应用数学和力学，第7卷第9期（1986年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

部分埋入水中椭圆柱体弯曲自由振动

张悉德　张　文

（青岛化工学院，1985年8月3日收到）

摘　要

本文研究了部分埋入水中椭圆柱体弯曲自由振动．首次给出柱水耦联体系振型函数的精确解和以有限阶行列式表示的频率方程．指出水的效应等价于一个附加的分布质量，因此，水中柱体的振动频率低于无水时柱体的振动频率．

一、引　言

水中柱体的振动问题，过去人们均对圆柱体进行研究[1]~[8]，而且都假定水深与柱高相等．作者在[7]、[8]中，对水深和柱高不相等的一般情形，分别给出柱水耦联体系剪切和弯曲振动振型函数的精确解．在本文中，作者进一步研究了部分埋入水中椭圆截面柱体弯曲振动问题。首先解椭圆柱坐标系中拉普拉斯(Laplace)方程的边值问题，给出流体速度场势函数的解析表达式，然后利用拉格朗日-柯西(Lagrange-Cauchy)积分和达朗贝尔 (Dalembert)原理导出柱水耦联体系弯曲自由振动微分积分方程，最后给出椭圆柱体有水振型函数的精确解和以有限阶行列式表示的频率方程．

二、速度场势函数$\phi(\xi,\eta,z,t)$的确定

假定椭圆柱体一端固定，另一端自由(图1)，其高为H，椭圆截面的长半轴为a，短半轴为b，水深为h ($h<H$)．

假定水是理想的不可压缩的不粘流体；运动是无旋的；不计表面波动．

若柱体沿y方向振动，水被扰动，根据假定，流体速度场存在一个势函数$\phi(\xi,\eta,z,t)$，它满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\phi=0 \tag{2.1}$$

其中

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\gamma^2}{2}(\mathrm{ch}2\xi-\cos2\eta)\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

为椭圆柱坐标的拉普拉斯算子，而$\gamma^2=a^2-b^2$．

$\phi(\xi,\eta,z,t)$满足下列边界条件：

---

* 钱伟长推荐．

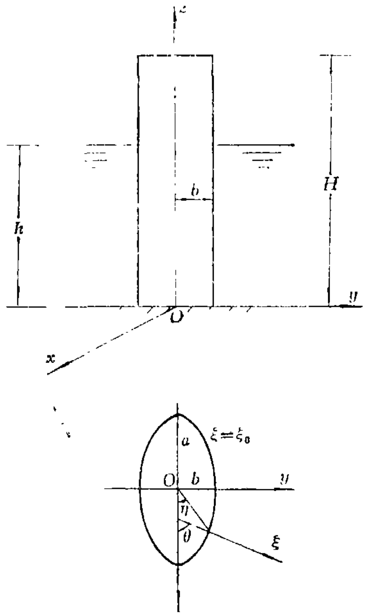

图 1

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=0}=0 \tag{2.2a}$$

$$\phi|_{z=h}=0 \tag{2.2b}$$

$$\phi|_{\xi\to\infty}=0 \tag{2.2c}$$

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_0}=\frac{\partial y}{\partial t}\cdot a\sin\eta \tag{2.2d}$$

其中 $y=y(z,t)=y(z)T(t)$ 为柱体沿 y 方向的位移，$\xi_0=\mathrm{th}^{-1}b/a$为椭圆面坐标。

令

$$\phi(\xi,\eta,z,t)=H(\xi)G(\eta)Z(z)\dot{T}(t) \tag{2.3}$$

其中$\dot{T}(t)=dT/dt$，(2.3) 代入(2.1)，得

$$Z''(z)+\alpha^2Z(z)=0 \tag{2.4}$$

$$H''(\xi)-(\lambda-2q\mathrm{ch}2\xi)H(\xi)=0 \tag{2.5}$$

$$G''(\eta)+(\lambda-2q\cos2\eta)G(\eta)=0 \tag{2.6}$$

其中 $q=-\gamma^2a^2/4$，α 和 λ 为分离变量引进的待定常数。方程 (2.6) 是马休方程 (Mathieu Equation)，方程 (2.5) 是修正的马休方程 (Modified Mathieu Equation)。

