应用数学和力学，第7卷第7期（1986年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

板和扁壳大挠度问题摄动参数的最小二乘法选择*

陈 山 林

（重庆建筑工程学院，1984年10月5日收到）

摘 要

本文提出了在用摄动法求解板和扁壳轴对称大挠度问题时，确定摄动参数的最小二乘方法。计算了圆板情形的算例，与准确解和其它摄动解做了比较。结果表明，本文解答较其它摄动解有更高的精确度。

一、前 言

摄动法是求解板和扁壳大挠度问题的一种有效近似方法。摄动参数的合理选择是摄动理论的一个基本问题。作者们选用过诸如荷载（Vincent,1931）[1]、挠度（钱伟长，1947）[2]、泊松比（Schmidt 和 DaDeppo，1974）[3]等各种摄动参数；周焕文（1981）[4]事实上采用了中心转角的极限值$\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{dw}{dr}\Big|_{r=0}\right)$作为摄动参数。陈山林和光积昌(1981)[5]对与荷载、挠度、转角、内力有关的各种摄动参数进行了研究；并对一般参数情形，用变分原理求得了解答；这是探讨摄动参数选择问题的一个有益尝试。

本文提出了在用摄动法求解板和扁壳轴对称大挠度问题时，合理选择摄动参数的一种一般方法。该方法是基于问题的积分方程，用方程平方残数的极值条件来确定摄动参数，也即是加权残数法(MWR)的最小二乘方法。计算了圆板问题的算例，并同准确解（幂级数解）和其它摄动解做了比较。

二、基 本 方 程

引入无量纲量

$$\left.\begin{aligned}&\rho=r/a,\ y=[12(1-\nu^2)]^{1/2}w/h,\ \theta=dy/d\rho\\&s=-12(1-\nu^2)a^2\rho N_r/(Eh^3)\\&k=[12(1-\nu^2)]^{1/2}a\varphi_m/h\\&p=[12(1-\nu^2)]^{3/2}a^4p_m/(Eh^4)\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

* 钱伟长推荐.

式中：r 为向径，a 为底面半径，w 为挠度，h 为厚度，E、ν 为弹性常数，N_r 为径向薄膜力，φ_m、p_m 为壳体形状和荷载特征参数。则弹性扁薄壳轴对称大挠度问题的基本方程可记为[6,7]

$$
\left.\begin{aligned}
&\rho\frac{d}{d\rho}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\theta)=pp_0(\rho)-k\varphi(\rho)s-s\theta\\
&\rho\frac{d}{d\rho}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho s)=k\varphi(\rho)\theta+\frac{1}{2}\theta^2
\end{aligned}\right\}\tag{2.2}
$$

式中，$p_0(\rho)$为荷载分布函数，$\varphi(\rho)$为壳体形状函数。

仅考虑中心光滑情形，边界条件为

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{当 }\rho=0\text{时，}\quad \theta=0,\ s=0\\
&\text{当 }\rho=1\text{时，}\quad \frac{d\theta}{d\rho}+\nu_1\theta=0,\quad \frac{ds}{d\rho}-\nu_2 s=0
\end{aligned}\right\}\tag{2.3}
$$

式中，ν_1、ν_2 与边界约束有关，对常见情形，取值为：

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{固定夹紧：}\nu_1=\infty,\ \nu_2=\nu\\
&\text{可移夹紧：}\nu_1=\infty,\ \nu_2=\infty\\
&\text{可移铰支：}\nu_1=\nu,\ \nu_2=\infty\\
&\text{固定铰支：}\nu_1=\nu,\ \nu_2=\nu
\end{aligned}\right\}\tag{2.4}
$$

