

# CSM玻璃钢复合型断裂的有限元分析

张双寅 C. M. 利奇

(中国科学院力学研究所) (英国曼彻斯特大学理工学院机械工程系)  
(钱伟长推荐, 1985年3月15日收到)

## 摘 要

对切短玻璃纤维毡增强聚脂层板的复合型断裂进行了有限元分析, 采用八节点四边形等参元的正规型式计算应力分布与损伤区扩展; 而用坍塌 (collapsed) 三角形四分之一点 (quarter-point) 奇异元计算应力强度因子 $K_I$ 与 $K_{II}$ .

用节点位移约束与释放技术计算了裂纹扩展过程, 对决定应力强度因子 $K_I$ 与 $K_{II}$ 的三种方法进行了对比, 对施加于裂纹顶点节点约束条件的影响进行了评价, 最后基于实验测得的断裂载荷与临界裂纹长度, 估算了材料在这种受力条件下的复合型临界应力强度因子 $K_{Ic}$ 和 $K_{IIc}$ .

## 一、引 言

不少文章发表了研究裂纹问题的有限元方法<sup>[1][2]</sup>. 由四边形等参元蜕化成的坍塌 (collapsed) 三角形四分之一点 (quarter-point) 元素已被公认为是计算断裂韧度的最好的元素之一, 证明是可以算出较好的结果的<sup>[3][4]</sup>.

从裂纹近场位移计算应力强度因子的方法有许多种<sup>[3][5]</sup>. 施加于奇异元素三个重迭节点的约束条件对该元素的应变场奇性有很大影响. 参考文献[6]指出, 三角形四分之一点元素可能具有 $1/\sqrt{r}$ 阶奇性, 也可能具有 $1/r$ 阶奇性; 这依赖于是否对三个重迭节点施加了相同位移条件. 参考文献[7]也给出了不同奇性的证明.

虽然有大量文章研究各向同性材料(如金属)的裂纹问题, 却只有很少文章用有限元方法分析复合材料的裂纹问题. Sin<sup>[8]</sup>研究了复合材料断裂问题; 并指出在某些情况下, 为金属材料建立的断裂力学可以用于研究复合材料问题. Wang 和合作者<sup>[9]</sup>研究了直线型各向异性固体的复合型裂纹问题; 作为例子, 处理了E玻璃纤维增强环氧板材中裂纹从圆孔放射传播问题.

本文对切短玻璃纤维毡增强聚脂层板的层间剪切断裂行为用有限元方法进行了研究. 用二维八节点四边形元素计算了双槽试件的变形和沿剪切面的应力分布. 对裂纹起始点、开裂方向以及初始破坏强度进行了计算.

采用迭代法计算了损伤区(微裂纹)区的扩展. 对三个不同的破坏准则做了比较. 用节点位移约束与释放技术计算了裂纹扩展过程. 并根据裂纹近场位移计算了复合型应力强度因子 $K_I$ 与 $K_{II}$ .

利用计算结果评价了施加于奇异元素三个重迭节点的约束条件对 $K_I$ 与 $K_{II}$ 的影响。基于计算结果和试验测得的断裂载荷和临界裂纹长度估算了材料的复合型断裂韧度 $K_{Ic}$ 与 $K_{IIc}$ 。

## 二、有限元公式

### 1. 二维二次等参元

本文采用二维八节点四边形等参元, 该元素的位移形函数与坐标变换函数是同一个函数。

#### (a) 坐标变换表达式

$$X = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) X_i, \quad Y = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) Y_i \quad (2.1a, b)$$

位移表达式可用下式表示:

$$U = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) U_i, \quad V = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) V_i \quad (2.2a, b)$$

其中形状函数为

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(\xi_0 + \eta_0 - 1), \quad i = 1, 3, 5, 7 \quad (2.3a)$$

$$N_i = \frac{1}{2} (1 - \xi^2)(1 + \eta_0), \quad i = 2, 6 \quad (2.3b)$$

$$N_i = \frac{1}{2} (1 - \eta^2)(1 + \xi_0), \quad i = 4, 8 \quad (2.3c)$$

$$\text{这里} \quad \xi_0 = \xi_i \xi, \quad \eta_0 = \eta_i \eta \quad (2.4a, b)$$

并且  $\xi_i$  与  $\eta_i$  等于 1 或者 -1。

#### (b) 应变位移关系式

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \{\delta\}^e \quad (2.5)$$

上式中  $\{\delta\}^e$  是单元节点位移向量, 就是

$$\{\delta\}^e = [u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_8, v_8]^T \quad (2.6)$$

矩阵  $[B]$  是应变矩阵, 由下式给出:

$$[B_i]^{(e)} = \begin{bmatrix} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \right]^{(e)} & 0 \\ 0 & \left[ \frac{\partial N_i}{\partial y} \right]^{(e)} \\ \left[ \frac{\partial N_i}{\partial y} \right]^{(e)} & \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \right]^{(e)} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

#### (c) 应力应变关系式

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D]\{\epsilon\} \quad (2.8)$$

