应用数学和力学，第7卷第7期（1986年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

二相平面渗流问题的不变流管解法及其理论分析

陈钟祥　袁益让　姜礼尚

（石油勘探开发科学研究院）（山东大学）（北京大学）

（周光坰推荐，1984年7月1日收到）

摘　要

本文总结和改进了工程上广泛应用的求解二相平面渗流问题的不变流管近似方法．对其核心部份即给定压差时一维变截面流管中的二相驱替问题作了全面的考察，证明了解的存在唯一性，给出了准确解、数值解及其收敛性和稳定性分析．

对油藏工程中极为重要的二相平面渗流问题，于五十年代末和六十年代初在苏、美曾先后提出不变流管近似解法[1],[2]．这种方法以后又被发展和改进为变动流管法[3],[4]．尽管目前已有了更完善的油藏数值模拟方法，但是在实用上不变流管方法仍居重要地位[5]，而且这种做法还正在被推广到三次采油的计算方法，本文总结、改进和论证了这种方法．

一、不变流管近似解法的基本思路

在忽略毛细管压力时，二种不互溶和不可压缩的液体的平面渗流由下列方程组描述[6]：

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{w}_w &= -\frac{kk_{rw}(s)}{\mu_w}\operatorname{grad}p \\ \mathbf{w}_o &= -\frac{kk_{ro}(s)}{\mu_o}\operatorname{grad}p \\ \operatorname{div}\mathbf{w}_w &+ \phi\frac{\partial s}{\partial t} = 0 \\ \operatorname{div}\mathbf{w}_o &- \phi\frac{\partial s}{\partial t} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

其中 $\mathbf{w}_w$、$\mathbf{w}_o$ 分别是水和油的渗流速度，p是压力，s是含水饱和度，k是地层的渗透率，k_{rw}、k_{ro}分别是水和油的相对渗透率，ϕ是地层的孔隙度，μ_w、μ_o 分别是水和油的粘度，这一非线性方程组一般只能利用电子计算机求数值解．不变流管近似解法的基本思路是：假设在初始时刻（油层中饱和度的初始分布为已知）在外压下形成的流线在整个开发过程中始终保持不

变，即流场为许多形状不变的流管所分割，每一条形状不变的流管中的流动可以近似地看作是一维的而可以应用熟知的Buckley-Leverett理论[7]，所有流管中的动态和开发指标的迭加便组成了整个油层的动态和各开发指标。这样，在得到初始时刻的流场以后，问题便归结为在两端给定压力差的情况下求解一维刚性变截面流管中的二相驱替。

二、一维变截面流管中二相驱替问题的解的存在唯一性和准确解

设有一条一维刚性变截面多孔介质流管，初始时的含水饱和度 $s(x,0)$ 为单调下降函数 $s_0(x)$，$s_0'(x)\leqslant 0$，在 $t=0$ 时起在注入端压力 $p_0(t)$ 和采出端压力 $p(t)$ 的作用下注水采油。这时问题的数学模型为[8]：

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{-Q(t)}{k(x)A(x)\left[\frac{k_{rw}(s)}{\mu_w}+\frac{k_{ro}(s)}{\mu_o}\right]} \tag{2.1a}$$

$$Q(t)f'(s)\frac{\partial s}{\partial x}+\phi(x)A(x)\frac{\partial s}{\partial t}=0 \tag{2.1b}$$

$$p(0,t)=p_0(t) \tag{2.1c}$$

$$p(L,t)=p_L(t) \tag{2.1d}$$

$$s(x,0)=s_0(x) \tag{2.1e}$$

$$s(0,t)=1-s_{or} \tag{2.1f}$$

其中 x 是沿着流管中心线的坐标，注入端的坐标为零，采出端的坐标为L；$A(x)$是流管的截面积；$Q(t)$是流管的总流量；s_{or}是残余油饱和度；

$$f(s)=\frac{Q_w(x,t)}{Q(t)}=\frac{k_{rw}(s)}{k_{rw}(s)+\frac{\mu_w}{\mu_o}k_{ro}(s)}$$