由方程(2.4)和边界条件(2.2a)及(2.2b)，得

$$\alpha=\frac{(2s-1)\pi}{2h}\qquad(s=1,2,3,\cdots)$$

$$Z(z)=A\cos\frac{(2s-1)\pi}{2h}z\qquad(s=1,2,3,\cdots) \tag{2.7}$$

方程(2.6)的通解为[9],[10]

$$G(\eta)=B_1\mathrm{ce}_n(\eta,q)+B_2\mathrm{fe}_n(\eta,q) \tag{2.8}$$

或

$$G(\eta)=C_1\mathrm{se}_n(\eta,q)+C_2\mathrm{ge}_n(\eta,q) \tag{2.9}$$

其中 n为整数，B_1、B_2、C_1、C_2 为待定常数，$\mathrm{ce}_n(\eta,q)$和$\mathrm{se}_n(\eta,q)$是第一类n阶马休函数(Mathieu Function)，$\mathrm{fe}_n(\eta,q)$和 $\mathrm{ge}_n(\eta,q)$是马休方程另外两个线性无关解。

方程(2.5)的通解为

$$H(\xi)\bar{B}_1\mathrm{Ce}_n(\xi,q)+\bar{B}_2\mathrm{Fe}_n(\xi,q) \tag{2.10}$$

或

$$H(\xi)=\bar{C}_1\mathrm{Se}_n(\xi,q)+\bar{C}_2\mathrm{Ge}_n(\xi,q) \tag{2.11}$$

其中 $\bar{B}_1,\bar{B}_2,\bar{C}_1,\bar{C}_2$ 是待定常数，$\mathrm{Ce}_n(\xi,q)\equiv\mathrm{ce}_n(i\xi,q)$和 $\mathrm{Se}_n(\xi,q)\equiv i\mathrm{se}_n(i\xi,q)$ 是第一类 n 阶修正马休函数 (Modified Mathieu Function)，$\mathrm{Fe}_n(\xi,q)$和 $\mathrm{Ge}_n(\xi,q)$ 是修正马休方程另外两个线性无关解。

因为解关于 η 是周期的，所以(2.8)和(2.9)中的常数 $B_2=0$，$C_2=0$，$n=1$，于是得到

$$\phi(\xi,\eta,z,t)=\dot{T}(t)\sum_{s=1}^{\infty}\{A_{1s}\mathrm{Ce}_1(\xi,q_s)+B_{1s}\mathrm{Fe}_1(\xi,q_s)\}\mathrm{ce}_1(\eta,q_s)\cos\frac{(2s-1)\pi}{2h}z \tag{2.12}$$

或

$$\phi(\xi,\eta,z,t)=\dot{T}(t)\sum_{s=1}^{\infty}\{\bar{A}_{1s}\mathrm{Se}_1(\xi,q_s)+\bar{B}_{1s}\mathrm{Ge}_1(\xi,q_s)\}\mathrm{se}_1(\eta,q_s)\cos\frac{(2s-1)\pi}{2h}z \tag{2.13}$$

因为水动压力应满足条件

$$p=-\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}\bigg|_{\eta=0}=0$$

所以 $\phi(\xi,\eta,z,t)$应取式(2.13)，考虑到边界条件(2.2c)，(2.13)式成为

$$\phi(\xi,\eta,z,t)=\dot{T}(t)\sum_{s=1}^{\infty}\bar{A}_{1s}\left\{\mathrm{Se}_1(\xi,q_s)-\frac{\mathrm{Se}_1(\infty,q_s)}{\mathrm{Ge}_1(\infty,q_s)}\mathrm{Ge}_1(\xi,q_s)\right\}\mathrm{se}_1(\eta,q_s)\cos\frac{(2s-1)\pi}{2h}z \tag{2.14}$$