其中  $[D]$  是本构矩阵, 可由下式表示:

$$[D] = \frac{1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \begin{bmatrix} E_{11} & \nu_{21}E_{11} & 0 \\ \text{对称} & E_{22} & 0 \\ & & G_{12} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

(d) 元素节点力向量为

$$\{F\}^{(\bullet)} = \{F\}^{(\bullet)} + \{F\}^{(\bullet)} + \{F\}^{(\bullet)} \quad (2.10)$$

其中  $\{F\}^{(\bullet)}$  是集中力节点力向量;  $\{F\}^{(\bullet)}$  为体积力向量, 可由下式计算:

$$\{F\}^{(\bullet)} = \int_{\Omega} [N_i]^T \{w\} d\Omega \quad (2.11)$$

而  $\{F\}^{(\bullet)}$  为分布力向量, 可由下式得出:

$$\{F\}^{(\bullet)} = \int_r [N_i]^T \{q\} ds \quad (2.12)$$

(e) 元素刚度矩阵可由虚功原理导出。由虚功原理我们得到:

$$\{F\}^{(\bullet)} = [K]^{(\bullet)} \{\delta\}^{(\bullet)} \quad (2.13)$$

其中  $[K]^{(\bullet)}$  是单元刚度矩阵,

$$[K]^{(\bullet)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| d\xi d\eta \quad (2.14)$$

其中  $|J|$  是雅可比行列式:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \quad (2.15)$$

## 2. 特殊元素的构造

在表达式 (2.1) 与 (2.2) 中, 若元素边上节点恰好位于该边中点, 在这个元素中, 坐标  $r$  (用极坐标系) 不具有  $\sqrt{r}$  项, 那么该元素应变不具有  $1/\sqrt{r}$  的奇异性。但是, 如果将侧边节点移到用下式确定的位置,

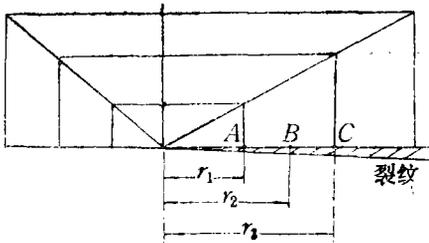


图1 特殊元素

$$r_2 = \frac{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_3})^2}{4} \quad (2.16)$$

于是, 该元素将有  $1/\sqrt{r}$  的奇性, 并可以导出下式:

$$\xi = -\frac{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_3}}{\sqrt{r_3} - \sqrt{r_1}} + \frac{2\sqrt{r}}{\sqrt{r_3} - \sqrt{r_1}} \quad (2.17)$$

其中  $r_1, r_2$  与  $r_3$  分别为裂纹面上三个节点离裂纹顶点的距离 (请看图 1)。当  $r_1=0$  时  $r_2=r_3/4$ , 于是四分之一元素形成。

### 三、应力强度因子的确定

#### 1. 各向同性材料模型

由线弹性断裂力学, 可以得到裂纹附近位移场与应力强度因子之间的关系式:

$$U_r = \frac{K_I}{4G} \left( \frac{r}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} f_{11}(\theta) - \frac{K_{II}}{4G} \left( \frac{r}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} f_{11}(\theta) \quad (3.1a)$$

$$U_\theta = \frac{K_I}{4G} \left( \frac{r}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} f_{12}(\theta) - \frac{K_{II}}{4G} \left( \frac{r}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} f_{12}(\theta) \quad (3.1b)$$

其中

$$f_{11}(\theta) = (2\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \quad (3.2a)$$

$$f_{11}(\theta) = (2\kappa - 1) \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \quad (3.2b)$$

$$f_{12}(\theta) = \sin \frac{3\theta}{2} - (1 + 2\kappa) \sin \frac{\theta}{2} \quad (3.2c)$$

$$f_{12}(\theta) = (2\kappa + 1) \cos \frac{\theta}{2} - 3 \cos \frac{3\theta}{2} \quad (3.2d)$$

这里  $G$  是剪切模量,  $G = E/2(1 + \nu)$ ,

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & (\text{对于平面应变问题}) \\ 3 - \nu & (\text{对于平面应力问题}) \\ 1 + \nu & \end{cases}$$

极坐标系请看图2.

#### 2. 各向异性材料模型

$$U_r = K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} (\mu_1 p_2 \sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta} - \mu_2 p_1 \sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}) \right] \\ + K_{II} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} (p_2 \sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta} - p_1 \sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}) \right] \quad (3.3a)$$

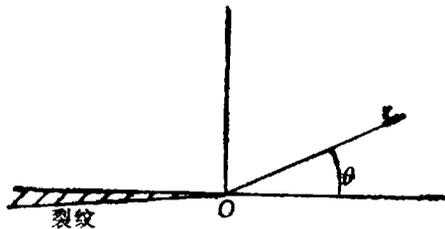


图2 裂纹附近极坐标

$$U_\theta = K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} (\mu_1 q_2 \sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta} - \mu_2 q_1 \sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}) \right] \\ + K_{II} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} (q_2 \sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta} - q_1 \sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}) \right] \quad (3.3b)$$

其中 $\mu_1$ 与 $\mu_2$ 是方程(3.4)的两个不等复根, 它们总是共轭成对出现, 如 $\mu_1, \bar{\mu}_1$ 与 $\mu_2, \bar{\mu}_2$ .

