应用数学和力学，第7卷第8期（1986年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

三维非定常等熵流中的Chaplygin方程——Dirac-Pauli表象的复变函数理论及其在流体力学中的应用（Ⅲ）*

沈 惠 川

（中国科学技术大学，1985年5月1日收到）

摘 要

本文是文[1]的继续．在本文中，我们将等熵气体动力学方程组分成两类问题来处理：其一为三维非定常无旋流（因而也是等熵流），其二为三维非定常等熵无散流（即不可压缩等熵流）．我们应用Dirac-Pauli表象的复变函数理论并采用Legendre变换，将此两类问题的方程组变换到速度空间，从而得到了两种推广的Chaplygin方程．推广的Chaplygin方程是一个线性偏微分方程，它的通解至多由超几何函数表示．由此，我们求得了气体动力学三维非定常等熵流的一般问题的通解．

一、前 言

等熵气体动力学问题是流体力学中的第二中心．在文[1]中，我们应用Dirac-Pauli表象的复变函数理论，将等熵气体动力学方程组化成只有一个复未知函数的非线性方程．文[1]中的声速曾假定其为常数．在一般情况下，声速c是作为当地声速或局部声速而出现的．它沿流线而变化，因而是流体速度的函数．本文将一般地考虑气体动力学的三维非定常等熵流问题，即声速c不是常数的等熵流问题．

速度矢量可以分解为无旋场和无散场[2]，因而我们将气体动力学的三维非定常等熵流问题分解成无旋流和不可压缩流两类问题来处理．由文[3]可知，无旋流必定是等熵流，而等熵流未必是无旋流．所以在第一类问题中可以省去等熵条件，而在第二类问题中则不能省去．

由于真实流体不可能是不可压缩的，因此无旋流尽管是很特殊的流动，但却具有很大的实用重要性．难怪文[4]要将这类问题称为“可压缩气体的一般问题”．处理无旋流问题有多种方法．其中最原始的方法是引进速度势φ，将它代入无旋流的方程组，我们得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_k}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi=\frac{2}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\partial t}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_k}\tag{1.1}$$

*钱伟长推荐．

$$(i,k=1,2,3)$$

式中c为当地声速。方程（1.1）式是一个非线性方程。要想一般地得到其通解，是相当困难的。

处理无旋流的第二种相当著名的方法，是应用经典力学与量子力学的相似性[5]。如果设流体密度$\rho=R^2$，速度势为φ，并令波函数ψ为

$$\psi=R\exp[i\varphi/\hbar] \tag{1.2}$$

则无旋流方程组与单位质量粒子流在势场$(h+F)$中运动的Schrödinger方程相联系：

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2}\nabla^2+h+F\right)\psi \tag{1.3}$$

式中$\hbar$为Planck常数除以2π，F为外场力的势函数，h为单位质量的热力学焓。在$\hbar\to 0$的极限情况下，方程(1.3)式的解退化为无旋流方程组的解。注意到方程(1.3)式中的热力学焓在无旋因而等熵的条件下仅是密度ρ的函数，而密度$\rho=|\psi|^2$，因而方程（1.3)式是非线性Schrödinger方程，并且

$$h\propto|\psi|^{2(\gamma-1)} \tag{1.4}$$

式中γ为比热比。实际上，方程(1.3)式可由理想流体的能量关系式

$$\varepsilon=\frac{v^2}{2}+h+F \tag{1.5}$$

和经典变换关系

$$\varepsilon\to i\hbar\frac{\partial}{\partial t},\qquad \mathbf{v}\to -i\hbar\nabla \tag{1.6}$$

得到。式中$\mathbf{v}$为速度矢量，ε为单位质量总能量。

要想一般地得到方程(1.3)式的通解，也非易事。只是在$\gamma=2$的特殊情况下，我们才能得到非线性Schrödinger方程的孤立子解[6~7]。而且作为一种设想，我们可以将这种孤立子解与UFO现象联系起来。