直接积分(2.2)式，并用(2.3)确定积分常数可得与边值问题(2.2)、(2.3)等价的积分方程组

$$
\left.\begin{aligned}
&\theta=p\theta_0+\int_0^1 G(\rho,\xi)(k\varphi+\theta)s\,d\xi\\
&s=-\int_0^1 K(\rho,\xi)\left(k\varphi+\frac{\theta}{2}\right)\theta\,d\xi
\end{aligned}\right\}\tag{2.5}
$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
&\theta_0=\int_0^1 G(\rho,\xi)p_0(\xi)\,d\xi\\
&G(\rho,\xi)=\begin{cases}\rho\xi(\xi^{-2}+\lambda_1)/2 & (\rho\leqslant\xi\leqslant1)\\ \rho\xi(\rho^{-2}+\lambda_1)/2 & (0\leqslant\xi\leqslant\rho)\end{cases}\\
&K(\rho,\xi)=\begin{cases}\rho\xi(\xi^{-2}+\lambda_2)/2 & (\rho\leqslant\xi\leqslant1)\\ \rho\xi(\rho^{-2}+\lambda_2)/2 & (0\leqslant\xi\leqslant\rho)\end{cases}\\
&\lambda_1=\frac{1-\nu_1}{1+\nu_1},\quad \lambda_2=\frac{1+\nu_2}{1-\nu_2}
\end{aligned}\right\}\tag{2.6}
$$

上式中，θ_0 即圆平板小挠度解。当 $k=0$ 时，(2.5)式即为圆板大挠度问题积分方程。

三、一般参数摄动解

取任意摄动参数 ε，设

$$p=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\varepsilon^n,\quad \theta=\sum_{n=1}^{N}\bar{\theta}_n\varepsilon^n,\quad s=\sum_{n=1}^{N}\bar{s}_n\varepsilon^n \tag{3.1}$$

式中，N为摄动次数，α_n为待定系数。将(3.1)代入(2.5)式，比较ε同次幂系数，可得

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{\theta}_1=\alpha_1\theta_0+k\int_0^1 G\varphi\bar{s}_1d\xi\\
&\bar{s}_1=-k\int_0^1 K\varphi\bar{\theta}_1d\xi\\
&\bar{\theta}_n=\alpha_n\theta_0+k\int_0^1 G\varphi\bar{s}_nd\xi+\int_0^1 G\bar{F}_nd\xi\\
&\bar{s}_n=-k\int_0^1 K\varphi\bar{\theta}_nd\xi-\int_0^1 K\bar{f}_nd\xi
\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

$$(n=2,3,\cdots,N)$$

式中，$\bar{F}_n=\sum\limits_{m=1}^{n-1}\bar{s}_m\bar{\theta}_{n-m}$，$\bar{f}_n=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{m=1}^{n-1}\bar{\theta}_m\bar{\theta}_{n-m}$。

(3.2)式组成逐次迭代计算$\bar{\theta}_n$和$\bar{s}_n$的线性积分方程组，便于数值计算。其中待定系数α_n可以由对ε的具体选择来确定，如同文[5]对板的情形所阐明的那样。本文关心的是$\varepsilon=p$的情形，此时，由(3.1)可得

$$\alpha_1=1,\ \alpha_n=0\qquad(n=2,3,\cdots,N)$$

记此时的解（3.1)、(3.2）为

$$\theta=\sum_{n=1}^{N}\theta_np^n,\quad s=\sum_{n=1}^{N}s_np^n \tag{3.3}$$

以及

$$\left.\begin{aligned}
&\theta_1=\theta_0+k\int_0^1 G\varphi s_1d\xi\\
&s_1=-k\int_0^1 K\varphi\theta_1d\xi\\
&\theta_n=k\int_0^1 G\varphi s_nd\xi+\int_0^1 GF_nd\xi\\
&s_n=-k\int_0^1 K\varphi\theta_nd\xi-\int_0^1 Kf_nd\xi\quad(n=,2,3\cdots,N)
\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

式中，$F_n=\sum\limits_{m=1}^{n-1}s_m\theta_{n-m}$，$f_n=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{m=1}^{n-1}\theta_m\theta_{n-m}$。由(3.3)、(3.4)给出的$\theta_n$、$s_n$不包含待定系数，可以逐级迭代计算得到。

通过对ε具体选择确定α_n的方法，是简便和实用的，但不同的ε选择给出的结果可能很不相同。因此，有必要寻找一种一般选择ε、即确定α_n的方法。

为此，我们将一般参数摄动解(3.2)的$\bar{\theta}_n$、$\bar{s}_n$用α_n和θ_n、s_n来表达。这种表示胡海昌[8]称之为倒置展开。

将(3.1)第一式代入(3.3)，并与(3.1)第二、三式比较，可得

$$\begin{bmatrix}\bar{\theta}_n\\ \bar{s}_n\end{bmatrix}=\alpha_n\begin{bmatrix}\theta_1\\ s_1\end{bmatrix}+\sum_{i+j=n}\alpha_i\alpha_j\begin{bmatrix}\theta_2\\ s_2\end{bmatrix}+\sum_{i+j+l=n}\alpha_i\alpha_j\alpha_l\begin{bmatrix}\theta_3\\ s_3\end{bmatrix}+\cdots+\alpha_1^n\begin{bmatrix}\theta_n\\ s_n\end{bmatrix} \tag{3.5}$$