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{10}\mu^3 + (2a_{12} + a_{00})\mu^2 - 2a_{20}\mu + a_{22} = 0 \quad (3.4)$$

$p_i$ 与 $q_i$ 由下式定义:

$$p_i = a_{11}\mu_i^2 + a_{12} - a_{10}\mu_i, \quad q_i = a_{12}\mu_i + \frac{a_{22}}{\mu_i} - a_{20} \quad (3.5a, b)$$

$a_{ij}$ 为柔度系数

$$\epsilon_i = \sum a_{ij}\sigma_j \quad (3.6)$$

### 3. 由裂纹近场位移确定 $K_I$ 与 $K_{II}$

式(3.1)与(3.3)给出了位移 $U_r$ 与 $U_\theta$ 和 $K_I$ 与 $K_{II}$ 之间的关系式. 利用两个裂纹面( $\theta = \pm\pi$ )上的位移计算应力强度因子 $K_I$ 与 $K_{II}$ 是最方便的途径. 对各向同性材料:

$$K_I(\pi) = \sqrt{\frac{2\pi}{r_0}} \cdot \frac{2GU_\theta(r_0, \pi)}{(\kappa+1)} \quad (\theta = \pi) \quad (3.7a)$$

$$K_I(-\pi) = \sqrt{\frac{2\pi}{r_0}} \cdot \frac{2GU_\theta(r_0, -\pi)}{(\kappa+1)} \quad (\theta = -\pi) \quad (3.7b)$$

$$K_I = \frac{K_I(\pi) + K_I(-\pi)}{2} \quad (3.7c)$$

$$K_{II}(\pi) = \sqrt{\frac{2\pi}{r_0}} \cdot \frac{2GU_r(r_0, \pi)}{(\kappa+1)} \quad (\theta = \pi) \quad (3.8a)$$

$$K_{II}(-\pi) = \sqrt{\frac{2\pi}{r_0}} \cdot \frac{2GU_r(r_0, -\pi)}{(\kappa+1)} \quad (\theta = -\pi) \quad (3.8b)$$

$$K_{II} = \frac{K_{II}(\pi) + K_{II}(-\pi)}{2} \quad (3.8c)$$

对于各向异性材料模型, 可以得到与式(3.7)与(3.8)相似的公式. 只是式中的 $(\kappa+1)$ 将依靠于各向异性, 应由式(3.3)到(3.6)求得. 并且对 $K_I$ 与对 $K_{II}$ 有不同的数值.

由式(3.7)与(3.8)看出, 给不同的 $r_0$ 值可以算出不同的 $K_I$ 与 $K_{II}$ . 有如下三种方法确定裂纹顶点 $r_0=0$ 的应力强度因子:

(a) 令 $r_0$ 很小, 约为裂纹长度 $a$ 的1/10. (如取 $r_0=a/9$ [3]), 用式(3.7)与(3.8)计算 $K_I$ 与 $K_{II}$ 值.

(b) 用如下的公式进行计算<sup>[5]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} K_I &= \frac{2G}{\kappa+1} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left\{ \frac{4U_\theta|_B - U_\theta|_C}{\sqrt{L}} \right\} \\ K_{II} &= \frac{2G}{\kappa+1} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left\{ \frac{4U_r|_B - U_r|_C}{\sqrt{L}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.9a, b)$$

其中 $U_\theta|_B, U_\theta|_C, U_r|_B$ 与 $U_r|_C$ 分别为B点与C点的周向位移与径向位移(请看图3).

(c) 外插法

文献[4]利用线性外插法来确定 $K_I$ 与 $K_{II}$ . 选一系列的 $r_i$ , 计算相应的 $(K_I)_i$ 与 $(K_{II})_i$ , 然后用直线外插到 $r_0=0$ 处, 得到 $K_I$ 与 $K_{II}$ 值.

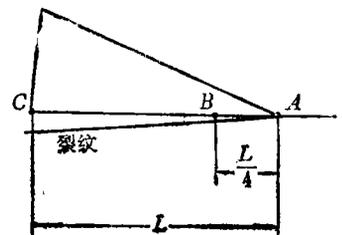


图3 四分之一点元素

### 4. 坍塌三角形四分之一点元素奇异性

坍塌三角形四分之一点奇异元可能是不同的奇性。依赖于是否对坍塌重迭的三个位于裂纹顶点的节点施加了位移相同约束条件。如果对它们施加了如下的约束条件：

$$U_i=U_j=U_k, \quad V_i=V_j=V_k \quad (3.10a, b)$$

$i, j, k$  是三个重迭节点的号码，则这个元素的应变场具有  $1/\sqrt{r}$  阶奇性。这样的元素适合于计算线弹性材料的应力强度因子。然而，如果不施加约束条件(3.10)，让这三个节点自由位移，那么，元素的应变场奇性为  $1/r$  阶；这种情况适合于理想塑性性裂纹问题，因为在裂纹顶点的微小邻域内，应力场是常数分布。

