

文章编号: 1000-0887(2004)09-0967-07

两平行圆盘间或两圆球间存在 二阶流体时的挤压流动*

徐春晖, 黄文彬, 徐 泳

(中国农业大学 理学院, 北京 100083)

(李家春推荐)

摘要: 为了进行湿颗粒群的离散元模拟, 研究两圆球颗粒间二阶流体在挤压流动时的法向粘性力。首先用小参数法对两平行圆盘间二阶流体挤压流动的速度场和正应力分布进行了近似分析, 然后用类似的方法, 分析任意两圆球间二阶流体的挤压流动, 得到了压力分布和法向粘性力的解析解。

关键词: 离散元法; 二阶流体; 挤压流动; 法向粘性力; 小参数法

中图分类号: O347.7; O373 **文献标识码:** A

引 言

挤压流动是根据雷诺润滑理论简化出的一个力学模型, 在许多工业过程研究中得到应用, 例如石油, 化工, 食品工程和制药等领域, 所考虑的流体范围很广, 包括各种非牛顿流体。两圆盘间的挤压流动是最简单和基本的模型, 有大量的研究论文发表。而两圆球间的挤压流动是前者概念的扩展。一个重要的应用是利用存在液桥或处于浸渍状态中的颗粒间的相互作用, 用离散元法模拟湿颗粒群的细观力学行为。这些研究中球体被视为刚体, 流体在其间缓慢流动。

挤压流动研究始于 Stefan^[1] 的两圆盘间牛顿流体的挤压, 其后 Scott^[2] 把两圆盘间挤压流动扩展到幂律流体, 两圆盘间流体挤压流动的问题, 研究的人较多, 如: Davis 和 Frenkel^[3] 对牛顿流体的研究, Smyrniotis 和 Tsamopoulos^[4] 对 Bingham 流体的研究, Sherwood 和 Durban^[5] 对 Herschel Bulkley 流体的研究, Phan Thien 等^[6] 对粘弹性流体的研究等。Laun 等^[7] 研究了存在部分滑移时圆盘间幂律流体的挤压流动。作者在文[8]中研究了存在部分滑移时圆盘间二阶流体的挤压流动。

有关两圆球间流体挤压流动的情况, Adams 和 Edmondson^[9] 研究了两相同球体间幂律流体情形, Lian^[10] 研究了球体颗粒间牛顿流体的挤压力、液桥力并首次用于湿颗粒群的离散元模拟, Rodin^[11] 用渐近法求出任意球体间幂律流体下的挤压力, 徐泳等^[12] 基于 Adams 的分析

* 收稿日期: 2002_10_25; 修订日期: 2004_04_20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10372113)

作者简介: 徐春晖(1971—), 女, 辽宁人, 副教授, 博士(联系人. Tel: + 86_10_62336992; Fax: + 86_10_62336777; E_mail: chunhui@cau.edu.cn)。

求出同一问题的比 Rodin 的渐近解更合理的压力分布和挤压力的解。黄文彬等^[13]研究了存在滑移时两球间的幂律流体的挤压流动。

对牛顿流体, 剪切变形不会产生正应力。但对一些非牛顿流体, 测试发现剪切变形除产生剪应力外, 还会产生第一和第二法向应力差, 因此挤压流动时的压力分布和挤压力会表现出与牛顿流体不同的特点。

二阶流体是以微小偏离牛顿流体本构而考虑时间影响的一种流体。它具有常粘度, 并且第一和第二法向应力差正比于剪切率的平方。它是非牛顿流体微分型本构关系 Rivlin-Ericksen n 阶流体中 $n = 2$ 时的情况。一般认为高分子溶剂用水稀释后是一种弱的粘弹性流体, 其本构关系可采用二阶流体模型。

1 两平行圆盘间的挤压流动

1.1 基本方程

图 1 所示上下两圆盘, 半径为 R , 间隙为 H , $R/H \gg 1$, 两圆盘间介质为二阶流体。下圆盘固定, 上圆盘以速度 V_z 垂直运动。

在柱坐标系下边界条件为

$$\begin{cases} v_r = 0, v_z = 0 & (\text{当 } z = 0 \text{ 时}), \\ v_r = 0, v_z = -V_z & (\text{当 } z = H \text{ 时}), \end{cases} \quad (1)$$

