

# 双模量复合材料正交迭层矩形 厚板的热弯曲问题\*

白宗方 王迪新

(青岛化工学院, 1985年10月3日收到)

## 摘 要

本文给出了双模量复合材料迭层板热弯曲的加权残数解。各层都假定为弹性和热弹性的双模量各向异性材料。该模型是建立在Whitney-Pagano迭层板理论和热弹性模型基础上, 考虑了沿板厚的剪切应变。所得挠度和中性面位置的结果和精确解非常吻合。

## 一、前 言

随着纤维增强复合材料的广泛应用, 这种材料的热效应也越来越受到重视。这种材料的特性之一, 就是沿纤维方向拉伸或压缩时其弹性模量不同, 即双模量问题。该特性是S. K. Clark<sup>[1]</sup>和H. P. Patel<sup>[2]</sup>在帘线橡胶复合材料的实验中观察到的; S. A. Ambartsumyan<sup>[3]</sup>首先用公式表示出这种材料的弹性性质。C. W. Bert等人采用了Bert模型<sup>[4][5]</sup>。

1979年以前所进行的双模量材料板的热弹性分析<sup>[6]~[9]</sup>, 仅限于各向同性的双模量材料, 而且温度变化对称于板的中性面。1980年J. N. Reddy<sup>[10]</sup>等对双模量正交各向异性迭层厚板的热弹性弯曲问题进行了有限元分析, 其结果和精确解符合得很好。我们在论文[11],[12]工作的基础上, 应用加权残数法对上述问题进行求解, 计算结果与精确解相当吻合, 而这个方法的优点在于计算工作量较小。

## 二、基本方程和边界条件

考虑由aramid-rubber式polyester-rubber组成的两层正交各向异性迭层矩形厚板, 四边简支, 并且假定其中面温度和沿板厚的温度梯度是按正弦分布的。迭层板的铺设方式见图1。

\* 周履推荐。

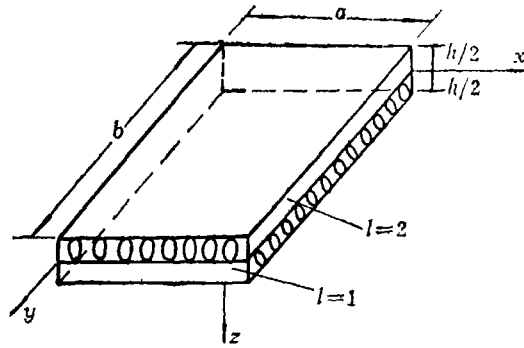


图1 迭层板的铺设方式

## 1. 热弹性本构关系

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11kl} & Q_{12kl} & 0 \\ Q_{12kl} & Q_{22kl} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66kl} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_{1kl}T \\ \varepsilon_y - \alpha_{2kl}T \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{440l} & 0 \\ 0 & C_{550l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

其中 $C$ 是Cauchy剪切弹性模量， $\alpha$ 为热膨胀系数， $Q$ 为简化刚度系数。在 $Q_{ijkl}$ 和 $C_{ijkl}$ 以及 $\alpha_{jkl}$ 的下标变量中，下标 $k=1$ 表示纤维受拉， $k=2$ 表示纤维受压， $k=0$ 表示与纤维方向的变形形式无关，下标 $l$ 表示层号。

## 2. 合力和合力矩，热力和热力矩

$$\left. \begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}, Q_y, Q_x) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}) dz \\ (M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz \\ (N_x^T, M_x^T) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{11kl}\alpha_{1kl} + Q_{12kl}\alpha_{2kl})(1, z) T dz \\ (N_y^T, M_y^T) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{12kl}\alpha_{1kl} + Q_{22kl}\alpha_{2kl})(1, z) T dz \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

其中 $h$ 是迭层板的总厚度

## 3. 位移场

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= u^0(x, y) + z\psi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v^0(x, y) + z\psi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w^0(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

其中 $u^0, v^0, w^0$ 为板的中面位移； $\psi_x, \psi_y$ 为板断面在 $x, y$ 方向上的转角。

4. 迭层板的本构方程

$$\begin{Bmatrix} N_x + N_x^T \\ N_y + N_y^T \\ N_{xy} \\ \frac{(M_x + M_x^T)}{h} \\ \frac{(M_y + M_y^T)}{h} \\ -\frac{M_{xy}}{h} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & \frac{B_{11}}{h} & \frac{B_{12}}{h} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & \frac{B_{12}}{h} & \frac{B_{22}}{h} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & \frac{B_{66}}{h} \\ \frac{B_{11}}{h} & \frac{B_{12}}{h} & 0 & \frac{D_{11}}{h^2} & \frac{D_{12}}{h^2} & 0 \\ \frac{B_{12}}{h} & \frac{B_{22}}{h} & 0 & \frac{D_{12}}{h^2} & \frac{D_{22}}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B_{66}}{h} & 0 & 0 & \frac{D_{66}}{h^2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x}^0 \\ v_{,y}^0 \\ v_{,x}^0 + u_{,y}^0 \\ h\psi_{x,x} \\ h\psi_{y,y} \\ h\psi_{y,x} + h\psi_{x,y} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{44} & 0 \\ 0 & S_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,y}^0 + \psi_y \\ w_{,x}^0 + \psi_x \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

这里  $(\quad)_{,x} \equiv \partial(\quad)/\partial x$ .