## 四、CSM-GRP层间剪切断裂

切短玻璃纤维毡 (chopped strand mat) 增强聚脂玻璃钢 (CSM-GRP) 层板层间剪切问题，用实验与分析方法进行了研究。实验研究的细节将在另一篇文章中发表。试件形式如图4所示，它可以简化为平面应变问题。

### 1. 试件在开裂前的变形与应力分布

采用有限元网格(I) (见图5) 计算了试件开裂前变形与应力沿剪切面分布。图6是试件变形，图7与图8是应力分布。应力值为单元平均应力值。图7是各向同性材料模型的结果；图8是正交异性模型的曲线。

各向同性材料模型的材料常数为：

$$E=7.0\text{GPa}, \quad \nu=0.34$$

各向异性材料常数为：

$$E_{11}=9.81\text{GPa}, \quad E_{22}=5.20\text{GPa}, \quad \nu_{12}=0.34, \quad G_{12}=1.43\text{GPa}$$

### 2. 微裂纹 (损伤) 区的计算

预测裂纹起始与微裂纹区扩展的计算采用图5所示的有限元网格(I) 进行。每个元素内，可以计算25个点上的应力值，包括9个高斯点和8个节点的应力。在每级载荷下找最大应力点与最大应力值，若该点应力值大于临界值时，则这个点破坏，裂纹产生。采用如下的

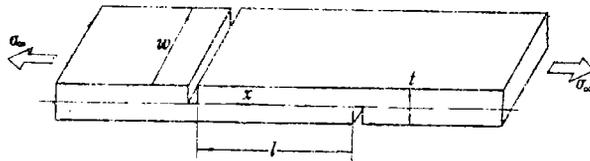


图4 双槽拉剪试件

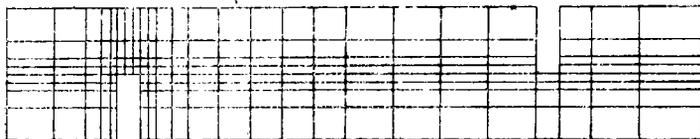


图5 有限元网格(I)

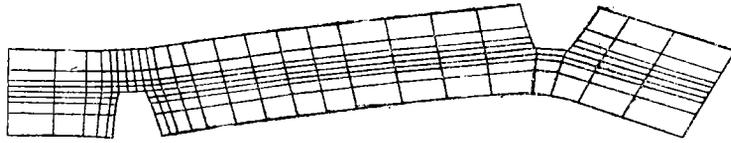


图6 有限元网格(I)变形图

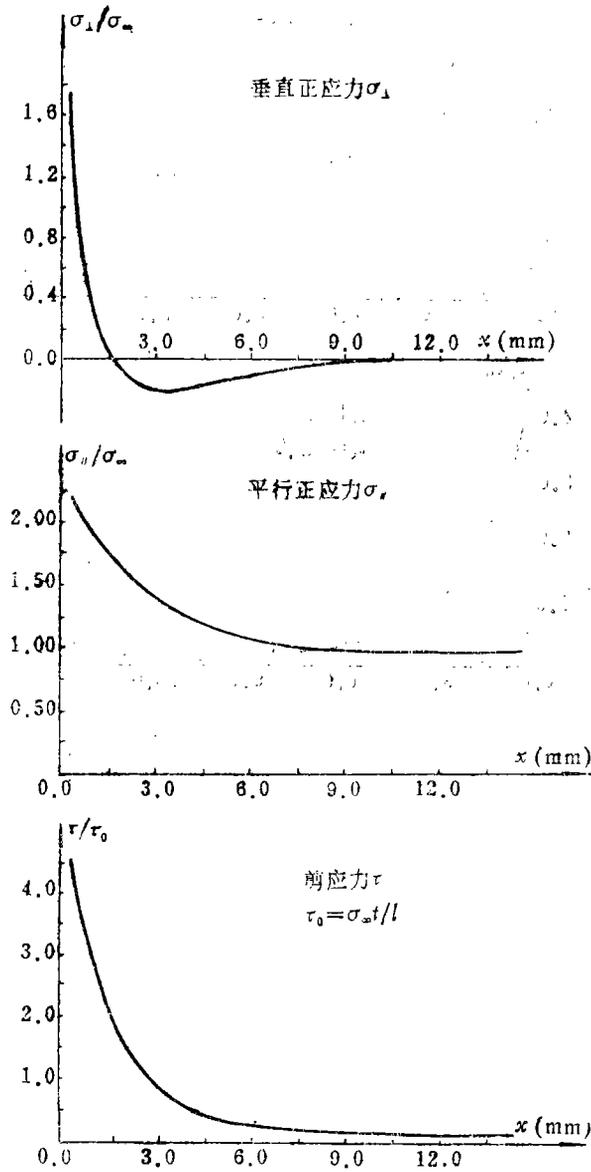


图7 应力沿剪切面分布 (各向同性模型)