式中, v_r 为径向速度分量, v_z 为垂直速度分量。

对慢速挤压流动, 惯性力可忽略。根据润滑理论, 假设接触区流体压力 p 与 z 无关, 即 $dp/dz = 0$, 柱坐标系下动量方程简化为

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial S_{rr}}{\partial r} + \frac{S_{rr} - S_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} = 0, \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rS_{rz}) + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

式中 S_{rr} , $S_{\varphi\varphi}$ 和 S_{zz} 为法向偏应力分量, S_{rz} 为剪应力分量。

假定流体不可压缩, 则连续方程为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{dv_z}{dz} = 0. \quad (3)$$

二阶流体的本构关系为

$$[S] = \mu_0[A_1] + \beta_1[A_1]^2 + \beta_2[A_2], \quad (4)$$

式中 $[A_1]$ 和 $[A_2]$ 分别为一阶和二阶 Rivlin-Ericksen 张量。 $[S]$ 为偏应力张量, μ_0 , β_1 , β_2 为流体的物质常数, 并且 $\beta_1 = \psi_1 + \psi_2$, $\beta_2 = -\psi_1/2$, 这里 ψ_1 和 ψ_2 分别为第一和第二法向应力差系数。通常认为 $\psi_1 > 0$, $\psi_2 < 0$, 且 ψ_1 要比 ψ_2 大得多, 一般认为 $|\psi_2/\psi_1| < 0.1$, 即 $\beta_1 > 0$, $\beta_2 < 0$ ^[14], 例如对于 2.5% 的 PAA 溶液, 可以把它看作二阶流体, 物质常数为 $\mu \sim 65 \text{ Pa}$, $\beta_1 \sim 32.1 \text{ Pa} \cdot \text{s}^2$, $\beta_2 \sim -19.5 \text{ Pa} \cdot \text{s}^2$ 。当第二法向应力差为零时, 此时的流体成为 Weissenberg 流体^[15]。

1.2 速度场

由连续方程(3)对 r 积分可得

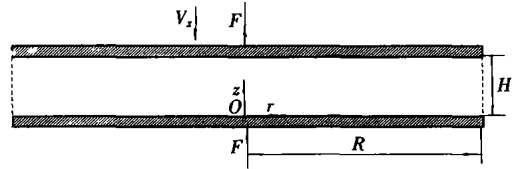


图 1 两平行圆盘间流体挤压流动示意图

$$v_r = -\frac{1}{2}r \frac{dv_z}{dz}$$

假设速度场是定常的,且设 $v_z = -f, v_r = rf'/2$, 综合动量方程(2), 计算可得

$$\mu_0 f \ominus \left[2\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_1 \right] (f'')^2 = m, \tag{5}$$

其中 f 为 z 的未知函数, f' 表示 f 对 z 的微分, m 为未知积分常数

对于粘弹性流体, 可以用一个固有时间 τ_0 来表征, 若把 τ_m 看成是可观察到物质微元的运动状态发生任何显著变化所需的时间, 则 Deborah 数的定义为 $De = \tau_0/\tau_m$. 如果 De 很小, 则流体稍微具有粘弹性, 因此可以用二阶流体来描述; 如果 De 很大, 则二阶流体就不再能够描述粘弹性流体的流动了. 对于二阶流体, $De = (|\beta_2| V_z)/\mu_0 R^{(14)}$. 将 De 看成小参数, 略去二次以上的项, 只保留一次项, 并可设

$$f = f_0 + Df_1, m = m_0 + Dem_1,$$

边界条件也按小参数 De 展开, 对应于 f_1 的只有零边界条件, 即

$$\begin{cases} f_0 = 0, f'_0 = 0, f_1 = 0, f'_1 = 0 & (\text{当 } z = 0 \text{ 时}), \\ f_0 = V_z, f'_0 = 0, f_1 = 0, f'_1 = 0 & (\text{当 } z = H \text{ 时}). \end{cases} \tag{6}$$