式中，$n=1,2,3,\cdots,N$。

引入变换

$$\beta_n=\alpha_n/\alpha_1^n \qquad (n=1,2,\cdots,N) \tag{3.6}$$

代入(3.5)，可得

$$\begin{bmatrix}\bar{\theta}_n\\ \\ \bar{s}_n\end{bmatrix}=\left\{\beta_n\begin{bmatrix}\theta_1\\ \\ s_1\end{bmatrix}+\sum_{i+j=n}\beta_i\beta_j\begin{bmatrix}\theta_2\\ \\ s_2\end{bmatrix}+\sum_{i+j+l=n}\beta_i\beta_j\beta_l\begin{bmatrix}\theta_3\\ \\ s_3\end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix}\theta_n\\ \\ s_n\end{bmatrix}\right\}\alpha_1^n \tag{3.7}$$

将(3.6)、(3.7)代入(3.1)，注意到$\beta_1=1$，如引入$\epsilon=\alpha_1\varepsilon$为新的摄动参数，并以$\beta_n$为新的待定常数，则我们只有$N-1$个待定常数$\beta_2$，$\beta_3$，…，$\beta_N$。这就证明了，对于$N$次摄动解，只需确定$N-1$个待定常数。

以下讨论中，我们将(3.1)的摄动参数ε看做ϵ，即取$\alpha_1=1$。如此规定的一般参数$\varepsilon(\epsilon)$可以看做是一种标准化参数。

四、残数和α_n的确定

摄动解(3.1)只是方程组(2.5)的近似解，估计它的近似程度的习惯做法是比较相邻两次渐近解的靠近程度。借用加权残数法(MWR)的概念，我们直接用方程的残数作为摄动解(3.1)的近似程度的估计．引入(2.5)的残数

$$\left.\begin{aligned}R_\theta&=\theta-p\theta_0-\int_0^1G(k\varphi+\theta)sd\xi\\ R_s&=s+\int_0^1K\left(k\varphi+\frac{1}{2}\theta\right)\theta d\xi\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

当p,θ,s用(3.1)式代入时，残数R_θ、R_s的大小反映了该摄动解的近似程度。文[9]曾以R_θ、R_s的一种平均值研究了圆板大挠度钱伟长解的渐近特性。

将(2.5)第二式代入第一式，可得

$$\theta=p\theta_0+\int_0^1G(k\varphi+\theta)\left[-\int_0^1K\left(k\varphi+\frac{\theta}{2}\right)\theta d\eta\right]d\xi \tag{4.2}$$

定义残数

$$R=\theta-p\theta_0-\int_0^1G(k\varphi+\theta)\left[-\int_0^1K\left(k\varphi+\frac{\theta}{2}\right)\theta d\eta\right]d\xi \tag{4.3}$$

将上式用(4.1)式的R_θ、R_s来表达，可得

$$R=\theta-p\theta_0-\int_0^1G(k\varphi+\theta)(s-R_s)d\xi$$

即是

$$R=R_\theta+\int_0^1G(k\varphi+\theta)R_sd\xi \tag{4.4}$$

这样，我们就得到联系R_θ、R_s的一种统一形式的残数。我们将以R做为(3.1)的误差估计。

将(3.1)代入(4.1)，注意到(3.2)，可得

$$R_\theta=-\sum_{n=1}^N\int_0^1GF_n^*d\xi\varepsilon^{n+N},\quad R_s=\sum_{n=1}^N\int_0^1kf_n^*d\xi\varepsilon^{n+N} \tag{4.5}$$

式中

$$F_n^*=\sum_{m=n}^{N}\bar{s}_m\bar{\theta}_{N+n-m},\quad f_n^*=\frac{1}{2}\sum_{m=n}^{N}\bar{\theta}_m\bar{\theta}_{N+n-m} \tag{4.6}$$

