应用数学和力学，第7卷第8期（1986年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于半线性热方程的防爆与防熄问题*

严子谦

（吉林大学数学系，1983年5月3日收到）

摘　要

本文研究初值问题

$$u_t=\Delta u+g(t)f(u)\quad(t>0),\quad u|_{t=0}=u_0(x)$$

和初边值问题

$$u_t=\Delta u+g(t,x)f(u)\quad(t>0,\ x\in\Omega),\quad u|_{t=0}=u|_{\partial\Omega}=0$$

之解的整体存在性。如文献［6］中所作的那样，在非线性项中引进因子 $g(t)$ 或 $g(t,x)$，是为了防止解的爆破或熄灭现象发生。本文的结果表明，文献［6］的两个定理中对 f，g 和 u_0 的大部分限制可以取消或者减弱；对 g 可以只要求它在 t 大时充分小；在一定条件下，控制初始状态即可避免爆破。

一、前　言

由于应用的需要和理论的兴趣，半线性热方程解的爆破与熄灭问题日益为人们所注意。1963年，Kaplan[1]首先指出，若当 u 充分大时，$f(u)$ 为正值凸函数，且满足条件

$$\int^{\infty}\frac{du}{f(u)}<\infty$$

则当初值或初边值充分大时，半线性抛物方程

$$u_t=Lu+f(u)$$

的初值问题或混合问题的解 u 必具爆破性质，即当 t 趋于某有限时刻 T 时，u 趋于无穷大。此处，L 为二阶线性一致椭圆型算子。其后，Fujita[2]和Hayakawa[3]等对方程

$$u_t=\Delta u+u^{\alpha}\qquad(\alpha>1)$$

进行深入的研究，得到了相当完满的下述结果：

当 $\alpha\leqslant(n+2)/n$ 时，对任何非平凡的初值，相应的初值问题无非负的整体解，即任何非负解都在有限时间内爆破；而当 $\alpha>(n+2)/n$ 时，则对充分小的非负初值，存在整体解。

对更为一般的非线性项 $f(u)$，也有一些深入的工作。

另一方面，1975年，Kawarada[4]发现，对混合问题

* 钱伟长推荐。

$$\left.\begin{array}{ll}u_t=u_{xx}+\dfrac{1}{1-u}, & 0<t\leqslant T\leqslant\infty,\ |x|<a\\ u(0,x)=u(t,\ \pm a)=0 & \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

存在正数a^*，当$0<a<a^*$时，相应的问题存在整体解；而当$a>a^*$时则发生熄灭现象，即解仅在有限时间内存在而且有界，但其导数爆破。对一般的非线性项$f(u)$，Acker和Walter[5]进行了研究，揭示了非定常问题整体解的存在性与相应的定常问题解的存在性之间的密切联系。

为了避免爆破或熄灭现象的发生，陈庆益[6]引进了防爆和防熄因子，即代替$f(u)$而考虑$g(t)f(u)$或$g(t,x)f(u)$，$g(t)$或$g(t,x)$在某种意义下甚小。这可能是一个很有意思的想法。不过文[6]对$g(t)$，$g(t,x)$，$f(u)$以及初值所加的条件太强，而且对混合问题（1.1）给出a^*的估值时计算上有所疏忽。

这个短文打算改进文[6]的结果，算是对该文的补充。本文的结果表明，文[6]中两个定理的条件可以大大减弱；对于防爆和防熄因子g，可以只要求它在t充分大时甚小；在一定条件下，控制初值即可防止爆破现象的发生。

二、防 爆 问 题

考虑半线性热方程的初值问题

$$\left.\begin{array}{ll}u_t=\Delta u+g(t)f(u), & t>0,\ x\in R^n\\ u(0,x)=u_0(x), & x\in R^n\end{array}\right\} \tag{2.1}$$

定理 1 设$f(u)$和$g(t)$都是各自变元的连续可微函数，$u_0(x)$是x的连续函数，而且

$$|f(u)|\leqslant|u|^\alpha,\qquad \alpha>1 \tag{2.2}$$

$$\int_0^\infty|g(t)|dt=K<+\infty \tag{2.3}$$

$$|u_0(x)|\leqslant M \tag{2.4}$$

于是，若K或/和M充分小，使得

$$MK^{\frac{1}{\alpha-1}}\leqslant\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{2.5}$$

则初值问题（2.1）有对一切$t>0$定义的有界整体解，而不发生爆破。

证 记$r=(\alpha K)^{\frac{1}{1-\alpha}}$。按条件（2.5），$M\leqslant\left(1-\dfrac{1}{\alpha}\right)r$。众所熟知，初值问题

$$\begin{cases}w_t=\Delta w\pm r^\alpha|g(t)|, & t>0,\ x\in R^n\\ w(0,x)=u_0(x), & x\in R^n\end{cases}$$