本文为了避免非线性方程的出现，而采用了Legendre变换，将无旋流问题从物理空间变换到速度空间，从而得到了推广的线性Chaplygin（Чаплыгин）方程[8~9]。

对等熵无散流(不可压缩等熵流)问题，我们也作了类似的变换。由于我们应用了Dirac-Pauli表象的复变函数理论，不可压缩等熵流的流函数的表现形式同样是十分简便的。

以上两类推广的Chaplygin方程的通解是很容易求得的[1,10]。由此，我们可以圆满地解决上述两类问题。

由于本文和文[11]的结果，使我们在求解流体动力学方程的道路上，迈出了初始然而是坚实的一步。

本文中凡重复指标按Einstein约定求和。

二、Euler方程的广义Bernoulli-Cauchy积分和一些力学关系式

三维非定常等熵流中的动量方程即Euler方程为[12~14]

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{\partial F}{\partial x_i}\qquad(i,k=1,2,3) \tag{2.1}$$

式中ρ为流体的密度，p为压强，F为外场力的势函数，v_i为流速分量($i=1,2,3$)。令

$$x_4=t \tag{2.2}$$

则

$$v_4=\frac{dx_4}{dt}=1 \tag{2.3}$$

此时Euler方程(2.1)式成为

$$\left(v_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)v_i=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{\partial F}{\partial x_i}\qquad (i=1,2,3;\ \alpha=1,2,3,4) \tag{2.4}$$

引入Dirac-Pauli表象下的复变函数理论，设

$$|z\rangle=\frac{1}{2}\gamma_\alpha|x_\alpha\rangle,\ |u\rangle=\frac{1}{2}\gamma_\alpha|v_\alpha\rangle\qquad(\alpha=1,2,3,4) \tag{2.5}$$

式中γ_α为Dirac矩阵[15~16]。将(2.5)式代入Euler方程(2.4)式，得[1]

$$\left(u_k\frac{\partial}{\partial z_k}+\bar u_k\frac{\partial}{\partial \bar z_k}\right)\begin{pmatrix}-\bar u_1+u_2\\ -\bar u_1+\bar u_2\\ -\bar u_1+u_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{\partial}{\partial z_1}+\dfrac{\partial}{\partial \bar z_2}\\ -\dfrac{\partial}{\partial z_1}+\dfrac{\partial}{\partial z_2}\\ -\dfrac{\partial}{\partial z_1}+\dfrac{\partial}{\partial \bar z_1}\end{pmatrix}(-h-F) \tag{2.6}$$

式中h为单位质量的热力学焓。在等熵条件下

$$dh=\frac{dp}{\rho} \tag{2.7}$$

(2.6)式要成立的充分必要条件是

$$\left(u_k\frac{\partial}{\partial z_k}+\bar u_k\frac{\partial}{\partial \bar z_k}\right)u_i=-\frac{\partial(h+F)}{\partial \bar z_i}\qquad(i,k=1,\ 2) \tag{2.8}$$

及其共轭方程的成立。

由于

$$dp=\frac{\partial p}{\partial z_k}dz_k+\frac{\partial p}{\partial \bar z_k}d\bar z_k\qquad(k=1,2) \tag{2.9}$$

我们可以将方程(2.8)式点乘$d\bar z_i$，将(2.8)式的共轭方程点乘dz_i，然后相加以得到dp。消去点乘后为零的项，我们有

$$u_kd\bar u_k+\bar u_kdu_k+\frac{dp}{\rho}+dF=0\qquad(k=1,2) \tag{2.10a}$$

或

$$d(u_k\bar u_k+h+F)=0\qquad(k=1,\ 2) \tag{2.10b}$$

记

$$u^2=u_k\bar u_k\qquad(k=1,2) \tag{2.11}$$

从而我们得到所谓"广义Bernoulli-Cauchy积分"：

$$u^2+h+F=\text{const}\qquad(\text{沿迹线}) \tag{2.12}$$

式中迹线（或轨线）方程为

$$\frac{dz_1}{u_1}=\frac{dz_2}{u_2}=\frac{d\bar z_1}{\bar u_1}=\frac{d\bar z_2}{\bar u_2} \tag{2.13}$$