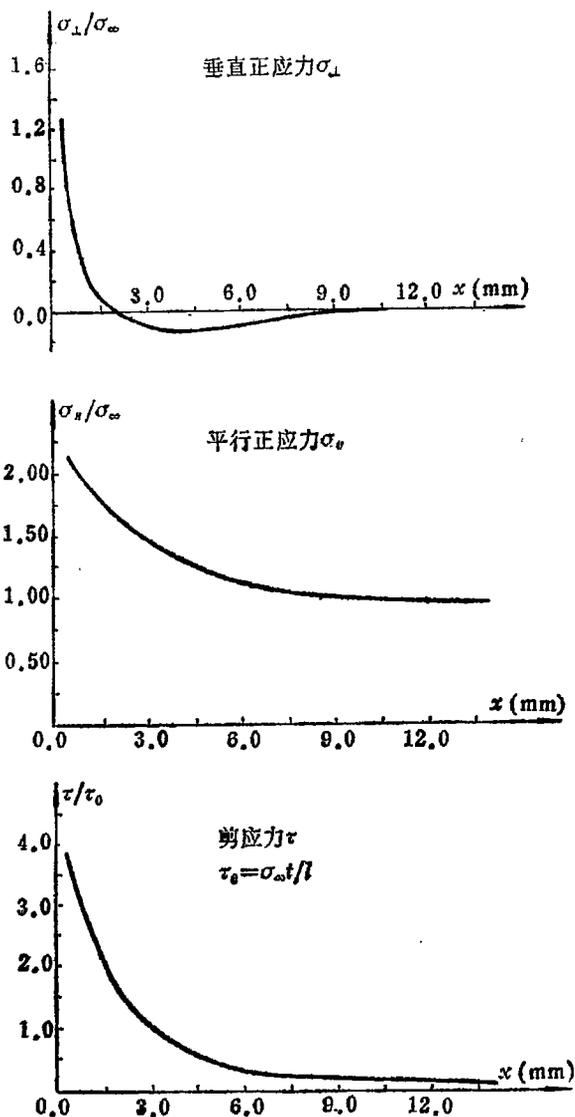


图8 应力沿剪切面分布 (正交异性模型)

破坏判据<sup>[10]</sup>:

(a) 最大应力判据:

$$\sigma_{\parallel} \leq \sigma_{\parallel c}, \quad \sigma_{\perp} \leq \sigma_{\perp c}, \quad \tau \leq \tau_c \quad (4.1a, b, c)$$

(b) Norris畸变能破坏判据:

$$\phi = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\parallel}}{\sigma_{\parallel c}}\right)^2 - \frac{\sigma_{\parallel}\sigma_{\perp}}{\sigma_{\parallel c}\sigma_{\perp c}} + \left(\frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_{\perp c}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_c}\right)^2} \leq 1 \quad (4.2)$$

其中 $\sigma_{\parallel}$ ,  $\sigma_{\perp}$ 与 $\tau$ 分别为平行正应力, 垂直正应力和剪应力;  $\sigma_{\parallel c}$ ,  $\sigma_{\perp c}$ 与 $\tau_c$ 是它们的临界值. 从有限的实验数据, 我们假定:

$$\sigma_{\parallel c} = 120 \text{MPa}, \quad \sigma_{\perp c} = 9.0 \text{MPa}, \quad \tau_c = 9.5 \text{MPa} \quad (4.3)$$

运用如下步骤, 计算了损伤区的扩展:

(a) 对每一载荷增量计算应力分布. 寻找最大应力值 (或应力因数 $\phi$ ) 与最大应力点;

(b) 用破坏判据(4.1)或(4.2)判断是否破坏;

(c) 如果该点破坏, 修改该点的本构矩阵[D]的系数, 例如

如果  $\tau \geq \tau_c$ , 令  $G_{12} = 0$  (4.4a)

如果  $\sigma_{\perp} \geq \sigma_{\perp c}$ , 令  $E_{22} = \nu_{21} = 0$  (4.4b)

如果  $\sigma_{\parallel} \geq \sigma_{\parallel c}$ , 令  $E_{11} = \nu_{12} = 0$  (4.4c)

如果  $\phi \geq 1$ , 则令  $E_{11} = E_{22} = G_{12} = 0$  (4.4d)

(d) 重算单元刚度矩阵, 再计算应力分布. 如此循环迭代.

不同破坏判据预测了相同的裂纹起始点, 就是双槽底部的内侧角点; 但是不同破坏判据预测了不同的初始破坏强度. 请看表 1 结果.

表 1 初始破坏强度

破坏判据	$\sigma_{\parallel} \leq \sigma_{\parallel c}$	$\sigma_{\perp} \leq \sigma_{\perp c}$	$\tau \leq \tau_c$	$\phi \leq 1$
初始强度	20.2MPa	2.45MPa	3.64MPa	2.1MPa

由表 1 可见, 畸变能判据  $\phi \leq 1$  预测了最早的破坏. 最大平行正应力判据  $\sigma_{\parallel} \leq \sigma_{\parallel c}$  预测了最大的强度. 这说明不可能由  $\sigma_{\parallel}$  引起材料破坏.