利用边界条件(2.2d)，从(2.14)得

$$\phi(\xi,\eta,z,t)=\dot{T}(t)\frac{2a}{h}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Se}_1(\xi,q_s)-\dfrac{\mathrm{Se}_1(\infty,q_s)}{\mathrm{Ge}_1(\infty,q_s)}\mathrm{Ge}_1(\xi,q_s)}{\left\{\mathrm{Se}_1'(\xi_0,q_s)-\dfrac{\mathrm{Se}_1(\infty,q_s)}{\mathrm{Ge}_1(\infty,q_s)}\mathrm{Ge}_1'(\xi_0,q_s)\right\}\left\{\sum\limits_{r=0}^{\infty}(B_{2r+1}^{(1)})^2\right\}}$$

$$\cdot\mathrm{se}_1(\eta,q_s)\cos\frac{(2s-1)\pi}{2h}z\int_0^h Y(z)\cos\frac{(2s-1)\pi}{2h}z\,dz \tag{2.15}$$

其中 $\mathrm{Se}_1'=d\mathrm{Se}_1/d\xi$，$\mathrm{Ge}_1'=d\mathrm{Ge}_1/d\xi$，$B_{2r+1}^{(1)}$ 的意义见文献[9]。

三、椭圆柱体振动方程的建立

利用理想流体无旋运动方程的拉格朗日-柯西积分，由(2.15)式，不难确定沿柱体单位高度上水动压力的合力在 y 轴方向的投影为

$$p|_{\xi=\xi_0}=-\rho\int_0^{2\pi}\frac{\partial\phi}{\partial t}\bigg|_{\xi=\xi_0}\cdot a\sin\eta d\eta$$

$$=-\frac{2\pi a^2\rho}{h}\ddot{T}(t)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Se}_1(\xi_0,q_s)-\dfrac{\mathrm{Se}_1(\infty,q_s)}{\mathrm{Ge}_1(\infty,q_s)}\mathrm{Ge}_1(\xi_0,q_s)}{\left\{\mathrm{Se}_1'(\xi_0,q_s)-\dfrac{\mathrm{Se}_1(\infty,q_s)}{\mathrm{Ge}_1(\infty,q_s)}\mathrm{Ge}_1'(\xi_0,q_s)\right\}\left\{\sum\limits_{r=0}^{\infty}(B_{2r+1}^{(1)})^2\right\}}$$

$$\cdot\cos\frac{(2s-1)\pi}{2h}z\int_0^h Y(z)\cos\frac{(2s-1)\pi}{2h}z\,dz \tag{3.1}$$

其中 ρ 为水的密度，由达朗贝尔原理得 0～h 段柱体弯曲自由振动方程为

$$EJ\frac{\partial^4 y(z,t)}{\partial z^4}+\rho_1F\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial t^2}+p|_{\xi=\xi_0}=0$$

即

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial z^4}+\rho_1F\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$-\frac{2\pi a^2\rho}{h}\ddot{T}(t)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Se}_1(\xi_0,q_s)-\frac{\mathrm{Se}_1(\infty,q_s)}{\mathrm{Ge}_1(\infty,q_s)}\mathrm{Ge}_1(\xi_0,q_s)}{\left\{\mathrm{Se}_1'(\xi_0,q_s)-\frac{\mathrm{Se}_1(\infty,q_s)}{\mathrm{Ge}_1(\infty,q_s)}\mathrm{Ge}_1'(\xi_0,q_s)\right\}\left\{\sum_{r=0}^{\infty}(B_{2r+1}^{(1)})^2\right\}}\cdot$$

$$\cdot\cos\frac{(2s-1)\pi}{2h}z\int_0^h Y(z)\cos\frac{(2s-1)\pi}{2h}zdz=0 \tag{3.2}$$