将(2.12)式和(2.13)式换为普通三维坐标系下的形式。此时(2.12)式中的u^2成为

$$u^2=u_k\bar{u}_k=\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{2}v_4^2 \tag{2.14a}$$

而迹线方程成为

$$\frac{dx_1}{v_1}=\frac{dx_2}{v_2}=\frac{dx_3}{v_3}=\frac{dx_4}{v_4} \tag{2.15a}$$

由于(2.2)式和(2.3)式，我们有

$$u^2=\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{2} \tag{2.14b}$$

$$\frac{dx_1}{v_1}=\frac{dx_2}{v_2}=\frac{dx_3}{v_3}=dt \tag{2.15b}$$

此时(2.12)式成为

$$\frac{1}{2}v^2+h+F=\text{const}\qquad(\text{沿迹线}) \tag{2.16}$$

由(2.16)式可以导出Cauchy积分。为此我们将(2.16)式代入(2.10b)式，并计及(2.15b)式，我们有

$$\mathbf{v}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(\frac{1}{2}v^2+h+F\right)=0$$

或

$$\mathbf{v}\left[\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(\frac{1}{2}v^2+h+F\right)\right]=0 \tag{2.17}$$

若流体无旋有势

$$\mathbf{v}=\frac{\partial\varphi}{\partial r} \tag{2.18}$$

则可得Cauchy积分

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}v^2+h+F=f(t)\qquad(\text{沿流线}) \tag{2.19}$$

其中流线方程为

$$\frac{dx_1}{v_1}=\frac{dx_2}{v_2}=\frac{dx_3}{v_3} \tag{2.20}$$

对照(2.15b)式和(2.20)式，可以看出迹线方程与流线方程是不同的，而且一般来说，迹线与流线并不重合。

由推导过程我们得到

定理1 Cauchy积分(2.19)式是广义Bernoulli-Cauchy积分

$$u^2+h+F=\text{const}\qquad(\text{沿迹线})$$

或

$$\frac{1}{2}v^2+h+F=\text{const}\qquad(\text{沿迹线})$$

的特例。广义Bernoulli-Cauchy积分是Euler方程(2.8)式或(2.1)式的首次积分(能量积分)。

我们定义单位质量的总能量为e

$$\varepsilon=\frac{1}{2}v^2+h+F \tag{2.21}$$

此时广义Bernoulli-Cauchy积分成为

$$\varepsilon=\text{const} \qquad (\text{沿迹线}) \tag{2.22}$$

而由方程(2.21)式和变换关系

$$\varepsilon\to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathbf{v}\to -i\hbar\nabla \tag{2.23}$$

我们可以得到单位质量粒子流在势场$(h+F)$中运动的Schrödinger方程即(1.3)式

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar}{2}\nabla^2+h+F\right)\psi \tag{2.24}$$

式中$\hbar$为Planck常数除以2π。

除此之外，由(2.10a)式，在不计外场F的情况下，我们有

$$\frac{\partial p}{\partial u_k}=-\rho\bar{u}_k \qquad (k=1,2) \tag{2.25}$$

由等熵条件，我们可以定义当地声速c：

$$c^2=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s \tag{2.26a}$$

或有关系式

$$\frac{\partial\rho}{\partial u_k}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial u_k} \qquad (k=1,2) \tag{2.26b}$$

将(2.25)式代入(2.26)式，我们有

$$\frac{\partial\rho}{\partial u_k}=-\frac{\rho\bar{u}_k}{c^2} \qquad (k=1,2) \tag{2.27}$$