初始开裂方向可以由寻找下一个最大应力(或应力因数  $\phi$ ) 点的办法确定. 三个破坏判据  $\phi \leq 1$ ,  $\sigma_{\perp} \leq \sigma_{\perp c}$  与  $\tau \leq \tau_c$  预测了相同的开裂方向, 沿试件剪切面方向开裂. 因为这里的计算, 材料在破坏点并没有完全分离, 而仍然连在一起, 所以可以称它为微裂纹(或损伤)区. 用最大剪应力判据  $\tau \leq \tau_c$  计算的损伤区绘于图 9, 图中的号码表示破坏顺序. 损伤区产生后应力重新分布, 用  $\phi \leq 1$  判据计算的应力分布绘于图 10. 由其他二判据计算的应力分布曲线也有类似的特点. 相应的应力值在损伤区内减小很多.

### 3. 复合型应力强度因子

采用有限元网格(II)计算了裂纹扩展过程和应力强度因子. 在裂纹附近有 24 个特殊元素, 这些元素侧边节点是按公式(2.16)定位的. 八个四分之一点三角形奇异元布置在裂纹顶点周围. 沿剪切面有一理想裂纹, 裂纹面上的节点都是多位移节点(请看图 11).

应用节点位移约束与释放技术计算并绘出了裂纹扩展过程, 图 12a 到图 12e 是裂纹开裂过程的五个阶段.

用图 12e 表示的位移场计算了各向同性材料模型与正交异性材料模型的应力强度因子  $K_I$  与  $K_{II}$ . 图 13 表示利用外插法确定应力强度因子的图线.

对施加约束条件(3.10)与不施加这一条件两种情况进行了对比计算. 表 2 列出了这两种情况下正交异性材料, 用三种不同方法确定的  $K_I$  与  $K_{II}$  结果.

由表 2 看出, 由公式(3.9)计算的  $K_{II}$  值, 有约束

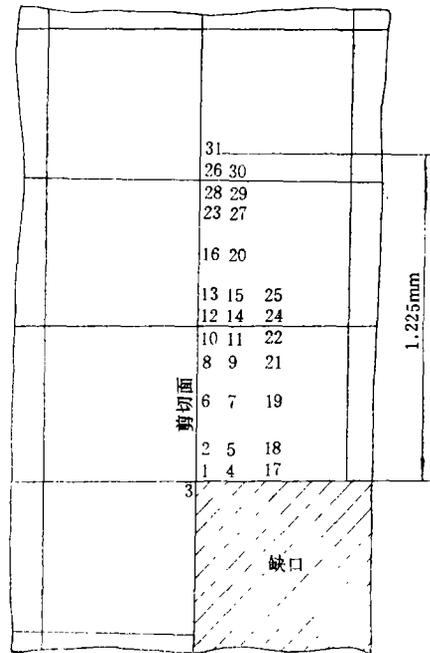


图 9 用  $\tau \leq \tau_c$  准则计算的损伤区 ( $\sigma_{\parallel c} = 4.97\text{MPa}$ )

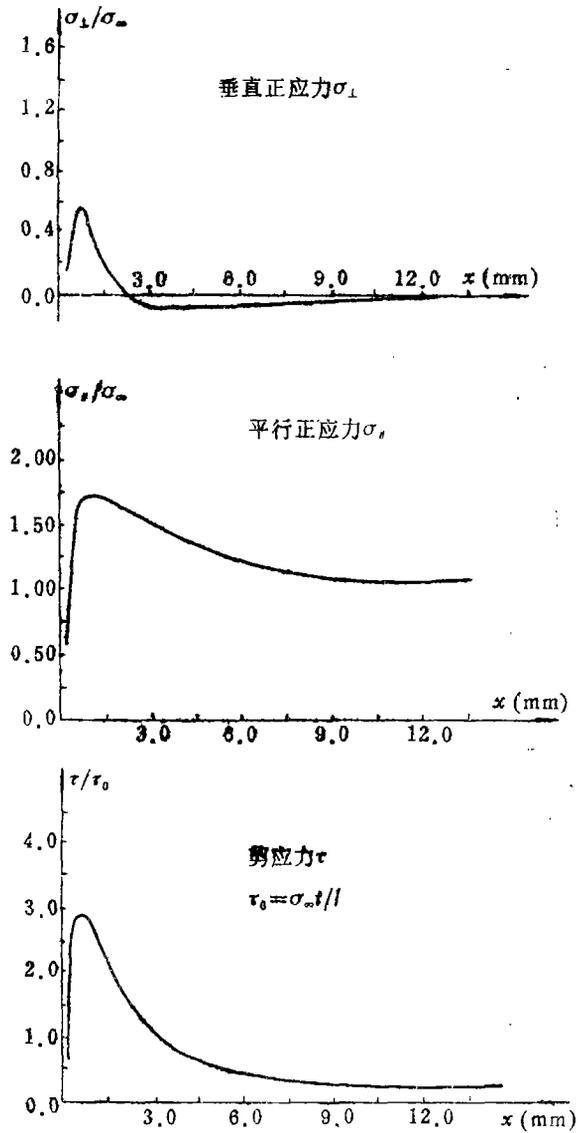
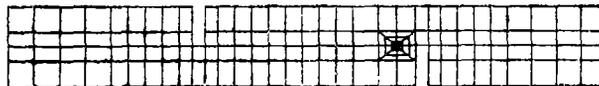
图10 有损伤区后的应力分布( $\phi \leq 1$  准则)