将(4.5)代入(4.4)，计算后得到

$$R=\varepsilon^N\sum_{n=1}^{N}\left\{-\int_0^1 GF_n^*d\xi+k\int_0^1 G\varphi\left[\int_0^1 Kf_n^*d\eta\right]d\xi\right\}\varepsilon^n$$

$$+\varepsilon^N\sum_{n=2}^{2N}\left\{\int_0^1 G\left(\sum_{i+j=n}\bar{\theta}_i\int_0^1 Kf_j^*d\eta\right)d\xi\right\}\varepsilon^n \tag{4.7}$$

略去(4.7)式中ε高次幂项，可得

$$R=\varepsilon^{N+1}\left\{-\int_0^1 GF_1^*d\xi+k\int_0^1 G\varphi\left(\int_0^1 Kf_1^*d\eta\right)d\xi\right\}+O(\varepsilon^{N+2}) \tag{4.8}$$

在渐近意义上，可取(4.8)式作为(3.1)的误差估计。

引入平方残数

$$\bar{R}=\int_0^1 R^2d\rho \tag{4.9}$$

我们假定，合理的摄动参数可以由$\bar{R}$的极值条件给出，即方程

$$\frac{\partial\bar{R}}{\partial\alpha_n}=2\int_0^1 R\frac{\partial R}{\partial\alpha_n}d\rho=0\qquad(n=2,3,\cdots,N) \tag{4.10}$$

上式也可看做是MWR方法中消除残数的最小二乘法条件[10]。

由(4.6)和(3.5)可以算得：

当$N=3$时，

$$F_1^*=(2\alpha_3+\alpha_2^2)\theta_1s_1+3\alpha_2(\theta_1s_2+\theta_2s_1)+\theta_1s_3+\theta_3s_1+\theta_2s_2$$

$$f_1^*=\left(\alpha_3+\frac{1}{2}\alpha_2^2\right)\theta_1^2+3\alpha_2\theta_1\theta_2+\theta_1\theta_3+\frac{1}{2}\theta_2^2$$

当$N=4$时，

$$F_1^*=2(\alpha_4+\alpha_2\alpha_3)\theta_1s_1+3(\alpha_3+\alpha_2^2)(\theta_1s_2+\theta_2s_1)+4\alpha_2(\theta_1s_3+\theta_3s_1+\theta_2s_2)$$
$$+\theta_1s_4+\theta_4s_1+\theta_2s_3+\theta_3s_2$$

$$f_1^*=(a_4+a_2a_3)\theta_1^2+3(a_3+a_2)\theta_1\theta_2+4a_2\left(\theta_1\theta_3+\frac{1}{2}\theta_2^2\right)+\theta_1\theta_4+\theta_2\theta_3$$

当$N=5$时，

$$F_1^*=(2a_5+2a_2a_4+a_3^2)\theta_1s_1+(3a_4+6a_2a_3+a_2^3)(\theta_1s_2+\theta_2s_1)$$
$$+(4a_3+6a_2^3)(\theta_1s_3+\theta_3s_1+\theta_2s_2)+5a_2(\theta_1s_4+\theta_4s_1+\theta_2s_3+\theta_3s_2)$$
$$+\theta_1s_5+\theta_5s_1+\theta_2s_4+\theta_4s_2+\theta_3s_3$$

$$f_1^*=\left(a_5+a_2a_4+\frac{1}{2}\alpha_3^2\right)\theta_1^2+(3a_4+6a_2\alpha_3+a_2^3)\theta_1\theta_2+(2a_3+3a_2^2)(2\theta_1\theta_3$$
$$+\theta_2^2)+5\alpha_2(\theta_1\theta_4+\theta_2\theta_3)+\theta_1\theta_5+\theta_2\theta_4+\frac{1}{2}\theta_3^2 \tag{4.11}$$

....

对于给定的摄动次数N，由(4.8)、(4.11)算出R，代入(4.10)，即可得到确定a_n的非

线性代数方程组。可以看出，这个方程组形式与 N 取值有关，从而 α_n 与 N 有关。这是本文参数选择方法的一个特点。(4.10)式中 R 可按(4.8)式取 ε 的最低次幂计算；如果 ε^{N+1} 项恒为零（在板的情形有时如此），则可取 ε^{N+2} 项计算 R。因此，我们只是在渐近意义上使用条件(4.10)的。