因为

$$d(\rho u_k)=\rho du_k+u_k d\rho \qquad (k=1,2) \tag{2.28}$$

所以

$$\frac{\partial(\rho u_k)}{\partial u_k}=\rho+u_k\frac{\partial\rho}{\partial u_k} \qquad (\text{不求和}) \tag{2.29}$$

将(2.27)式代入(2.29)式，我们最后得到关系式：

$$\frac{\partial(\rho u_k)}{\partial u_k}=\rho\left(1-\frac{u_k\bar{u}_k}{c^2}\right) \qquad (\text{不求和}) \quad (k=1,2) \tag{2.30}$$

三、可压缩气体的三维非定常无旋流的Chaplygin方程

可压缩气体的三维非定常无旋流，可用下述方程组来描述：

连续性方程 $$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}=0 \qquad (k=1,2,3) \tag{3.1}$$

能量积分 $$\frac{1}{2}v^2+h+F=\text{const} \qquad (\text{沿迹线}) \tag{3.2}$$

具势条件 $$v_k=\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\qquad(k=1,2,3)\tag{3.3}$$

(3.1)式、(3.2)式和(3.3)式共五个方程，含有五个未知函数：ρ,φ和v_k $(k=1,2,3)$。因为无旋必定等熵，而等熵则有$p=p(\rho)$，所以p不再是独立函数；同时由于$dh=dp/\rho$，所以h也不是独立函数。

关于速度势φ的全微分，由(3.3)式，我们有

$$d\varphi=v_kdx_k\qquad(k=1,2,3)$$

或

$$d(\varphi+t)=v_kdx_k+v_4dx_4=v_\alpha dx_\alpha\qquad(k=1,2,3;\ \alpha=1,2,3,4)\tag{3.4}$$

我们引入Dirac-Pauli表象下的复变函数理论，设

$$|z\rangle=\frac{1}{2}\gamma_\alpha|x_\alpha\rangle,\qquad|u\rangle=\frac{1}{2}\gamma_\alpha|v_\alpha\rangle\qquad(\alpha=1,2,3,4)\tag{3.5}$$

则(3.1)式、(3.2)式和(3.4)式成为

$$\frac{\partial(\rho u_k)}{\partial z_k}+\frac{\partial(\rho\bar{u}_k)}{\partial\bar{z}_k}=0\tag{3.6}$$

$$u^2+h+F=\text{const}\qquad(\text{沿迹线})\tag{3.7}$$

$$d(\varphi+t)=u_kd\bar{z}_k+\bar{u}_kdz_k\qquad(k=1,2)\tag{3.8}$$

首先，由于(3.7)式，因为$h=h(\rho)$，所以

$$\rho=\rho(u_k,\ \bar{u}_k)\qquad(k=1,2)\tag{3.9}$$

即流体的密度ρ仅仅是速度u_k和$\bar{u}_k$的函数。

其次，我们对(3.8)式作Legendre变换，将自变量z_k和$\bar{z}_k$改为自变量u_k和$\bar{u}_k$ $(k=1,2)$。为此写出：

$$d(\varphi+t)=d(z_k\bar{u}_k+\bar{z}_ku_k)-(z_kd\bar{u}_k+\bar{z}_kdu_k)\tag{3.10}$$

引入函数

$$\phi=-(\varphi+t)+(z_k\bar{u}_k+\bar{z}_ku_k)\tag{3.11}$$

我们得

$$d\phi=z_kd\bar{u}_k+\bar{z}_kdu_k\tag{3.12}$$

在这里我们把ϕ看作是u_k和$\bar{u}_k$的一个函数。由此得

$$z_k=\frac{\partial\phi}{\partial\bar{u}_k},\qquad\bar{z}_k=\frac{\partial\phi}{\partial u_k}\qquad(k=1,2)\tag{3.13}$$