图11 有限元网格(II)

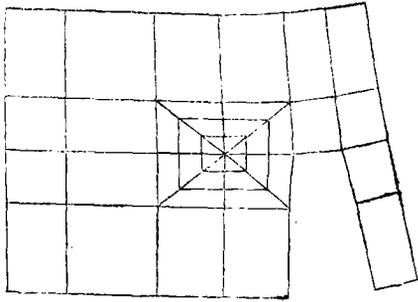


图 12a

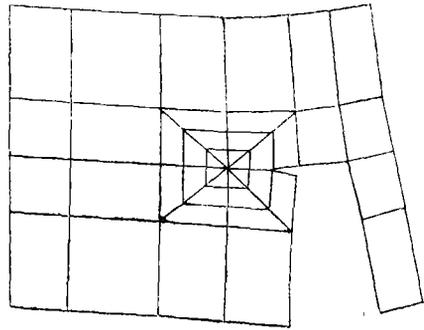


图 12b

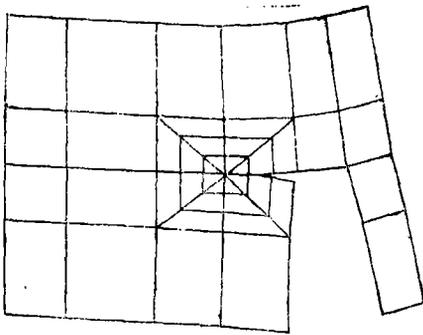


图 12c

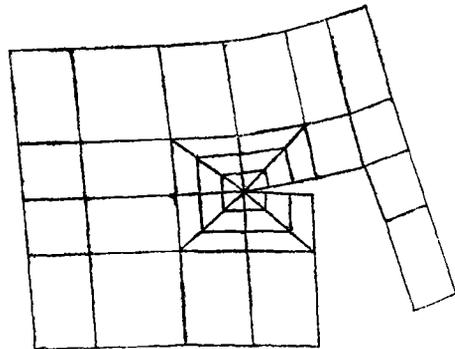


图 12d

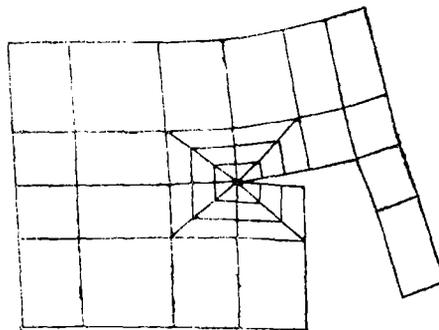


图 12e

表 2

应力强度因子 $K_I$ 与 $K_{II}$ 的计算结果

计算方法	对三个重迭节点的约束	应力强度因子	
		$K_I/(\sigma_\infty \sqrt{a})$	$K_{II}/(\sigma_\infty \sqrt{a})$
用 $r_0=a/9$ 点处的位移值	施加约束	1.782	2.371
	不施加约束	1.779	2.461
公式(3.9)	施加约束	1.383	2.285
	不施加约束	1.386	2.488
外插法	施加约束	1.56	2.00

与无约束两种情况的差别最大为 8.2%，这是不可忽略。关于确定  $K_I$  与  $K_{II}$  的三个方法的比较，外插法的结果与公式 (3.9) 的结果差别最大。公式 (3.9) 是由特殊元素的构造公式导出来的。能够算出较精确的结果；而外插法具有一定人为随意性，误差不可避免。至于用  $r_0 = a/9$  的位移值确定  $K_I$  与  $K_{II}$ ，其误差产生的原因是很明显的。

最后，对材料的临界应力强度因子  $K_{Ic}$  与  $K_{IIc}$  通过  $K_I$  与  $K_{II}$  的计算值，并考虑到试验测得的断裂载荷与相应的临界裂纹长度进行了估算。根据实验数据，断裂载荷  $\sigma_\infty = 20\text{MPa}$ ，临界裂纹长度  $a_c = 6.5 \sim 7\text{mm}$ 。得到了该材料在这种受力状态下复合型临界应力强度因子  $K_{Ic}$  与  $K_{IIc}$  的估计值。结果列于表 3。数值与文献[8]的可比。