有解

$$w^\pm(t,\ x)=\int_{R^n}E(t,\ x-\xi)u_0(\xi)d\xi\pm r^\alpha\int_0^t|g(\tau)|d\tau$$

其中E是热方程的基本解：

$$E(t,x)=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\exp[-|x|^2/4t]$$

据条件（2.3）～（2.5），$\forall t>0$，$\forall x\in R^n$，

$$|w^{\pm}(t,x)|\leqslant M+r^{\alpha}K=r[M(\alpha K)^{\frac{1}{\alpha-1}}+(\alpha K)^{-1}K]$$

$$\leqslant r\left[\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}+\frac{1}{\alpha}\right]=r$$

因此，按条件（2.2），$w^{\pm}(t,x)$分别是问题（2.1）的上、下解，即

$$\begin{cases}w_t^+\geqslant\Delta w^++g(t)f(w^+), & w^+(0,x)=u_0(x)\\ w_t^-\leqslant\Delta w^-+g(t)f(w^-), & w^-(0,x)=u_0(x)\end{cases}$$

且$w^-(t,x)\leqslant w^+(t,x)$。据关于上、下解方法的有关结果(例如可参看[7])，初值问题(2.1)存在唯一整体解u：$-r\leqslant w^-(t,x)\leqslant u(t,x)\leqslant w^+(t,x)\leqslant r$ ▽▽

注 1 与文[6]定理 1 比较，本定理取消了

$$|f(u)|\geqslant A|u|^{\alpha},\quad |f'(u)|\leqslant C|u|^{\beta},\quad C(M+K)K<1$$

等种种限制，而将条件

$$M+K<1 \tag{2.6}$$

换成了条件（2.5）。两者的不同之处在于：（2.6）要求M和K都小，而（2.5）只要求其一甚小即可。特别，只要$g(t)$绝对可积，控制初始状态即可防止爆破现象的发生。此外，若（2.6）成立，则（2.5）亦成立。事实上，非负函数

$$\varphi(\tau)=(1-\tau)\tau^{\frac{1}{\alpha-1}}\qquad(0\leqslant\tau\leqslant1)$$

在$\tau=1/\alpha$处取（2.5）的右端为最大值。故$M+K\leqslant1$蕴含$K\in[0,1]$，且

$$MK^{\frac{1}{\alpha-1}}\leqslant(1-K)K^{\frac{1}{\alpha-1}}\leqslant\varphi\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

如果我们有兴趣的只是初值问题(2.1)的非负解，则关于$g(t)$和$u_0(x)$的假设还可以减弱。

定理 2 设$f(u)$和$g(t)$都是各自变元的连续可微的非负函数，$u_0(x)$是x的非负有界连续函数，而且

$$f(u)\leqslant u^{\alpha}\qquad(\alpha>1)\quad 当\ u\geqslant0\ 时 \tag{2.7}$$

$$(\alpha-1)\int_0^{\infty}g(t)\|h(t,\cdot)\|^{\alpha-1}dt\leqslant1 \tag{2.8}$$

此处

$$h(t,x)=\int_{R^n}E(t,x-\xi)u_0(\xi)d\xi,\quad \|h(t,\cdot)\|=\sup_{x\in R^n}h(t,x)$$

于是初值问题（2.1）有对一切$t>0$定义的非负整体解u，且

$$h(t,x)\leqslant u(t,x)\leqslant C(t)h(t,x)$$

其中

$$C(t)=\left[1-(\alpha-1)\int_0^t g(\tau)\|h(\tau,\cdot)\|^{\alpha-1}d\tau\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

证 根据上、下解方法的结果，为证定理，只须验证$C(t)h(t,x)$和$h(t,x)$分别是问题（2.1）的上、下解。后者是明显的，因为$h(t,x)$是初值问题

$$w_t=\Delta w,\quad w(0,x)=u_0(x)$$

的解，而$g(t)f(u)\geqslant0$。前者亦不难验证。事实上，

$$C(t)h(t,x)|_{t=0}=u_0(x)$$

$$[C(t)h(t,x)]_t=C(t)h_t(t,x)+g(t)\|h(t,\cdot)\|^{\alpha-1}[C(t)]^{\alpha}h(t,x)$$

$$\geqslant C(t)\Delta h(t,x)+g(t)(C(t)h(t,x))^{\alpha}$$

$$\geqslant \Delta[C(t)h(t,x)]+g(t)f(C(t)h(t,x)) \qquad \nabla\nabla$$

注 2 当 f,g,u_0 都非负时，定理 1 由定理 2 推出。事实上，由条件（2.3）～（2.5），

$$\|h(t,\cdot)\|\leqslant M, \qquad \forall t>0$$

$$(\alpha-1)\int_0^\infty g(t)\|h(t,\cdot)\|^{\alpha-1}dt\leqslant(\alpha-1)KM^{\alpha-1}\leqslant\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^\alpha<1$$