五、算　例

我们以均布荷载 q 作用下的圆板大挠度问题作为算例，考虑固定夹紧和可移夹紧两种边界条件。这是板和扁壳大挠度问题中最简单，但是有基本意义的问题。

此时，应有 $R=0$，$\lambda_1=-1$，取摄动次数 $N=4$，解(3.1)式为

$$p=\varepsilon+\alpha_3\varepsilon^3,\quad \theta=\bar{\theta}_1\varepsilon+\bar{\theta}_3\varepsilon^3,\quad s=\bar{s}_2\varepsilon^2+\bar{s}_4\varepsilon^4 \tag{5.1}$$

由(3.5)式，有

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\theta}_1=\theta_1, && \bar{\theta}_3=\alpha_3\theta_1+\theta_3\\ &\bar{s}_2=s_2, && \bar{s}_4=2\alpha_3s_2+s_4\end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

由(3.4)可算得

$$\left.\begin{aligned}\theta_1&=4(\rho^3-\rho)\\ \theta_3&=-\frac{1}{180}\rho^{11}+\frac{1}{24}\rho^9-\frac{5}{36}\rho^7+\frac{10+\lambda_2}{36}\rho^5-\frac{4+\lambda_2}{12}\rho^3+\frac{57+20\lambda_2}{360}\rho\\ s_2&=\frac{1}{6}\rho^7-\frac{2}{3}\rho^5+\rho^3-\frac{4+\lambda_2}{6}\rho\\ s_4&=-\frac{1}{10080}\rho^{15}+\frac{17}{15120}\rho^{13}-\frac{13}{2160}\rho^{11}+\frac{15+\lambda_2}{720}\rho^9-\frac{11+2\lambda_2}{216}\rho^7\\ &\quad+\frac{177+50\lambda_2}{2160}\rho^5-\frac{57+20\lambda_2}{720}\rho^3+\frac{1242+755\lambda_2+112\lambda_2^2}{30240}\rho\end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

在计算上述各式时，已取

$$p_m=q/64,\qquad p_0(\rho)=32\rho^2 \tag{5.4}$$

其余各量 α_2、α_4，θ_2、θ_4，s_1、s_3，$\bar{\theta}_2$、$\bar{\theta}_4$，$\bar{s}_1$、$\bar{s}_4$ 均为零。

由(4.11)可得，当 $N=4$ 时

$$F_1^*=3\alpha_3\theta_1s_2+\theta_1s_4+\theta_3s_2,\qquad f_1^*=0 \tag{5.5}$$

将(5.5)代入(4.8)，再利用(4.10)，可以方便地算得

$$\alpha_3=-\frac{\int_0^1(J_{14}+J_{32})J_{12}d\rho}{3\int_0^1J_{12}^2d\rho} \tag{5.6}$$

式中，$J_{ij}=\int_0^1G\theta_is_jd\xi$。计算出 J_{ij}，代入(5.6)，可以算得

$$\alpha_3=\frac{866316759+1030978816\lambda_2+413315676\lambda_2^2+55826470\lambda_2^3}{30338813790+24474968265\lambda_2+4970338305\lambda_2^2} \tag{5.7}$$

式中，λ_2 已由(2.6)式给出。

中心挠度

$$y_0=\int_1^0\theta\,d\rho \tag{5.8}$$

由(5.1)～(5.3)和(5.8)式，我们可得弹性特征

$$p=\varepsilon+\alpha_3\varepsilon^3,\qquad y_0=\varepsilon+(\alpha_3-\alpha_0)\varepsilon^3 \tag{5.9}$$

式中

$$\alpha_0=(123+50\lambda_2)/4320 \tag{5.10}$$

表 1　　各种摄动解的 α_3 值　($\nu=0.3$)

摄动参数名称	ε	α_3	α_3/α_0	
			固定夹紧	可移夹紧
中心挠度[2]	y_0	$\frac{123+50\lambda_2}{4320}$	1	1
均方根转角[5]	$\left[\int_0^1\theta^2d\rho\right]^{1/2}$	$\frac{8718+3575\lambda_2}{308880}$	0.9950	0.9853
一般参数，变分原理解[5]	ϵ	$\frac{10583+8754\lambda_2+1848\lambda_2^2}{23760(16+7\lambda_2)}$	0.9642	1.0200
一般参数，本文结果	ϵ	(5·7)式	0.9828	1.0532
转角中心极限值[4]	$\left(\frac{\theta}{\rho}\right)_{\rho=0}$	$\frac{77-37\nu}{1440(1-\nu)}$	1.3083	—
荷载[1]	p	0	0	0

表 2　　弹性特征结果比较　($\nu=0.3$，固定夹紧)