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, S_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{ij}, Q_{ij}z, Q_{ij}z^2, K_i^2 C_{ij}) dz \quad (2.7)$$

$K_i$  是横向剪切系数，它表示沿板厚横向剪切应变的不均匀性。

5. 平衡方程

$$\left. \begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0; & N_{xy,x} + N_{y,y} &= 0; & Q_{x,x} + Q_{y,y} &= 0 \\ M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x &= 0; & M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

将方程(2.5)、(2.6)代入方程(2.8)得到一组用广义位移表示的热弹性平衡方程式

$$[L_{rs}] \begin{Bmatrix} u^0 \\ v^0 \\ w^0 \\ h\psi_y \\ h\psi_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{x,x}^T \\ N_{y,y}^T \\ 0 \\ M_{y,y}^T \\ M_{x,x}^T \end{Bmatrix} \quad (r, s=1,2,3,4,5) \quad (2.9)$$

其中  $[L_{rs}]$  是由下列元素组成的对称线性微分算子矩阵

$$\left. \begin{aligned} L_{11} &\equiv A_{11}dx^2 + A_{66}dy^2 & L_{25} &\equiv L_{14} \\ L_{12} &\equiv (A_{12} + A_{66})dxdy & L_{33} &\equiv -S_{55}dx^2 - S_{44}dy^2 \\ L_{13} &\equiv 0 & L_{34} &\equiv -S_{44}dy \\ L_{14} &\equiv (B_{12} + B_{66})dxdy & L_{35} &\equiv -S_{55}dx \\ L_{15} &\equiv B_{11}dx^2 + B_{66}dy^2 & L_{44} &\equiv D_{66}dx^2 + D_{12}dy^2 - S_{44} \\ L_{22} &\equiv A_{66}dx^2 + A_{22}dy^2 & L_{45} &\equiv (D_{12} + D_{66})dxdy \\ L_{23} &\equiv 0 & L_{55} &\equiv D_{11}dx^2 + D_{66}dy^2 - S_{55} \\ L_{24} &\equiv B_{66}dx^2 + B_{22}dy^2 & dx &\equiv \partial/\partial x, dx^2 \equiv \partial^2/\partial x^2, \text{余类推} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

6. 边界条件: 四边简支, 即简单的弯曲支承; 在垂直于棱边方向上不受约束。

在  $x=0$  和  $x=a$  处, 沿板的棱边有:

$$N_x = v^0 = w^0 = M_x = \psi_y = 0 \quad (2.11)$$

在  $y=0$  和  $y=b$  处, 沿板的棱边有:

$$N_y = u^0 = w^0 = M_y = \psi_x = 0 \quad (2.12)$$

### 7. 中性面位置

对(2.4)式进行微分

$$u_{,x} = u^0_{,x} + z\psi_{x,x}, \quad v_{,y} = v^0_{,y} + z\psi_{y,y} \quad (2.13)$$

令  $u_{,x} = 0, v_{,y} = 0$ , 则得到中性面的位置如下:

$$\left. \begin{aligned} Z_{nx} &= -u^0_{,x}/\psi_{x,x} & \text{和} & & Z_{ny} &= -v^0_{,y}/\psi_{y,y} \\ Z_x &= -u^0_{,x}/h\psi_{x,x} & \text{和} & & Z_y &= -v^0_{,y}/h\psi_{y,y} \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

在热弹性情况下, 不仅  $A_{ij}, B_{ij}$  和  $D_{ij}$  等刚度系数与  $Z_{nx}$  和  $Z_{ny}$  有关, 而且广义温度内力  $N_i^T$  和  $M_i^T$  也与它们有关, 各种不同情况下的推导, 可见文献[10]的附录 1 和文献[11]附录。

### 8. 其他

为了和文献[10]中精确解进行对比, 因此假定:

$c = a/b$ ,  $a$  为矩形板的长,  $b$  为宽。

$$\frac{b}{h} = 10, \quad K^2 = \frac{5}{6}; \quad \frac{\alpha_1^t}{\alpha_1^c} = 0.5, \quad \frac{\alpha_2^t}{\alpha_2^c} = 1.0, \quad \frac{\alpha_1^t}{\alpha_2^t} = 0.1$$

$$T(x, y, z) = \bar{T}_0 \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y + \frac{z}{h} \bar{T}_1 \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y$$

$$\bar{T}_1 = 1.0, \quad \bar{T}_0 = 0$$

## 三、试函数

位移试函数既要满足边界条件(2.11)、(2.12), 又要满足对称性或反对称性条件, 其具体形式如下<sup>[12]</sup>:

$$\begin{aligned} u^0 &= l_1 y(y-b) \left( 2x^3 - 3ax^2 + \frac{1}{2}a^3 \right) + l_2 y^2(y-b)^2 \left( 2x^3 - 3ax^2 + \frac{1}{2}a^3 \right) \\ &\quad + l_3 y(y-b) [x^2(x-a)^3 + x^3(x-a)^2] + \dots \\ v^0 &= m_1 x(x-a) \left( 2y^3 - 3by^2 + \frac{1}{2}b^3 \right) + m_2 x^2(x-a)^2 \left( 2y^3 - 3by^2 + \frac{1}{2}b^3 \right) \\ &\quad + m_3 x(x-a) [y^2(y-b)^3 + y^3(y-b)^2] + \dots \\ w^0 &= n_1 (x^4 - 3ax^3 + a^3x) (y^3 - 2by^2 + b^3y) + n_2 x^3(x-a)^3 (y^4 - 2by^3 + b^3y) \\ &\quad + n_3 (x^4 - 2ax^3 + a^3x) y^3 (y-b)^3 + \dots \\ \psi_y &= p_1 x(x-a) \left( 2y^3 - 3by^2 + \frac{1}{2}b^3 \right) + p_2 x^2(x-a)^2 \left( 2y^3 - 3by^2 + \frac{1}{2}b^3 \right) \\ &\quad + p_3 x(x-a) [y^2(y-b)^3 + y^3(y-b)^2] + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_x = & q_1 y(y-b)(2x^3 - 3ax^2 + \frac{1}{2}a^3) \\ & + q_2 y^2(y-b)^2(2x^3 - 3ax^2 + \frac{1}{2}a^3) \\ & + q_3 y(y-b)[x^2(x-a)^3 + x^3(x-a)^2] + \dots \end{aligned}$$

其中  $l_i, m_i, n_i, p_i, q_i$  为待定系数。

由于试函数满足边界条件及对称性条件，所以只取四分之一块板进行配点计算，配点情况如图2所示。

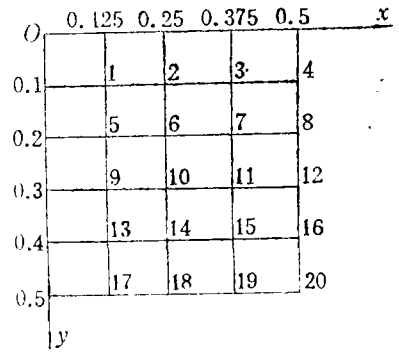


图2 配点情况

### 四、数值结果和比较

文献[10]给出了精确解和有限元解。中性面的精确解为一平面，例如对于aramid-rubber方板，其  $Z_x=0.1198$ ,  $Z_y=-0.03631$ ；而本文结果是一接近平面的曲面（计算迭代精度为1/100）。如果每个试函数只取三个参数时，各配点的  $Z_x$  和  $Z_y$  分别在  $0.1153 \sim 0.12079$  和  $-0.03607 \sim -0.03715$  之间变动，与精确解相比， $Z_x$  的最大误差为3%， $Z_y$  为2%。对于polyester-rubber，其结果更为理想（见表1b）。

表1a aramid-rubber中性面位置

a/b	$Z_x$		$Z_y$	
	精确解	本文解(中心点)	精确解	本文解(中心点)
1.0	0.1198	0.1153	*	-0.03716
1.25	0.1162	0.1186	-0.03201	-0.03220
1.5	0.1032	0.1031	-0.02873	-0.02879
1.75	0.08413	0.08643	-0.02632	-0.02638
2.0	0.06182	0.06395	-0.02457	-0.02460

\* 文献[10]中无此负号，估计有误。

表1b polyester-rubber中性面位置

a/b	$Z_x$		$Z_y$	
	精确解	本文解(中心点)	精确解	本文解(中心点)
0.5	0.2599	0.2599	*	-0.08778
0.75	0.2554	0.2554	-0.08367	-0.08377
1.0	0.2398	0.2397	-0.07965	-0.07963
1.25	0.2119	0.2118	-0.07645	-0.07643
1.5	0.1734	0.1745	-0.07407	-0.07411
1.75	0.1284	0.1304	-0.07241	-0.07248
2.0	0.08152	0.08345	-0.07136	-0.07141