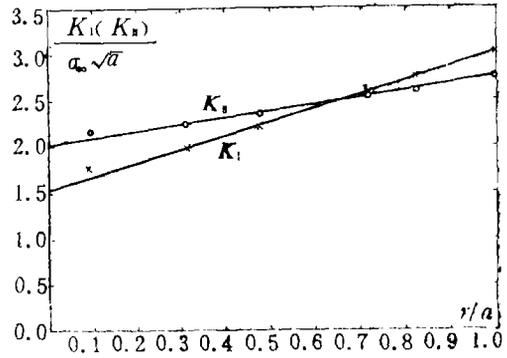


图13 确定  $K_I$  与  $K_{II}$  的外插法

表 3 临界应力强度因子

应力强度因子		各向同性材料模型	正交异性材料模型
应力强度因子	$K_I / (\sigma_\infty \sqrt{a})$	1.27	1.383
	$K_{II} / (\sigma_\infty \sqrt{a})$	2.80	2.285
临界应力强度因子	$K_{Ic}$	$66.4\text{N/mm}^{3/2}$	$72.3\text{N/mm}^{3/2}$
	$K_{IIc}$	$146.3\text{N/mm}^{3/2}$	$119.4\text{N/mm}^{3/2}$

注  $K_I$  与  $K_{II}$  是由公式(3.9)计算的，请看表2。

### 五、结 论

1. 用有限元方法分析了 CSM 玻璃钢复合型断裂问题，假设了各向同性与正交异性两种材料模型。二者均为均质材料模型，忽略其非均匀性影响。
2. 应力沿剪切面分布曲线在缺口根部有很大的应力集中，这解释了为什么双槽试件所测的层间剪切强度依赖于剪切面长度的原因。
3. 用节点位移约束与释放技术计算了裂纹扩展过程，这个技术可用于动态裂纹扩展。
4. 对三种由裂纹近场位移确定应力强度因子  $K_I$  和  $K_{II}$  的方法进行了比较。如果网格分割不是足够精细的话，三者之间的偏差不可忽略。对裂纹顶端三角形奇异元的三个重迭节点施加位移相同约束条件与否，对计算结果的影响不可忽略。求线弹性应力强度因子的最好方法，是使用公式(3.9)计算，并基于施加约束条件(3.10)所计算得到的位移场。

## 参 考 文 献

- [1] Tracy, D. M., Finite elements for determination of crack tip elastic stress intensity factors, *Eng. Frac. Mech.*, 3 (1971), 255—265.
- [2] Henshell, R.D. and K.G. Shaw, Crack tip finite elements are unnecessary, *IJNME*, 9, 3 (1975), 495—507.
- [3] Pu, S. L., M. A. Hussain and W. E. Lorensen, The collapsed cubic isoparametric element as a singular element for crack problems, *IJNME*, 12, 11 (1978), 1727—1742.
- [4] Wang Ke-jeu, Hsu Chi-lin and Kao Hua, Calculation of stress intensity factors for combined mode bend specimens, *Advances in Research on Strength and Fracture of Materials*, 4 (1978), 123.
- [5] Shih, C. F., H. G. De Lorenzi and M. D. German, Crack extension modelling with singular quadratic isoparametric elements, *Int. J. of Fracture*, 12 (1976), 647—651.
- [6] Barsoum, R. S., Triangular quarter-point elements as elastic and perfectly-plastic crack tip elements, *IJNME*, 11 (1977), 85—98.
- [7] Yamada, Y., Y. Ezawa and I. Nishiguchi, Reconsiderations on singularity of crack tip elements, *IJNME*, 14, 10 (1979), 1525—1544.
- [8] Sih, G. C., Fracture mechanics of composite materials, *Proceedings of First USA-USSR Symposium on Fracture of Composite Materials*, Editors G. C. Sih and V. P. Tamuzs, held in Riga, USSR, 4—7, Sep. (1978), 111—130.
- [9] Wang, S. S., J. F. Yau and H. T. Corten, A mixed-mode crack analysis of rectilinear anisotropic solids using conservation laws of elasticity, *Inter. J. Fracture*, 16, 3, June (1980), 247—259.
- [10] Owen, M. J., Biaxial failure of GRP—mechanisms, modes and theories, composite structures 2, *Proceedings of the 2nd International Conferences on Composite Structures*, held at Paisley College of Technology, Scotland, 14—16, Sep. (1983), Applied Science Publishers (1983), 21—39.

## FEM Analysis on Mixed-Mode Fracture of CSM-GRP

Zhang Shuang-yin

*(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing)*

C. M. Leech

*(Dept. of Mech. Eng., UMIST, U. K.)*

### Abstract

An FEM analysis for studying mixed-mode fracture problem of chopped strand mat glass fibre reinforced polyester laminate was presented. The analysis was formulated on the basis of 8-node quadrilateral isoparametric element. The collapsed triangular quarter-point singular elements were used for calculating stress intensity factors  $K_I$  and  $K_{II}$ .

The crack propagation process was computed by implementing constraint release technique. Three different approaches to the solution of stress intensity factors  $K_I$  and  $K_{II}$  were compared. The effect of constraint condition imposed upon the displacement of the three collapsed nodes of the crack tip elements on the  $K_I$  and  $K_{II}$  results was evaluated. The mixed-mode critical stress intensity factors  $K_{Ic}$  and  $K_{IIc}$  were estimated for CSM-GRP through the consideration of  $K_I$  and  $K_{II}$  calculated and the measured failure load and critical crack length in the experiment.