对所论问题, 间隙处的流体主要承受剪切变形, 最大的剪切应变率是 $\gamma = \partial v_r/\partial z$, 略去小量后, 将 $[A_1]$ 和 $[A_2]$ 的表达式代入本构关系(4), 分别比较(5) 式中 De 的零次方和一次方, 并结合边界条件(6) 可得速度场为

$$\begin{cases} v_r = -\frac{3rzV_z}{H^3}(z-H) + \frac{3De(4-\beta_1/\beta_2)rV_zR}{5H^6}(5z^4 - 10Hz^3 + 6H^2z^2 - H^3z), \\ v_z = V_z \left[2\left(\frac{z}{H}\right)^3 - 3\left(\frac{z}{H}\right)^2 \right] - \frac{3De(4-\beta_1/\beta_2)V_zR}{5H^6}z^2(2z^3 - 5Hz^2 + 4H^2z - H^3). \end{cases} \tag{7}$$

1.3 压力分布和法向粘性力

求出速度分布后, 将其表达式代入动量方程(2), 可以求得上盘与流体接触面的压力分布为

$$p|_{z=H} = \frac{6\mu_0 R^2 V_z}{H^3} p_0(t, De), \tag{8}$$

其中 $t = r/R$ 为无量纲参数, $p_0(t, De)$ 为压力函数

$$p_0(t, De) = (1-t^2) \left[0.5 - De \frac{R}{H} \left(\frac{1.65\beta_1}{\beta_2} + 2.4 \right) \right] - 1.5De \frac{R}{H} \left[\frac{\beta_1}{\beta_2} + 2 \right].$$

结合二阶流体本构关系(4) 式, 将 α_z 在圆盘与流体的接触面上积分, 可以求出法向粘性力为

$$F = -2\pi \int_0^R \alpha_z \Big|_{z=H} r dr = \frac{6\pi\mu_0 R^4 V_z}{H^3} f_0(De),$$

其中 $f_0(De)$ 为无量纲法向粘性力

$$f_0(De) = 0.25 - 0.075De \frac{R}{H} \left[\frac{\beta_1}{\beta_2} - 4 \right], \tag{9}$$

当 $De = 0$ 时, (9) 式退化为牛顿流体时的结果, 得法向粘性力为 $f_0(De) = 0.25$, 与文[1] 结果相同. 文[14] 中对类似的问题进行了分析, 得到的结论与(9) 式稍有区别

$$f_0(De) = 0.25 - 0.225De \frac{R}{H} \left[\frac{\beta_1}{\beta_2} - 4 \right]. \quad (10)$$

比较(9)和(10)式可以看出,两者形式一致,只是第二项的系数稍有区别,这是由于在计算过程中舍弃的小量不同.另外,(9)式与文[8]中无滑移时的结果一致.

2 两圆球间的挤压流动

2.1 压力分布

图2所示上下两刚性圆球的半径分别为 R_1 和 R_2 , 上球沿连心轴线以相对速度 V_z 缓慢趋近下球. B 是流体液桥半径(积分上限).

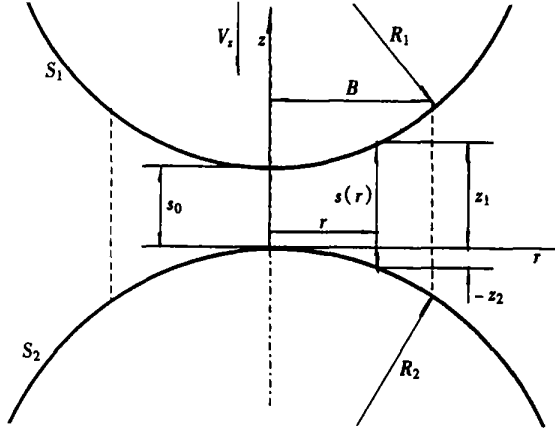


图2 圆球颗粒间流体挤压流动示意图

在图示轴对称坐标系下,接近的两球面 S_1 和 S_2 可近似表达为

$$z = z_1(r) = s_0 + \frac{r^2}{2R_1} \quad (\text{在 } S_1 \text{ 上}),$$

$$z = z_2(r) = -\frac{r^2}{2R_2} \quad (\text{在 } S_2 \text{ 上}),$$

则两球间隙为

$$s(r) = s_0 + \frac{r^2}{2R^*}, \quad (11)$$

式中 z_1, z_2 是两球表面坐标, s_0 是最小间隙, $2(R^*)^{-1} = (R_1)^{-1} + (R_2)^{-1}$, R^* 为谐调平均半径. 球表面上的边界条件为

$$\begin{cases} v_r = 0, v_z = -V_z & (\text{当 } z = z_1(r) \text{ 时}), \\ v_r = 0, v_z = 0 & (\text{当 } z = z_2(r) \text{ 时}). \end{cases} \quad (12)$$