于是势函数φ与函数ϕ之间的关系由下面简单的公式表出：

$$\varphi+t=-\phi+\left(u_k\frac{\partial\phi}{\partial u_k}+\bar{u}_k\frac{\partial\phi}{\partial\bar{u}_k}\right)\qquad(k=1,2)\tag{3.14}$$

最后，为了得出确定函数$\phi(u_k,\ \bar{u}_k)$的方程，应该对连续性方程(3.6)式换用新的变量。我们将(3.6)式的导数写成Jacobi的形式：

$$\frac{\partial(\rho u_1,z_2)}{\partial(z_1,z_2)}-\frac{\partial(\rho u_2,z_1)}{\partial(z_1,z_2)}=0\tag{3.15}$$

及其共轭方程。

将方程(3.15)式乘以$\partial(z_1,z_2)/\partial(u_1,u_2)$。拆开Jacobi行列式的时候，应以$z_k$ $(k=1,2)$的表达式(3.13)式代入。对等熵流，$\rho=\rho(u_k,\ \bar{u}_k)$，经过简单的变换后，得到下列方程：

$$\frac{\partial(\rho u_1)}{\partial u_1}\frac{\partial^2\phi}{\partial u_2\partial\bar{u}_2}+\frac{\partial(\rho u_2)}{\partial u_2}\frac{\partial^2\phi}{\partial u_1\partial\bar{u}_1}-\Big(u_1\frac{\partial\rho}{\partial u_2}\frac{\partial^2\phi}{\partial u_1\partial\bar{u}_2}+u_2\frac{\partial\rho}{\partial u_1}\frac{\partial^2\phi}{\partial u_2\partial\bar{u}_1}=0 \tag{3.16}$$

将(2.26)式和(2.30)式代入(3.16)式，即得推广的Chaplygin 方程：

$$\left(1-\frac{u_1\bar{u}_1}{c^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial u_2\partial\bar{u}_2}+\left(1-\frac{u_2\bar{u}_2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial u_1\partial\bar{u}_1}+\frac{u_1\bar{u}_2}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial u_1\partial\bar{u}_2}+\frac{u_2\bar{u}_1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial u_2\partial\bar{u}_1}=0 \tag{3.17}$$

或

$$\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial u_k\partial\bar{u}_k}+\frac{u_k\bar{u}_l}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial u_k\partial\bar{u}_l}=0 \qquad (k,l=1,2) \tag{3.18}$$

式中 $u^2=u_k\bar{u}_k\ (k=1,2)$。我们注意到(3.18)式与其共轭方程是相同的.

推广的Chaplygin方程(3.17)式或(3.18)式是线性方程。我们可以很方便地求得它们的通解.

如果令$u_k=\bar{u}_k\ (k=1,2)$，并设

$$u_1=u\cos\theta,\ u_2=u\sin\theta$$

则(3.17)式或(3.18)式将退化为二维定常流的Chaplygin方程(1904)[9]。

对于理想气体，我们可以将方程(3.17)式或(3.18)式中的当地声速变换为临界声速（驻点声速)。由理想气体的Bernoulli积分(注意，该积分所描述的流动与我们眼下所讨论的问题并非同一流动)：

$$c^2=\frac{\gamma+1}{2}c_*^2-\frac{\gamma-1}{2}v^2 \tag{3.19}$$

及关系式(2.14b)式，我们有

$$\frac{2c^2}{\gamma-1}=\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}c_*^2+1\right)-2u^2 \tag{3.20}$$

式中γ为比热比；c_*为临界声速，通常c_*对整个流场为一常数。设

$$c_0^2=\frac{\gamma+1}{2}c_*^2+\frac{\gamma-1}{2} \tag{3.21}$$

则c_0亦对整个流场为一常数。由(3.20)式和(3.21)式，我们有：

$$c^2=c_0^2-(\gamma-1)u^2 \tag{3.22}$$

从而Chaplygin方程(3.18)式化为简单的形式：

$$\left(1-\gamma\frac{u^2}{c_0^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial u_k\partial\bar{u}_k}+\frac{u_k\bar{u}_l}{c_0^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial u_k\partial\bar{u}_l}=0 \qquad (k,l=1,2) \tag{3.23}$$