可见条件（2.8）成立。

注 3 当 $f(u)=u^\alpha$, $g(t)\equiv 1$ 时，定理 2 和文[8]的定理 3 就基本一样。但正如该文所指出的，对于 $g(t)\equiv 1$ 的情形，条件（2.8）仅当 $\alpha>(n+2)/n$ 时才有可能实现

$$\left(\text{因为} \lim_{t\to\infty}(4\pi t)^{\frac{n}{2}}\int_{R^n}E(t,x-\xi)u_0(\xi)d\xi=\|u_0\|_1!\right)$$

在防爆因子 $g(t)$ 的参与下，对 α 则无此限制。

例 容易验证，初值问题

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+u^2, & 0<t<T,\ -\infty<x<+\infty \\ u(0,x)=1, & -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

当 $T\leqslant 1$ 时有唯一解 $u=1/(1-t)$，它当 $t\to 1^-$ 时爆破。但另一方面，初值问题

$$\left.\begin{aligned} & u_t=u_{xx}+u^2/(1+t)^\beta, && t>0,\ -\infty<x<+\infty \\ & u(0,x)=1, && -\infty<x<\infty \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

当 $\beta\geqslant 2$ 时存在整体解

$$u=\frac{(\beta-1)(1+t)^{\beta-1}}{1+(\beta-2)(1+t)^{\beta-1}}$$

对于问题（2.9），文[6]定理 1 和文[8]定理 3 都无能为力，但用我们的定理 2 可以事先判定整体解的存在性。事实上，此时

$$\alpha=2,h(t,x)=1,g(t)=(1+t)^{-\beta},(\alpha-1)\int_0^\infty g(t)\|h(t,\cdot)\|^{\alpha-1}dt=\int_0^\infty(1+t)^{-\beta}dt=\frac{1}{\beta-1}\leqslant 1$$

故条件（2.8）满足。若 $\beta\geqslant 5$，则定理 1 亦可用。

三、防 熄 问 题

设 Ω 是 R^n 中 n 维有界光滑域。现在考虑混合问题

$$\left.\begin{aligned} & u_t=\Delta u+g(t,x)f(u), && t>0,\ x\in\Omega \\ & u|_{t=0}=u|_{\partial\Omega}=0 \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

定理 3 设 $f(u)$ 在 $u=A(>0)$ 处有奇性，但当 $|u|\leqslant r<A$ 时连续可微，且 $f(0)\neq 0$，

$$|f(u)|\leqslant M; \qquad \text{当 } |u|\leqslant r \tag{3.2}$$

$g(t,x)$ 是连续可微函数，满足

$$\int_0^t\int_\Omega G(t-\tau,x,\xi)|g(\tau,\xi)|d\xi d\tau\leqslant K \tag{3.3}$$

此处 G 是相应的线性问题的 Green 函数。于是若

$$KM\leqslant r \tag{3.4}$$

则混合问题（3.1）有对一切 $t>0$ 定义的有界整体解，且其导数亦有界，即不产生熄灭现象。

证　令

$$\tilde{f}(u)=\begin{cases} f(u), & \text{当}|u|\leqslant r \\ f(r), & \text{当}\ u>r \\ f(-r), & \text{当}\ u<-r \end{cases}$$

则 $\tilde{f}(u)$ 是 Lipschitz 连续函数，且 $|\tilde{f}(u)|\leqslant M$，$\forall u$。代替（3.1）我们考虑如下混合问题

$$\left.\begin{aligned} &u_t=\Delta u+g(t,x)\tilde{f}(u), \qquad t>0,\ x\in\Omega \\ &u|_{t=0}=u|_{\partial\Omega}=0 \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

容易看出，若以 $w(t,x)$ 记混合问题

$$\left.\begin{aligned} &w_t=\Delta w+M|g(t,x)|, \qquad t>0,\ x\in\Omega \\ &w|_{t=0}=w|_{\partial\Omega}=0 \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

的解，则 $w\geqslant0$，$\pm w(t,x)$ 分别是问题（3.5）的上、下解。再次根据关于上、下解方法的结果，得知问题（3.5）存在唯一解 u: $|u|\leqslant w$。

关于问题（3.6）的解 $w(t,x)$，熟知有表达式

$$w(t,x)=M\int_0^t\int_\Omega G(t-\tau,x,\xi)|g(\tau,\xi)|d\xi d\tau$$

因此，据条件，(3.3)，(3.4) 我们得到

$$|u(t,x)|\leqslant w(t,x)\leqslant KM\leqslant r, \qquad \forall t>0,\ x\in\bar{\Omega}$$