按照前面分析圆盘间挤压流动的方法,我们以小参数法进行分析计算,得到速度场,即

$$\begin{cases} v_z = V_z \left[2 \left(\frac{z - z_2}{s} \right)^3 - 3 \left(\frac{z - z_2}{s} \right)^2 \right] + \frac{3De(\beta_1/\beta_2 - 4)V_z R^*}{5s^6} (z - z_2)^2 \times \\ \quad [2(z - z_2)^3 - 5s(z - z_2)^2 + 4s^2(z - z_2) - s^3], \\ v_r = -\frac{3V_z}{s^3} (z_1 - z)(z - z_2) + \frac{3De(\beta_1/\beta_2 - 4)V_z R^*}{5s^6} \times \\ \quad [5(z - z_2)^4 - 10s(z - z_2)^3 + 6s^2(z + z_2)^2 - s^3(z - z_2)], \end{cases} \quad (13)$$

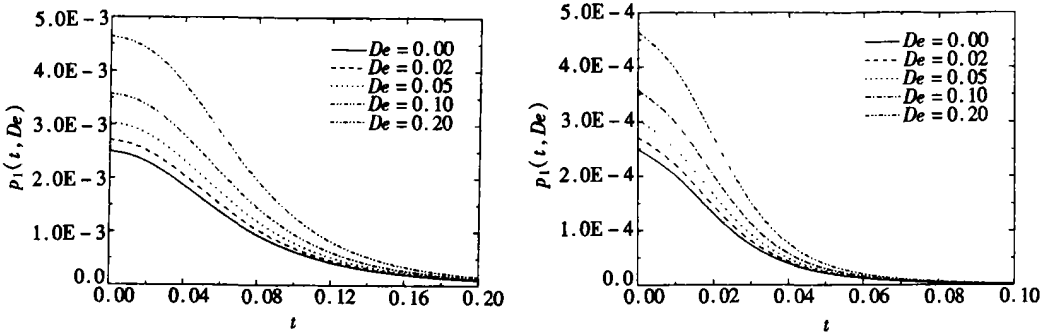
其中 $De = (|\beta_2| V_z) / \mu_0 R^*$ 。将速度场(13)代入动量方程(2), 假设流体在外边界压力 $p(r)|_{r=B}$ 可根据边界条件 $\alpha_z|_{z=z_1, r=B} = 0$ 确定, 定义无量纲参数 $c = B^2 / 2R^* s_0, t = r/B (0 \leq t \leq 1)$ 可得上圆球与流体接触面的压力分布为

$$p(t, De) = \frac{6\mu_0 B^2 V_z}{s_0^3} p_1(t, De), \tag{14}$$

式中 $p_1(t, De)$ 称为压力函数

$$p_1(t, De) = \frac{1}{4c} \left[\frac{1}{(1+ct^2)^2} - \frac{1}{(1+c)^2} \right] - \frac{De}{c} \frac{\beta_1}{\beta_2} \frac{R^*}{s_0} \left[-\frac{2.55}{(1+c)^3} + \frac{2.55}{(1+ct^2)^3} - \frac{1.5}{(1+ct^2)^4} + \frac{1.5}{(1+c)^4} \right] - \frac{0.8De}{c} \frac{R^*}{s_0} \left[\frac{1}{(1+ct^2)^3} - \frac{1}{(1+c)^3} \right] - 1.5De \frac{R^*}{s_0} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} + 2 \right) \frac{1}{(1+c)^4},$$

参数 c 与文[12, 13, 15]中定义相同, 是与两球间隙、球径和流体液桥半径 B (积分上限) 有关的量, 球径和流体半径一定时, 间隙越小, c 越大。当 $B = 2R^*, s_0 = H, c \rightarrow 0$ 时, (14) 式退化为(8)式, 即为两圆盘间挤压流动的结果。而当 $De = 0$ 时, 退化为牛顿流体, 与文[10]结果相同。