方程(3.23)式的通解用超几何函数的特殊积分族来表示。

这样，我们得到

定理2 可压缩气体的三维非定常无旋流的通解，可以用满足推广的Chaplygin方程

$$\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial u_k\partial\bar{u}_k}+\frac{u_k\bar{u}_l}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial u_k\partial\bar{u}_l}=0 \qquad (k,l=1,2)$$

或

$$\left(1-\gamma\frac{u^2}{c_0^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial u_k\partial\bar{u}_k}+\frac{u_k\bar{u}_l}{c_0^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial u_k\partial\bar{u}_l}=0 \qquad (k,l=1,2)$$

的解，即超几何函数的特殊积分族来表示。

需要注意的是，变换方程(3.14)式可以认为是联系线性Chaplygin 方程的解和无旋流方程组的解的简单Bäcklund变换。

四、三维非定常不可压缩等熵流的Chaplygin 方程

等熵气体动力学的另一议题是三维非定常不可压缩等熵流。三维非定常不可压缩等熵流可用下述方程组来描述：

连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}=0 \qquad (k=1,2,3) \tag{4.1}$$

不可压缩条件

$$\frac{d\rho}{dt}=0 \qquad \text{或} \qquad \frac{\partial v_k}{\partial x_k}=0 \qquad (k=1,2,3) \tag{4.2}$$

能量积分

$$\frac{1}{2}v^2+h+F=\text{const} \qquad (\text{沿迹线}) \tag{4.3}$$

等熵条件

$$dh=\frac{dp(\rho)}{\rho} \tag{4.4}$$

(4.1)式、(4.2)式、(4.3)式和(4.4)式共四个方程，含有四个未知函数：ρ 和$v_k(k=1,2,3)$。由于等熵必有 $p=p(\rho)$，由（4.4）式，所以 h 也不是独立函数。

我们引入 Dirac-Pauli 表象下的复变函数理论，设

$$|z\rangle=\frac{1}{2}\gamma_\alpha|x_\alpha\rangle, \quad |u\rangle=\frac{1}{2}\gamma_\alpha|v_\alpha\rangle \qquad (\alpha=1,2,3,4) \tag{4.5}$$

式中 γ_α 为 Dirac 矩阵；则（4.1）式，（4.2）式和（4.3）式分别化为

$$\frac{\partial(\rho u_k)}{\partial z_k}+\frac{\partial(\rho\bar{u}_k)}{\partial\bar{z}_k}=0 \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial z_k}+\frac{\partial\bar{u}_k}{\partial\bar{z}_k}=0 \tag{4.7}$$

$$u^2+h+F=\text{const} \qquad (\text{沿迹线}) \quad (k=1,2) \tag{4.8}$$

首先，由（4.8）式可知，因为 $h=h(\rho)$，所以

$$\rho=\rho(u_k,\ \bar{u}_k) \qquad (k=1,2) \tag{4.9}$$

即流体的密度 ρ 仅仅是速度 u_k 和 $\bar{u}_k$ 的函数。

其次，对于不可压缩方程（4.7）式，我们引入流函数 ψ:

$$u_1=\frac{\partial\psi}{\partial z_2}, \quad u_2=-\frac{\partial\psi}{\partial z_1}; \quad \bar{u}_1=\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}_2}, \quad \bar{u}_2=-\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}_1} \tag{4.10}$$