由于 $|u|\leqslant r$ 时 $\tilde{f}(u)=f(u)$，故上式表明问题（3.5）的解 $u(t,x)$ 也就是问题（3.1）的整体解。由于 $\tilde{f}(u)$ 的性质很好，作为问题（3.5）的解的 $u(t,x)$ 当然也具有很好的性质，特别其导数不会在有限时间内爆破。　▽▽

注 4　与文[6]定理2比较，本文不要求 $K<1$，$KM<1$ 和 $KC<1$，其中 $C=\sup\limits_{|u|\leqslant r}|f'(u)|$。

注 5　文[6]曾经对问题（1.1）给出产生熄灭现象的临界值 a^* 的估计式

$$a^*\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{3.7}$$

其论证是，$a<1/\sqrt{2}$ 能够保证该文定理 2 的条件之一：$K<1$。这一论证有两个明显的疏忽：一是没有考虑到该定理给出的保证不产生熄灭现象的其它条件，特别是条件（3.4）；二是在估算 K 值的第三步中不必要地将 K 的界放大了一倍。若无此放大，则按文[6]的算法，应为 $K\leqslant a^2$，而 $a^*\geqslant1$，这当然不对。

下面我们将定理 3 用于问题（1.1）而推出估计式（3.7）。对问题(1.1)而言，$A=1$，$M=1/(1-r)$，$g(t,x)\equiv1$。根据定理 3，保证整体解存在的充分条件（3.4）此时应为

$$K\leqslant r(1-r)\leqslant1/4 \tag{3.8}$$

为估算 K 值，我们首先注意，$v=\int_0^t\int_{-a}^a G(t-\tau,x,\xi)d\xi d\tau$ 乃是混合问题

$$\begin{cases} v_t=v_{xx}+1, & t>0,\ |x|<a \\ v(0,x)=v(t,\pm a)=0 \end{cases}$$

的解。利用极值原理容易证明

$$0 \leqslant v \leqslant \frac{1}{2}(a^2-x^2) \leqslant \frac{1}{2}a^2$$

因此

$$\int_0^t \int_{-a}^a G(t-\tau,x,\xi)|g(\tau,\xi)|d\xi d\tau = \int_0^t \int_\Omega G(t-\tau,x,\xi)d\xi d\tau = v(t,x) \leqslant \frac{1}{2}a^2$$

这就是说，可取 $K=a^2/2$，$a^2 \leqslant 1/2$便保证了条件（3.8)的成立，从而也就保证了问题(1.1)不致产生熄灭现象。足见 $a^* > 1/\sqrt{2}$，（3.17）成立。

参 考 文 献

[1] Kaplan, S., On the growth of solutions of quasi-linear parabolic equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **16** (1963), 305—330.

[2] Fujita, H., On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect. I, **13** (1966), 109—124.

[3] Hayakawa, K., On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations, *Proc. Japan Acad.*, **49** (1973), 503—505.

[4] Kawarada, H., On solutions of initial-boundary problem for $u_t = u_{xx} + 1/(1-u)$, *Publ. RIMS*, Kyoto Univ., **10** (1975), 729—736.

[5] Acker, A. and W. Walter, The quenching problem for nonlinear parabolic differential equations, *Lect. Notes in Math.*, Springer-Verlag, **1-2** (1976), 564.

[6] 陈庆益，关于半线性热方程的爆破及熄灭问题，数学物理学报，2 (1982), 17—23.

[7] Fife, P. C., Mathematical aspects of reacting and diffusing systems, *Lect. Notes in Biomathematics*, Springer-Verlag (1979), 28.

[8] Weissler, F. B., Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation, *Isreal J. Math.*, **38** (1981), 29—40.

On the Problem of Preventing Blowing-up and Quenching for Semilinear Heat Equation

Yan Zi-qian

(Department of Mathematics, Jilin University, Jilin)

Abstract

In this paper, the global existence of solutions to the IVP

$$u_t = \Delta u + g(t)f(u) \quad (t>0),\ u|_{t=0} = u_0(x)$$

and the IBVP

$$u_t = \Delta u + g(t,x)f(u) \quad (t>0,\ x \in \Omega),\ u|_{t=0} = u|_{\partial\Omega} = 0$$

is investigated. As has been done in [6], the introduction of factors $g(t)$ or $g(t,x)$ in nonlinear term is to prevent the occurrence of blowing-up or quenching of solutions. It is shown in this paper that most of the restrictions on f, g and u_0 in the theorems of [6] may be cancelled or relaxed, that the smallness of g is required only for t large, and that under certain conditions controlling initial state can avoid blowing-up.