其中F为柱体截面积，ρ_1为柱体密度。

因为自由振动时，各变量按正弦规律变化，在(3.2)中消去时间变量t，得

$$EJ\frac{d^4Y_1(z)}{dz^4}-\rho_1F\omega^2Y_1(z)$$

$$+\frac{2\pi a^2\rho}{h}\omega^2\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Se}_1(\xi_0,q_s)-\frac{\mathrm{Se}_1(\infty,q_s)}{\mathrm{Ge}_1(\infty,q_s)}\mathrm{Ge}_1(\xi_0,q_s)}{\left\{\mathrm{Se}_1'(\xi_0,q_s)-\frac{\mathrm{Se}_1(\infty,q_s)}{\mathrm{Ge}_1(\infty,q_s)}\mathrm{Ge}_1'(\xi_0,q_s)\right\}\left\{\sum_{r=0}^{\infty}(B_{2r+1}^{(1)})^2\right\}}\cdot$$

$$\cdot\cos\frac{(2s-1)\pi}{2h}z\int_0^h Y_1(z)\cos\frac{(2s-1)\pi}{2h}zdz=0 \tag{3.3}$$

其中$Y_1(z)$为$0\sim h$段柱体振型，ω为相应的振动频率。若令

$$m(z)=-\frac{2\pi a^2\rho}{Y_1(z)h}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Se}_1(\xi_0,q_s)-\frac{\mathrm{Se}_1(\infty,q_s)}{\mathrm{Ge}_1(\infty,q_s)}\mathrm{Ge}_1(\xi_0,q_s)}{\left\{\mathrm{Se}_1'(\xi_0,q_s)-\frac{\mathrm{Se}_1(\infty,q_s)}{\mathrm{Ge}_1(\infty,q_s)}\mathrm{Ge}_1'(\xi_0,q_s)\right\}\left\{\sum_{r=0}^{\infty}(B_{2r+1}^{(1)})^2\right\}}\cdot$$

$$\cdot\cos\frac{(2s-1)\pi}{2h}z\int_0^h Y_1(z)\cos\frac{(2s-1)\pi}{2h}zdz \tag{3.4}$$

则方程(3.3)成为

$$EJ\frac{d^4Y_1(z)}{dz^4}-\omega^2(\rho_1F+m(z))Y_1(z)=0 \tag{3.5}$$

可见水对柱体的影响相当于附加在柱体上分布质量$m(z)$。

$h\sim H$段柱体的振动方程为

$$EJ\frac{d^4Y_2(z)}{dz^4}-\omega^2\rho_1FY_2(z)=0 \tag{3.6}$$

其中$Y_2(z)$为$h\sim H$段柱体的振型，ω同上。

四、振动方程（3.5）和（3.6）的解

方程(3.5)即方程(3.3)是微分积分方程，按文献[8]的方法，把方程(3.5)改写为

$$\frac{d^4Y_1(z)}{dz^4}-k^4Y_1(z)=\sum_{s=1}^{\infty}R_sG_s\cos\frac{(2s-1)\pi}{2h}z \tag{4,1}$$

其中

$$k^4=\frac{\rho_1F\omega^2}{EJ} \tag{4.2}$$

$$R_s=-\frac{2\pi a^2\rho k^4}{\rho_1Fh}\frac{\mathrm{Se}_1(\xi_0,q_s)-\frac{\mathrm{Se}_1(\infty,q_s)}{\mathrm{Ge}_1(\infty,q_s)}\mathrm{Ge}_1(\xi_0,q_s)}{\left\{\mathrm{Se}_1'(\xi_0,q_s)-\frac{\mathrm{Se}_1(\infty,q_s)}{\mathrm{Ge}_1(\infty,q_s)}\mathrm{Ge}_1'(\xi_0,q_s)\right\}\left\{\sum_{r=0}^{\infty}(B_{2r+1}^{(1)})^2\right\}} \tag{4.3}$$

$$G_s=\int_0^h Y_1(z)\cos\frac{(2s-1)\pi}{2h}zdz \tag{4.4}$$

方程(4.1)的通解为[8]

$$Y_1(z)=D_1\cos kz+D_2\sin kz+D_3\mathrm{ch}kz+D_4\mathrm{sh}kz$$
$$+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{E_s}{1-\frac{h}{2}E_s}\left(\sum_{i=1}^{4}D_iI_s^{(i)}\right)\cos\frac{(2s-1)\pi}{2h}z \tag{4.5}$$