(a) $c = 100$ (b) $c = 1000$

图3 压力函数 $p_1(t, De)$ 的分布

图3(a)、(b)分别给出了 $c = 100$ 和 $c = 1000$ 时, 压力函数 $p_1(t, De)$ 随 t 变化的曲线 ($\beta_2/\beta_1 = -0.6, B = 2R^*$)。由二图可知在接触中心处 $p_1(t, De)$ 最大, 且随着 t 的增大压力降低。当 c 一定时, 随着 De 的增加, $p_1(t, De)$ 增加; 对比图3(a)和(b)可知, c 越大, 压力 $p_1(t, De)$ 的分布越向接触中心集中。实际上在离散元模拟时, 挤压力只是在 c 比较大时才比较显著, 例如 $c \geq 100$, 这意味着由压力积分所合成的挤压力对浸渍状态无界的广义积分与积分上限为 $B = 2R^*$ 其规律无明显区别。另外, 积分上限 B 的给定还需考虑润滑理论的条件, 而文中给定的圆球表面几何形状在两球接近的局部区域比较精确, 对外部区域则偏差很大, 因此压力分布高度集中于中心区域的特点可以保证积分得到的挤压力具有足够的精度。

2.2 法向粘性力

结合本构关系(4)式和压力分布(14)式, 将 α_z 在整个圆盘上积分, 可以求出法向粘性力为

$$F = -2\pi \int_0^B \alpha_z|_{z=z_1} r dr = \frac{6\pi\mu_0 V_z B^4}{s_0^3} f(c, De), \tag{15}$$

其中

$$f(c, De) = \frac{1}{4(1+c)^2} - \frac{De}{(1+c)^3} \frac{\beta_1}{\beta_2} \frac{R^*}{s_0} \left[0.525(3+c) - \frac{0.5c^2 + 2c + 1.5}{1+c} \right] - \frac{3De}{(1+c)^3} \frac{R^*}{s_0} \left[0.3(3+c) - \frac{1}{1+c} \right].$$

当 $B = 2R^*$, $s_0 = H$, $c \rightarrow 0$ 时, (14) 式退化为(9) 式, 即为两圆盘间挤压流动的法向粘性力。当 $De = 0$ 时退化为牛顿流体, 这时

$$f(c) = \frac{1}{4(1+c)^2} \quad (16)$$

与牛顿流体时的法向粘性力结果一致(见文[10])。

定义 $b = B/2R^*$, 则无量纲法向粘性力 F_1 为

$$F_1 = \frac{F}{2\mu_0 R^* V_z} = 6\pi b^{-2} c^3 f(c, De) \quad (17)$$

图4 给出了 De 不同时, 无量纲粘性力 F_1 随 c 的变化对数曲线(当 $b = 1$, $\beta_2/\beta_1 = -0.6$ 时)。由图中可见, 当 c 值一定时, F_1 随 De 增加而增大; 当 De 给定时, F_1 随 c 的增加增大, 因此, c 小时, 法向粘性力可以忽略不计。当 $De = 0$ 时, 退化为牛顿流体, 本文解与文[10] 解完全重合。

3 结 论

1) 研究了湿散体接触模型的理论。所求出的两刚性圆球间二阶流体的法向粘性力为解析解, 可以直接用于离散元程序, 进行存在填隙二阶流体的湿颗粒群离散元模拟。

2) 由于二阶流体在有些问题的研究中表现出不稳定性, 所以目前国际上对此模型有一定的争议, 但是由于它的模型相对简单, 所以仍有人研究^[16-17]。

3) 在推导过程中, 根据 Reynolds 润滑理论, 对相关公式进行了一些简化, 得到的是近似解, 此解的使用范围还有待于实验的进一步验证。

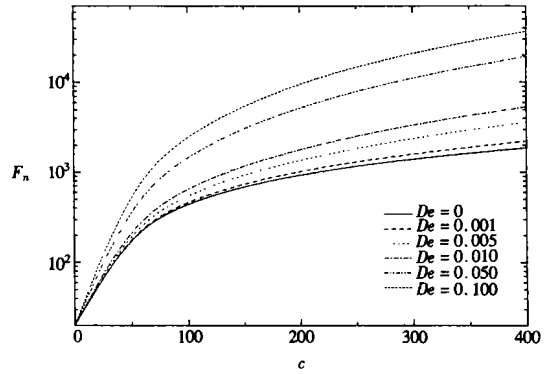


图4 比值 c 对无量纲法向粘性力的影响

[参 考 文 献]