最大无量纲挠度的比较如表2，可以看出，其结果和精确解符合得很好，最大误差仅为1.3%。

表2

最大无量纲挠度( $W$ )的比较

a/b	aramid-rubber			polyester-rubber		
	精 确 解	本 文 解	相 对 误 差	精 确 解	本 文 解	相 对 误 差
0.5	—	—	—	0.09281	0.09368	0.9%
0.75	—	—	—	0.1990	0.2000	0.5%
1.0	0.1710	0.1696	0.8%	0.3090	0.3092	0.06%
1.25	0.2602	0.2638	1.3%	0.3924	0.3918	0.15%
1.5	0.3508	0.3522	0.4%	0.4433	0.4432	0.02%
1.75	0.4363	0.4406	0.9%	0.4719	0.4720	0.02%
2.0	0.5139	0.5180	0.8%	0.4886	0.4883	0.06%

表3

两种材料的弹性性能

性 能 及 单 位	aramid-rubber		polyester-rubber	
	k=1	k=2	k=1	k=2
纵向杨氏模量 $E_{11}$ (Gpa)	3.58	0.0120	0.617	0.0369
横向弹性模量 $E_{22}$ (Gpa)	0.00909	0.0120	0.0080	0.0106
泊松比 $\nu_{12}$	0.416	0.205	0.475	0.185
纵向剪切模量 $G_{12}$ (Gpa)	0.00370	0.00370	0.00262	0.00267
横向沿厚度的剪切模量 $G_{23}$ (Gpa)	0.00290	0.00499	0.00233	0.00475

## 五、结 论

本文应用加权残数法的离散型最小二乘法对双模量复合材料正交迭层矩形厚板的热弯曲问题进行了计算分析, 所得结果均与精确解符合得很好. 证明该法是一种精确度较高、适应性较强的近似分析方法.

## 参 考 文 献

- [1] Clark, S. K., The plane elastic characteristics of cord-rubber laminates, *Textile Research J.*, **33** (1963), 295—313.
- [2] Patel, H. P., J. L. Turner and J. D. Walter, Radial tire cord-rubber composites, *Rubber Chem. and Tech.*, **49** (1976), 1095—1110.
- [3] Ambartsumyan, S. A., The basic equations and relations of the different-modulus theory of elasticity of an anisotropic body, *Mechanics of Solids*, **4** (1969), 48—56.
- [4] Bert, C. W., Models for fibrous composites with different properties in tension and compression, *J. Eng. Mats. and Tech., Trans. ASME*, **99H** (1977), 344—349.
- [5] Bert, C. W., Micromechanics of the different elastic behavior of filamentary composites in tension and compression, in C. W. Bert (ed.), *Mechanics of Bimodulus Materials* (1979), 17—28. ASME Winter Annual Meeting, 2nd—7th Dec. (1979). New York (ASME, New York).
- [6] Ambartsumyan, S. A., The equations of temperature stresses of different-modulus materials, *Mechanics of Solids*, **3** (1968), 58—69.
- [7] Kamiya, N., Thermal stress in a bimodulus thin plate, *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Series des Sciences Techniques*, **24** (1976), 365—372.

- [8] Kamiya, N., Energy formulae of bimodulus material in thermal field, *Fibre Sci. and Tech.*, 11 (1978), 229—235.
- [9] Kamiya, N., Bimodulus thermoelasticity considering temperature-dependent material properties, in C. W. Bert (ed.), *Mechanics of Bimodulus Materials* (1979), 29—37. ASME Winter Annual Meeting, 2nd-7th Dec. (1979), New York (ASME, New York).
- [10] Reddy, J. N., C. W. Bert, Y. S. Hsu and V. S. Reddy, Thermal bending of thick rectangular plates of bimodulus composite materials, *Journal Mechanical Engineering Science*, 6 (1980), 297—304.
- [11] 王迪新、范业立、董万林、周 履, 双模量复合材料正交迭层矩形薄板的弯曲问题, *复合材料学报*, 2, 1 (1985), 23—37.
- [12] 董万林、范业立、王迪新, 双模量复合材料迭层矩形厚板的弯曲, 《第三届全国复合材料学术会议论文集》, 第五册 (1984), 393—400.

## Thermal Bending of Thick Rectangular Plates of Bimodulus Composite Materials

Bai Zung-fang      Wang Di-xin

(Qingdao Chemical Engineering Institute, Qingdao)

### Abstract

Weighted residual solutions are presented for thermal bending of laminated composite plates. The material of each layer is assumed to be elastically and thermoelastically orthotropic and bimodular. The formulations are based on the thermoelastic version of the theory of Whitney-Pagano laminated plate, which includes thickness shear deformations. The results are obtained for deflections and neutral-surface positions and are found to be in good agreement with the closed-form solution.