial y}{\partial \bar{z}_2}=i$$

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{z}_1}=1, \qquad \frac{\partial \bar{y}}{\partial z_2}=-i \tag{3.28}$$

由此可得

$$\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial \bar{z}_k}=2\frac{\partial^2}{\partial y\partial \bar{y}} \qquad (k=1,2) \tag{3.29}$$

将(3.28)式和(3.29)式代入方程组(3.24)式和(3.25)式，我们有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-4\lambda\frac{\partial^2}{\partial y\partial \bar{y}}\right)\frac{\partial^2 A}{\partial y\partial \bar{y}}=2i\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial \bar{y}^2}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \bar{y}^2}\right)$$

$$+2i\left(\frac{\partial\psi}{\partial \bar{y}}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\right)\frac{\partial^2 A}{\partial y\partial \bar{y}}-2i\left(\frac{\partial A}{\partial \bar{y}}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial \bar{y}} \tag{3.30}$$

和

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-4\nu\frac{\partial^2}{\partial y\partial \bar{y}}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial \bar{y}}$$

$$=2i\left(\frac{\partial\psi}{\partial \bar{y}}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial \bar{y}}-2i\left(\frac{\partial A}{\partial \bar{y}}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 A}{\partial y\partial \bar{y}} \tag{3.31}$$

考察一下方程组(3.30)式和(3.31)式，我们发现它们分别是由互相共轭的两组方程相加而成的，这两组方程中的一组为：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-4\lambda\frac{\partial^2}{\partial y\partial \bar{y}}\right)\frac{\partial^2 A}{\partial y\partial \bar{y}}=4i\frac{\partial^2}{\partial y\partial \bar{y}}\left(\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial \bar{y}}\right) \tag{3.32}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-4\nu\frac{\partial^2}{\partial y\partial \bar{y}}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial \bar{y}}=4i\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\psi}{\partial \bar{y}}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial \bar{y}}\right)\right]+4i\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left[\frac{\partial A}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial y\partial \bar{y}}\right)\right] \tag{3.33}$$

其中(3.32)式或可写成

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-4\lambda\frac{\partial^2}{\partial y\partial \bar{y}}\right)A=4i\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial \bar{y}} \tag{3.34}$$

由文[7]可知，当

$$\nu=\lambda=\frac{c^2}{4\pi\sigma\mu} \tag{3.35}$$

时，存在着稳定的磁场。此时若取

$$\psi=A \tag{3.36}$$

则(3.30)式和(3.31)式将可以由一个方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-4\nu\frac{\partial^2}{\partial y\partial \bar{y}}\right)\psi=4i\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial \bar{y}} \tag{3.37}$$

来代替。

方程(3.37)式中实未知函数ψ只有一个，但是除时间t之外的复自变量即y和$\bar{y}$的数目却有两个，因此有条件将此两复自变量组合成一个实自变量，而不失其一般性。重新组合复自变量的唯一原则，依然是保持方程(3.37)式的基本形式不变。

研究表明，要保持方程(3.37)式基本形式不变的这种重新组合是：

$$\xi=y+\bar{y} \tag{3.38}$$

对照文[1]中的(1.17)式，可知(3.38)式不失一般性。

由全微分条件，我们有

$$\frac{\partial\xi}{\partial y}=1,\qquad \frac{\partial\xi}{\partial\bar{y}}=1 \tag{3.39}$$

由此可得

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial\bar{y}}=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \tag{3.40}$$

将(3.39)式和(3.40)式代入方程(3.37)式，我们有方程

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}-4i\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)^2-4\nu\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}=0 \tag{3.41}$$

或 Burgers 方程

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}-8i\phi\frac{\partial\phi}{\partial\xi}-4\nu\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}=0 \tag{3.42}$$

式中

$$\phi=\frac{\partial\psi}{\partial\xi} \tag{3.43}$$

由于Burgers方程(3.42)式可以通过Cole-Hopf变换

$$\phi=-i\nu\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial\xi} \tag{3.44}$$

与扩散方程

$$\frac{\partial w}{\partial t}=4\nu\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} \tag{3.45}$$

相联系，因此Burgers方程(3.42)式是可以精确求解的。

实际上，Cole-Hopf变换(3.44)式也可写成[25~27]

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial\xi}&=\frac{i}{\nu}\phi w\\ \frac{\partial w}{\partial t}&=4\left(i\frac{\partial\phi}{\partial\xi}-\frac{1}{\nu}\phi^2\right)w\end{aligned}\right. \tag{3.46}$$

而(3.46)式则可以认为是Bäcklund变换。

从而，我们又有

定理2　不可压缩磁流体力学方程组的精确稳定解，可以由Burgers方程

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}-8i\phi\frac{\partial\phi}{\partial\xi}-4\nu\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}=0$$

及其共轭方程求得，其中

$$\phi=\frac{\partial\psi}{\partial\xi}$$

$$\xi=y+\bar{y},\ y=z_1+i\bar{z}_2,\ \bar{y}=\bar{z}_1-iz_2,$$

由于Burgers方程的精确解与扩散方程的通解由 Cole-Hopf 变换相联系，因此，不可压缩磁流体力学方程组的精确稳定解，可以由扩散方程

$$\frac{\partial w}{\partial t}=4\nu\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}$$

的通解和Bäcklund变换

$$\frac{\partial w}{\partial\xi}=\frac{i}{\nu}\phi w$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=4\left(i\frac{\partial\phi}{\partial\xi}-\frac{1}{\nu}\phi^2\right)w$$

而最终求得。

定理2所提供的Bäcklund变换暗示着可用逆散射变换来解不可压缩MHD方程组。这样一来，求解不可压缩MHD方程组的精确稳定解的问题，又与量子本征值联系起来。

在证明定理2中所使用的较为简便的方法，可以用来改善文[2]中 Navier-Stokes 方程的精确解。

参考文献

[1] 沈惠川，Dirac-Pauli表象的复变函数理论及其在流体力学中的应用(Ⅰ)，应用数学和力学，7，4 (1986)，365—382.