关于实流函数 ψ 的全微分，我们有

$$d\psi=(u_1dz_2+\bar{u}_1d\bar{z}_2)-(u_2dz_1+\bar{u}_2d\bar{z}_1) \tag{4.11}$$

我们对（4.11）式作 Legendre 变换，将自变量 z_k 和 $\bar{z}_k$ 改为自变量 u_k 和 $\bar{u}_k$ （$k=1,2$）。为此，我们写出

$$d\psi=d(u_1z_2+\bar{u}_1\bar{z}_2-u_2z_1-\bar{u}_2\bar{z}_1)+(z_1du_2+\bar{z}_1d\bar{u}_2)-(z_2du_1+\bar{z}_2d\bar{u}_1) \tag{4.12}$$

引入函数

$$\Psi=-\psi+(u_1z_2+\bar{u}_1\bar{z}_2-u_2z_1-\bar{u}_2\bar{z}_1) \tag{4.13}$$

我们得

$$d\Psi=(z_2du_1+\bar{z}_2d\bar{u}_1)-(z_1du_2+\bar{z}_1d\bar{u}_2) \tag{4.14}$$

在这里，我们将Ψ看作是u_k和$\bar{u}_k$的一个函数。由此得

$$z_1=-\frac{\partial\Psi}{\partial u_2},\quad z_2=\frac{\partial\Psi}{\partial u_1};\quad \bar{z}_1=-\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{u}_2},\quad \bar{z}_2=\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{u}_1} \tag{4.15}$$

于是流函数ψ与函数Ψ之间的关系由下列简单的公式给出：

$$\psi=-\Psi+u_k\frac{\partial\Psi}{\partial u_k}+\bar{u}_k\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{u}_k}\qquad(k=1,2) \tag{4.16}$$

最后，为了确定函数$\Psi(u_k,\ \bar{u}_k)$的方程，应该对连续性方程（4.6）式换用新的变量。我们将（4.6）式的导数写成Jacobi的形式

$$\frac{\partial(\rho u_1,z_2)}{\partial(z_1,z_2)}-\frac{\partial(\rho u_2,z_1)}{\partial(z_1,z_2)}=0 \tag{4.17}$$

及其共轭方程。

将方程（4.17）式乘以$\partial(z_1,z_2)/\partial(u_1,u_2)$。拆开Jacobi行列式的时候，应以$z_k$（$k=1$，2)的表达式（4.15）式代入。对等熵流，$\rho=\rho(u_k,\ \bar{u}_k)$。经过简单的变换后，得到如下方程

$$\left[\frac{\partial(\rho u_1)}{\partial u_1}-\frac{\partial(\rho u_2)}{\partial u_2}\right]\frac{\partial^2\Psi}{\partial u_1\partial u_2}-\left(u_1\frac{\partial\rho}{\partial u_2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial u_1^2}-u_2\frac{\partial\rho}{\partial u_1}\frac{\partial^2\Psi}{\partial u_2^2}\right)=0 \tag{4.18}$$

将（2.26）式和（2.30）式代入（4.18）式，即得推广的Chaplygin方程

$$(u_2\bar{u}_2-u_1\bar{u}_1)\frac{\partial^2\Psi}{\partial u_1\partial u_2}+u_1\bar{u}_2\frac{\partial^2\Psi}{\partial u_1^2}-u_2\bar{u}_1\frac{\partial^2\Psi}{\partial u_2^2}=0 \tag{4.19}$$

或

$$\bar{u}_2u_k\frac{\partial^2\Psi}{\partial u_k\partial u_1}-\bar{u}_1u_k\frac{\partial^2\Psi}{\partial u_k\partial u_2}=0\qquad(k=1,2) \tag{4.20}$$

另一方程是它的共轭方程。

推广的Chaplygin方程（4.20）式及其共轭方程都是线性方程。我们可以很方便地求得它们的通解。值得注意的是，这里的方程与声速无关。（即不可压缩流体的声速为无穷大。）

从而，我们又有

定理3 三维非定常不可压缩等熵流方程组的通解，可以用一个实未知函数Ψ来表示。这个实未知函数Ψ，满足线性方程

$$\bar{u}_2u_k\frac{\partial^2\Psi}{\partial u_k\partial u_1}-\bar{u}_1u_k\frac{\partial^2\Psi}{\partial u_k\partial u_2}=0\qquad(k=1,2)$$