其中 $D_i(i=1,2,3,4)$为待定常数，E_s 和$I_s^{(i)}$ $(i=1,2,3,4)$的表达式如下

$$E_s=\frac{R_s}{\left(\frac{(2s-1)\pi}{2h}\right)^4-k^4}$$

$$I_s^{(1)}=\int_0^h\cos\frac{(2s-1)\pi}{2h}z\cos kzdz=\frac{(-1)^{s-1}\frac{(2s-1)\pi}{2h}\cos kh}{\left(\frac{(2s-1)\pi}{2h}\right)^2-k^2}$$

$$I_s^{(2)}=\int_0^h\cos\frac{(2s-1)\pi}{2h}z\sin kzdz=\frac{(-1)^{s-1}\frac{(2s-1)\pi}{2h}\sin kh-k}{\left(\frac{(2s-1)\pi}{2h}\right)^2-k^2}$$

$$I_s^{(3)}=\int_0^h\cos\frac{(2s-1)\pi}{2h}z\mathrm{ch}kzdz=\frac{(-1)^{s-1}\frac{(2s-1)\pi}{2h}\mathrm{ch}kh}{\left(\frac{(2s-1)\pi}{2h}\right)^2+k^2}$$

$$I_s^{(4)}=\int_0^h\cos\frac{(2s-1)\pi}{2h}z\mathrm{sh}kzdz=\frac{(-1)^{s-1}\frac{(2s-1)\pi}{2h}\mathrm{sh}kh-k}{\left(\frac{(2s-1)\pi}{2h}\right)^2+k^2}$$

$$(s=1,2,3,\cdots)$$

方程(3.6)的通解为

$$Y_2(z)=\bar{D}_1\cos kz+\bar{D}_2\sin kz+\bar{D}_3\mathrm{ch}kz+\bar{D}_4\mathrm{sh}kz \tag{4.6}$$

其中 $\bar{D}_i$ $(i=1,2,3,4)$为待定常数。(4.5)和(4.6)中的常数 D_i，$\bar{D}_i$ $(i=1,2,3,4)$由下列边界条件和连续条件确定

$$\left.\begin{aligned}&Y_1(z)|_{z=0}=0,\quad \left.\frac{dY_1(z)}{dz}\right|_{z=0}=0\\&\left.\frac{d^2Y_2(z)}{dz^2}\right|_{z=H}=0,\quad \left.\frac{d^3Y_2(z)}{dz^3}\right|_{z=H}=0\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

$$\left.\begin{aligned}&Y_1(z)|_{z=h}=Y_2(z)|_{z=h}, \qquad \frac{dY_1(z)}{dz}\Big|_{z=h}=\frac{dY_2(z)}{dz}\Big|_{z=h}\\&\frac{d^2Y_1(z)}{dz^2}\Big|_{z=h}=\frac{d^2Y_2(z)}{dz^2}\Big|_{z=h}, \qquad \frac{d^3Y_1(z)}{dz^3}\Big|_{z=h}=\frac{d^3Y_2(z)}{dz^3}\Big|_{z=h}\end{aligned}\right\}\tag{4.8}$$