[2] 沈惠川，Navier-Stokes 方程的精确解，Dirac-Pauli 表象的复变函数理论及其在流体力学中的应用(Ⅱ)，应用数学和力学，7,6 (1986)，517—522.

[3] 沈惠川，三维非定常等熵流中的 Chaplygin 方程，Dirac-Pauli 表象的复变函数理论及其在流体力学中的应用(Ⅲ)，应用数学和力学，7,8 (1986)，703—712.

[4] Lapedes，D. N.，《科学技术百科全书》，3,理论物理学、核物理学、核工程学；5，电学与电磁学，固体物理学、热学、热力学；科学出版社(1981～1983)

[5] Alfven，H. and C-G. Fälthammar.，《宇宙电动力学》，戴世强译，科学出版社 (1974).

[6] Alfven，H.，*On the Origin of the Solar System*，Clarendon press.，Oxford (1954).

[7] Ландау Л. Д. и Е. М. Лифшиц,《连续媒质电动力学》,周奇译，人民教育出版社 (1963).

[8] 沈惠川，动力应力函数张量及弹性静力学的通解，中国科学技术大学学报，14,增刊 1，JCUST 84016 (1984)，95—102.

[9] 沈惠川，动力应力函数张量，应用数学和力学，3,6 (1982)，829—834.

[10] 沈惠川，弹性动力学的通解，应用数学和力学，6,9 (1985)，791—796.

[11] 沈惠川，均匀不可压缩蠕流动力学的通解，自然杂志，7,10 (1984),799; 7，12 (1984),940.

[12] 沈惠川，单色弹性波谱的分裂，应用数学和力学，5,4 (1984)，541—551.

[13] 沈惠川，弹性基上的薄板在侧向动载荷、中面力和外场联合作用下的小挠度弯曲，应用数学和力学，5,6 (1984)，817—827.

[14] 沈惠川，弹性大挠度问题 uon Karman 方程与量子本征值问题 Schrödinger 方程的联系，应用数学和力学，6，8 (1985)，711—725.

[15] 沈惠川，壳体理论中的 Schrödinger 方程，应用数学和力学，6，10 (1685)，887—900.

[16] 沈惠川，理想塑性问题中的一般方程、双调和方程和本征方程,应用数学和力学，7，1 (1986).

[17] Ландау Л. Д. и Е. М. Лифшиц，《连续介质力学》，彭旭麟译，人民教育出版社 (1958).
——，《流体力学》，孔祥言、徐燕侯，庄礼贤译，高等教育出版社 (1983—1984).

[18] 汤川秀樹, «现代物理学の基础» (第一版), 1,古典物理学(Ⅰ), 岩波书店 (1975).
[19] Prandtl, L., K. Oswatitsch and K. Wieghardt, «流体力学概论»,郭永怀, 陆士嘉译, 科学出版社 (1981).
[20] 钱学森, «气体动力学诸方程», (气体动力学基本原理A编), 徐华舫译, 科学出版社 (1966).
[21] Chaplygin, C. A., Über gasstrahlen, Wiss. Ann. Univ, *Moskau. Math. phys.*, 21. (1904) 1—121; or *NACA. TM* 1063.
[22] Oswatitsch, K., «气体动力学», 徐华舫译, 科学出版社 (1965).
[23] Dirac, P. A. M., «量子力学原理», 陈咸亨译, 科学出版社 (1965).
[24] Flügge, S., «实用量子力学», 宋孝同等译, 人民教育出版社 (1981—1983).
[25] 谷内俊弥、西原功修, «非线性波动», 徐福元等译, 原子能出版社 (1981).
[26] Eckhaus, W. and A. van Harten, «逆散射变换和孤立子理论», 黄迅成译, 陈以鸿校, 上海科学技术文献出版社 (1984).
[27] Захаров В. Е., С. В. Манаков., С. П. Новиков и Л. П. Питаевский, «孤子理论», 彭启才译, 侯伯元校, 科学出版社 (1985).

Solutions of Magnetohydrodynamics Equations——The Theory of Functions of a Complex Variable under Dirac-Pauli Representation and Its Application in Fluid Dynamics(Ⅳ)

Shen Hui-chuan

(Department of Earth and Space Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei)

Abstract

This work is the continuation of the discussion of refs, [1～3].

(i) We turn the magnetohydrodynamics equations of isentropic compressible and non-dissipative magneto-flow into the form of the ideal hydrodynamics equations in this paper; we can obtain the general Chaplygin equation from Ref. [3], and the general solution of this equation.

(ii) We apply the theory of functions of a complex variable under Dirac-Pauli representation, turn the general Magnetohydrodynamics equations of incompressible magneto-flow into two nonlinear equations for flow function and"magneto-flow function", and obtain the exact stable solution of incompressible magnetohydrodynamics equations under condition of stable magnetic field (i.e. under condition of equality for kinematical viscid coefficient or viscid diffusion coefficient with magnetic diffusion coefficient).