及其共轭方程。

需要注意的是，变换方程（4.16）式可以认为是联系线性Chaplygin方程的解和不可压缩等熵流方程组的解的简单Bäcklund变换。

参 考 文 献

[1] 沈惠川，Dirac-Pauli表象的复变函数理论及其在流体力学中的应用（Ⅰ），应用数学和力学，7，4 (1986)，365—382。

[2] 沈惠川，均匀不可压缩蠕流动力学的通解，自然杂志，7，10 (1984) 799；7,12 (1984),940。

[3] 钱学森，《气体动力学诸方程》(《气体动力学基本原理》A编)，徐华舫译，科学出版社 (1966)。

[4] Ландау Л. Д. и Е. М. Лифшиц，《连续介质力学》，彭旭麟译，人民教育出版社

(1958).

——,《流体力学》, 孔祥言、徐燕侯、庄礼贤译, 高等教育出版社 (1983～1984).

[5] Böhm, D., 关于量子力学"隐"变数解释的建议, 自然辩证法研究通迅, 3 (1959), 42; 4 (1959), 63.

[6] 谷内俊弥, 西原功修,《非线性波动》, 徐福元等译, 原子能出版社 (1981).

[7] Eckhaus, W. and A. Van Harten,《逆散射变换和孤立子理论》, 黄迅成译, 陈以鸿校, 上海科学技术文献出版社 (1984).

[8] Oswatitsch, K.,《气体动力学》, 徐华舫译, 科学出版社 (1965).

[9] Chaplygin, C. A., Über gasstrahlen, Wiss. Ann. Univ., *Moskau Math. Phys.*, 21 (1904), 1—121, or NACA TM 1063.

[10] Ringleb, F., Lösungen der differentialgleichung einer adiabatischen strömung, *ZAMM*, 20 (1940), 185—198.

[11] 沈惠川, Navier-Stokes 方程的精确解, Dirac-Pauli 表象的复变函数理论及其在流体力学中的应用(Ⅰ), 应用数学和力学, 7, 6 (1986), 517—522.

[12] Prandtl, L., K. Oswatitsch and K. Wieghardt,《流体力学概论》, 郭永怀、陆士嘉译, 科学出版社 (1981).

[13] Fung, Y. C. (冯元桢),《连续介质力学导论》, 李松年、马和中译, 科学出版社 (1984).

[14] 湯川秀樹,《現代物理学の基礎》[第一版], Vol. 1,《古典物理学》(Ⅰ), 岩波書店 (1975).

[15] Dirac, P. A. M.,《量子力学原理》, 陈咸亨译, 科学出版社 (1965).

[16] Flügge, S.,《实用量子力学》, 宋孝同等译, 人民教育出版社 (1981～1983).

Chaplygin Equation in Three-Dimensional Non-Constant Isentropic Flow——The Theory of Functions of a Complex Variable under Dirac-Pauli Representation and Its Application in Fluid Dynamics (Ⅲ)

Shen Hui-chuan

(Department of Earth and Space Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei)

Abstract

This work is the continuation of the discussion of ref. [1]. In this paper we resolve the equations of isentropic gas dynamics into two problems: the three-dimensional non-constant irrotational flow (thus the isentropic flow, too), and the three-dimensional non-constant indivergent flow(i. e. the incompressible isentropic flow). We apply the theory of functions of a complex variable under Dirac-Pauli representation and the Legendre transformation, transform these equations of two problems from physical space into velocity space, and obtain two general Chaplygin equations in this paper. The general Chaplygin equation is a linear difference equation, and its general solution can be expressed at most by the hypergeometric functions. Thus we can obtain the general solution of general problems for the three-dimensional non-constant isentropic flow of gas dynamics.