由条件(4.7)和(4.8)得

$$\left.\begin{aligned}
&D_1\left(1+\sum_{s=1}^{\infty}F_s I_s^{(1)}\right)+D_2\sum_{s=1}^{\infty}F_s I_s^{(2)}+D_3\left(1+\sum_{s=1}^{\infty}F_s I_s^{(3)}\right)+D_4\sum_{s=1}^{\infty}F_s I_s^{(4)}=0\\
&D_2+D_4=0\\
&D_1\cos kh+D_2\sin kh+D_3\operatorname{ch}kh+D_4\operatorname{sh}kh-\bar D_1\cos kh\\
&\qquad -\bar D_2\sin kh-\bar D_3\operatorname{ch}kh-\bar D_4\operatorname{sh}kh=0\\
&-D_1\left(k\sin kh+\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{(2s-1)\pi}{2h}F_s I_s^{(1)}\right)+D_2\left(k\cos kh\right.\\
&\qquad\left.-\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{(2s-1)\pi}{2h}F_s I_s^{(2)}\right)+D_3\left(k\operatorname{sh}kh-\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\right.\\
&\qquad\left.\cdot\frac{(2s-1)\pi}{2h}F_s I_s^{(3)}\right)+D_4\left(k\operatorname{ch}kh-\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{(2s-1)\pi}{2h}F_s I_s^{(4)}\right)\\
&\qquad+\bar D_1 k\sin kh-\bar D_2 k\cos kh-\bar D_3 k\operatorname{sh}kh-\bar D_4 k\operatorname{ch}kh=0\\
&-D_1\cos kh-D_2\sin kh+D_3\operatorname{ch}kh+D_4\operatorname{sh}kh+\bar D_1\cos kh\\
&\qquad+\bar D_2\sin kh-\bar D_3\operatorname{ch}kh-\bar D_4\operatorname{sh}kh=0\\
&D_1\left(k^3\sin kh+\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\left(\frac{(2s-1)\pi}{2h}\right)^3F_s I_s^{(1)}\right)+D_2\left(-k^3\cos kh\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\left(\frac{(2s-1)\pi}{2h}\right)^3F_s I_s^{(2)}\right)+D_3\left(k^3\operatorname{sh}kh+\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\right.\\
&\qquad\left.\cdot\left(\frac{(2s-1)\pi}{2h}\right)^3F_s I_s^{(3)}\right)+D_4\left(k^3\operatorname{ch}kh+\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\left(\frac{(2s-1)\pi}{2h}\right)^3F_s I_s^{(4)}\right)\\
&-\bar D_1 k^3\sin kh+\bar D_2 k^3\cos kh-\bar D_3 k^3\operatorname{sh}kh+\bar D_4 k^3\operatorname{ch}kh=0\\
&-\bar D_1\cos kH-\bar D_2\sin kH+\bar D_3\operatorname{ch}kH+\bar D_4\operatorname{sh}kH=0\\
&\bar D_1\sin kH-\bar D_2\cos kH+\bar D_3\operatorname{sh}kH+\bar D_4\operatorname{ch}kH=0
\end{aligned}\right\}\tag{4.9}$$

其中

$$F_s=\frac{E_s}{1-hE_s/2}$$

在联立方程(4.9)中，因 D_i，$\bar D_i$ $(i=1,2,3,4)$ 不能全为零，故方程组(4.9)的系数行列式等于零，于是得柱水耦联体系频率方程如下