$\frac{4\sqrt{3}}{9}p$	w_0/h				
	准确解[11]	中心挠度解	均方根转角解	变分原理解	本文结果
0.5	0.192647	0.192651	0.192650	0.192643	0.192648
1.0	0.366205	0.366291	0.366267	0.366117	0.366208
1.5	0.514693	0.515091	0.514979	0.514272	0.514701
2.0	0.640904	0.641899	0.641611	0.639783	0.640894
2.5	0.749497	0.751339	0.750787	0.747281	0.749414
3.0	0.844428	0.847351	0.846459	0.840788	0.844241
4.0	1.004375	1.010095	1.008345	0.997182	1.003987
5.0	1.136229	1.145464	1.142680	1.124889	1.135739
6.0	1.248783	1.261986	1.258042	1.232803	1.248201
7.0	1.347706	1.364758	1.359560	1.326268	1.346586
8.0	1.436564	1.457043	1.450520	1.408707	1.434231
9.0	1.517735	1.541052	1.5331466	1.482443	1.513400
10.0	1.592787	1.618349	1.609014	1.549119	1.585694
与准确解的误差(%)		1.60	1.02	−2.74	−0.46

在表 1 中给出了各种摄动结果 α_3 值的比较，取 $\nu=0.3$。在表 2 中给出了弹性特征(5.9)计算结果的比较，边界固定夹紧，$\nu=0.3$。表 2 中准确解（幂级数解）取自文[11]，其最大挠度范围为 $w_0/h\approx1.6$；当 $w_0/h<1$时，此解与S. Way[12]结果一致。表 2 最后一行给出了各种摄动结果与准确解比较的百分误差，按最大挠度时 ($w_0/h\approx1.6$) 计算，这也是表中数

据的最大误差。

表1表明，本文结果与中心挠度解（钱伟长解）、均方根转角解和变分原理解是接近的。表2表明，与准确解相比，这几种摄动解都有良好的精确度，其中以本文结果精度较高。当 $w_0/h\approx1.6$ 时，本文结果与准确解相差仅为0.45%。这表明，本文的摄动参数选择方法是合理的。

六、结　语

本文方法可以看做是摄动法和加权残数法的结合。从摄动法角度说，加权残数法（本文是最小二乘法）提供了选择摄动参数的一种一般方法。另一方面，(3.4)式的函数系列 θ_n、s_n 相当于试函数，而(3.5)式给出了解关于这个试函数系列和待定系数 a_n 的展开；因此，就加权残数法的角度而言，摄动法提供了自动形成试函数系列及其展开的一种手段。这是本文工作对于加权残数方法的一点理论意义。

本文工作得到钱伟长教授的指导，作者借此谨表谢意。

参 考 文 献

[1] Vincent, J. J., *Phil. Mag.*, 12 (1931), 185—196.
[2] Chien Wei-zang, *Chinese Journal of Physics*, 7 (1947), 102—113.
[3] Schmidt, R. and D. A. DaDeppo., *Int. J. of Non-Linear Mech.*, 9, 5 (1974), 407—419.
[4] 周焕文, 应用数学和力学, 2,5 (1981), 475—484.
[5] 陈山林、光积昌, 应用数学和力学, 2, 1 (1981), 131—144.
[6] Феодосьев В. И., 《精密仪器弹性元件的理论与计算》, 科学出版社, 北京(1963).
[7] 陈山林, 应用数学和力学, 1,2 (1980), 261—272.
[8] 胡海昌, 物理学报, 10, 4 (1954), 383—393.
[9] 陈山林, 应用数学和力学, 3, 4 (1982), 513—518.
[10] 徐次达, 力学与实践, 2, 4 (1980), 12—20.
[11] 邹定祺、陈山林、王玳瑜, 重庆建筑工程学院学报, 3 (1985).
[12] Way. S., ASME Trans., *Appl. Mech.*, 56 (1934), 627—636.

Determination of the Perturbation Parameter in Larger Deflection of Plates and Shallow Shells by Means of the Least Squares Method

Chen Shan-lin
(Chongqing Institute of Architecture and Engineering, Chongqing)

Abstract

In this paper, the least squares method of determination of the perturbation parameter is presented when the perturbation technique is used in the solution of large deflection of axisymmetrical plates and shallow shells. The examples of circular plates are calculated and compared with the exact solution and other perturbation solutions. The results show the best agreement with the exact solution among those perturbation solutions.