- [1] Bird R B, Armstrong R C, Hassager O. Dynamics of Polymeric Liquids [M]. New York: Wiley, 1977, 19—21.
- [2] Scott J R. Theory and application of the parallel plate viscometer[J]. Trans Inst Rubber Ind, 1931, 7(2): 169—186.
- [3] Davis A M J, Frenkel A L. Cylindrical liquid bridges squeezed between parallel plates: exact Stokes flow solutions and hydrodynamic forces[J]. Phys Fluids A, 1992, 4(6): 1105—1109.
- [4] Smyrnaios D N, Tsamopoulos J A. Squeeze flow of Bingham plastics[J]. J Non-Newtonian Fluid Mech, 2001, 100(19): 165—190.
- [5] Sherwood J D, Durban D. Squeeze flow of a Herschel-Bulkley fluid[J]. J Non-Newtonian Fluid Mech, 1998, 77(1/2): 115—121.
- [6] Phan-Thien N, Sugeng F, Tanner R I. The squeeze film flow of a viscoelastic fluid[J]. J Non-Newtonian Fluid Mech, 1987, 24(1): 97—119.

- [7] Laun H M, Rady M, Hassager O. Analytical solutions for squeeze flow with partial wall slip[J]. *J Non-Newtonian Fluid Mech*, 1999, **81**(1/2): 1—15.
- [8] XU Chun_hui, HUANG Wen_bin, XU Yong. Squeeze flow of a second_order fluid between two parallel disks with wall slip[J]. *Transactions of the CSAE*, 2002, **18**(5): 19—22.
- [9] Adams M J, Edmondson B. Forces between particles in continuous and discrete liquid media[A]. In: Briscoe B J, Adams M J Eds. *Tribology in Particulate Technology*, Adam Hilger [C]. Bristol, 1987, 154—172.
- [10] Lian G, Thornton C, Adams M J. A theoretical study of the liquid bridge forces between two rigid spherical bodies[J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 1993, **161**: 138—147.
- [11] Rodin G J. Squeeze film between two spheres in a power_law fluid[J]. *Non-Newtonian Fluid Mech*, 1996, **63**(2/3): 141—152.
- [12] 徐泳, 黄文彬, 李红艳. 圆球颗粒间有幂率流体时挤压流动的法向粘性力[J]. *农业工程学报*, 2002, **18**(2): 1—4.
- [13] 黄文彬, 徐泳, 练国平, 等. 存在滑移时两球间的幂率流体挤压流动[J]. *应用数学和力学*, 2002, **23**(7): 722—728.
- [14] 陈文芳. 非牛顿流体力学[M]. 北京: 科学出版社, 1984.
- [15] Leal L G. The slow motion of slender rod-like particles in a second order fluid[J]. *J Fluid Mech*, 1975, **69**(2): 305—337.
- [16] Giovanni P Galdi. Slow steady fall of rigid bodies in second_order fluid [J]. *Non-Newtonian Fluid Mech*, 2001, **96**(1/2): 373—381.
- [17] Howard H Hu, Daniel D Joseph. Lift on sphere near a plane wall in a second_order fluid[J]. *Non-Newtonian Fluid Mech*, 1999, **88**(1/2): 173—184.

Squeeze Flow of a Second_Order Fluid Between Two Parallel Disks or Two Spheres

XU Chun_hui, HUANG Wen_bin, XU Yong

(College of Science, China Agricultural University, Beijing 100083, P. R. China)

Abstract: The normal viscous force of squeeze flow between two arbitrary rigid spheres with an interstitial second_order fluid was studied for modeling wet granular materials using the discrete element method. Based on the Reynolds' lubrication theory, the small parameter method was introduced to approximately analyze velocity field and stress distribution between the two disks. Then a similar procedure was carried out for analyzing the normal interaction between two nearly touching, arbitrary rigid spheres to obtain the pressure distribution and the resulting squeeze force. It has been proved that the solutions can be reduced to the case of a Newtonian fluid when the non-Newtonian terms are neglected.

Key words: discrete element method; second_order fluid; squeeze flow; normal viscous force; small parameter method