$$
\begin{array}{lll}
\alpha & \beta & 1 \\
\cos kh & \sin kh-\mathrm{sh}kh & \mathrm{ch}kh \\
-(k\sin kh+\sigma^{(1)}) & k(\cos kh-\mathrm{ch}kh)-\sigma^{(2)}+\sigma^{(4)} & k\,\mathrm{sh}kh-\sigma^{(3)} \\
-\cos kh & -\sin kh-\mathrm{sh}kh & \mathrm{ch}kh \\
k^3\mathrm{sh}kh+\Sigma^{(1)} & -k^3(\cos kh+\mathrm{ch}kh)+\Sigma^{(2)}-\Sigma^{(4)} & k^3\mathrm{sh}kh+\Sigma^{(3)} \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{llll}
0 & 0 & 0 & 0 \\
-\cos kh & -\sin kh & -\mathrm{ch}kh & -\mathrm{sh}kh \\
k\sin kh & -k\cos kh & -k\,\mathrm{sh}kh & -k\,\mathrm{ch}kh \\
\cos kh & \sin kh & -\mathrm{ch}kh & -\mathrm{sh}kh \\
-k^3\sin kh & k^3\cos kh & -k^3\mathrm{sh}kh & k^3\mathrm{ch}kh \\
-\cos kH & -\sin kH & \mathrm{ch}kH & \mathrm{sh}kH \\
\sin kH & -\cos kH & \mathrm{sh}kH & \mathrm{ch}kH
\end{array}\right| = 0 \tag{4.10}
$$

其中

$$
\left.\begin{array}{l}
\alpha=\dfrac{1+\sum\limits_{s=1}^{\infty}F_s I_s^{(1)}}{1+\sum\limits_{s=1}^{\infty}F_s I_s^{(3)}}, \quad \beta=\dfrac{\sum\limits_{s=1}^{\infty}F_s(I_s^{(2)}-I_s^{(4)})}{1+\sum\limits_{s=1}^{\infty}F_s I_s^{(3)}} \\[3ex]
\sigma^{(i)}=\sum\limits_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\dfrac{(2s-1)\pi}{2h}F_s I_s^{(i)} \\[3ex]
\Sigma^{(i)}=\sum\limits_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\left(\dfrac{(2s-1)\pi}{2h}\right)^3 F_s I_s^{(i)}
\end{array}\right\} \tag{4.11}
$$

$$(i=1,2,3,4)$$

从频率方程(4.10)求出频率后，代入方程组(4.9)确定常数 D_i 和 $\bar{D}_i$ $(i=1,2,3,4)$，再把确定的常数（实际上是常数比值）代入(4.5)和(4.6)就得到振型函数。

参 考 文 献

[1] Ишков П. К., Определение частот колебаний упругих стержней в жидкости, *Прикладная Математика и Механика*, 3—4, 1 (1937—1938).

[2] Jacobson, L. S., Impulsive hydrodynamics of fluid inside a cylindrical tank and of a fluid surrounding a cylindrical pier, *BSSA*, **39**, 3 (1949).

[3] Housner, G. W., Dynamic pressures on accelerated fluid containers, *BSSA*, **47**, 1 (1957).

[4] 郑哲民、马宗魁，悬臂梁一侧有液体作用时的自由振动，力学学报，**3**，2 (1959).

[5] 樱井彰雄，水中に立られる柱状构造物の振动，土木技术，**16**，6 (1961).

[6] 居荣初等，水中圆柱体结构的自由振动，地震工程研究报告集，第 1 集 (1962).

[7] 项中权、由敬舜、张悉德，圆形给水排水结构物的动力特性和抗地震分析，地震工程研究报告

集, 第 4 集 (1981).
[8] 张悉德, 部分埋入水中悬臂圆柱体的弯曲自由振动, 应用数学和力学, 3, 4 (1982), 537—546
[9] Miller, K. S., *Partial Differential Equations in Engineering Problems*, Prentice-hall, Book Co. INC. (1953).
[10] Mclachan, N. W., *Theory and Application of Mathieu Functions*, Oxford, Clarendon Press (1947).

Free Bending Vibration of Elliptical Column Partially Submerged in Water

Zhang Xi-de Zhang Wen

(Qingdao Chemical Engineering Institute, Qingdao)

Abstract

This paper studies the free bending vibration of elliptical column partially submerged in water. It is the first time that we get an exact solution of the function of normal mode of vibration of column-water couple system and a corresponding frequency equation denoted by limited order determinant. It points out that the effect of water is equivalent to an attached distributive mass. Therefore, the frequency with water is lower than that without water.