是每个截面上水的流量在总流量中所占的分数即含水率。

令

$$V=\int_0^t Q(t)dt \tag{2.2}$$

$$\Omega=\int_0^x \phi(x)A(x)dx \tag{2.3}$$

则式(2.1b)，(2.1e)，(2.1f)可改写为

$$f'(s)\frac{\partial s}{\partial \Omega}+\frac{\partial s}{\partial V}=0 \tag{2.4a}$$

$$s(\Omega,0)=s_0(\Omega) \tag{2.4b}$$

$$s(0,V)=1-s_{or} \tag{2.4c}$$

这就是 Buckley-Leverett 问题。

方程(2.4a)的特征线方程为

$$\frac{d\Omega}{dV}=f'(s) \tag{2.5}$$

而沿着特征线有 $ds/dV=0$。

这样，通过 $(\alpha,0)$ 的特征线为

$$\Omega-\alpha=f'[s_0(\alpha)]V \tag{2.6}$$

在特征线上 $s[\Omega_\alpha(V),V]=s_0(\alpha)$

于是，消去α，解可表达为

$$s(\Omega,V)=s_0(\alpha)=s_0[\alpha^{-1}(\Omega,V)] \tag{2.7}$$

其中 $\alpha^{-1}(\Omega,V)$ 是下列函数方程的解：

$$F(\Omega,V,\alpha)=\Omega-\alpha-f'[s_0(\alpha)]V=0 \tag{2.8}$$

由式 (2.8)

$$F_\alpha=-1-f''[s_0(\alpha)]s_0'(\alpha)V$$

因此只要 $f\in C^2$，$s_0(\alpha)\in C^1$，那么方程(2.4a)的初-边值问题在$V=0$附近恒有古典解。

对初-边值问题(2.4a)～(2.4c)，由于假设$s_0'(\alpha)\leqslant 0$，因此除非$f''(s)$在闭区间$[0,1]$上非正（这相当于相对渗透率曲线是对角线，且 $\mu_w\leqslant\mu_o$，它只能是特例），否则，从 $V=\min\limits_{\alpha}\{-1/[f''(s_0(\alpha))s_0'(\alpha)]\}$ 起，解将出现强间断。而当 $s_0(\alpha)=s_c$（s_c是束缚水饱和度），则由于$s_c<1-s_{or}$，解从 $t=0$开始就有强间断。设 $\Omega=\zeta(V)$为间断线，由质量守恒原理可推得间断条件为

$$\zeta'(V)=\frac{f(s_-)-f(s_+)}{s_- - s_+} \tag{2.9}$$

其中s_+、s_-分别表示间断前、后饱和度的值。

间断强度，从而间断位置，也可由“面积法则”确定，它等价于对 s_-, s_+ 联立求解下列二方程式[9]：

$$[f'(s_-)-f'(s_+)]V-\alpha(s_+)+\alpha(s_-)=0 \tag{2.10}$$

$$[f(s_-)-f(s_+)-(s_- - s_+)f'(s_-)]V+\int_{s_+}^{s_-}\alpha(s)ds-(s_- - s_+)\alpha(s_-)=0 \tag{2.11}$$

其中 $\alpha(s)$是$s_0(\alpha)$的反函数。

当$s_0(\alpha)=s_c$，间断线恰好就是一条特征线。事实上，由于$s_+=s_c$，$f(s_+)=f(s_c)=0$，因此若令前沿饱和度$s_-=s_f$是一个常数，则它是下面超越方程的解

$$f'(s_f)=\frac{f(s_f)}{s_f-s_c} \tag{2.12}$$

那么由(2.5)、(2.9)知，此时它具有间断线

$$\Omega=\zeta(V)=f'(s_f)V \tag{2.13}$$

问题(2.4a)～(2.4c)的解可写为

$$s(\Omega,V)=\begin{cases} s_-^{-1}(\Omega,V) & (0\leqslant\Omega\leqslant\zeta(V)) & (2.14a)\\ s_+^{-1}(\Omega,V) & (\zeta(V)\leqslant\Omega\leqslant\Omega(L)) & (2.14b)\end{cases}$$

其中$s_-^{-1}(\Omega,V)$、$s_+^{-1}(\Omega,V)$ 分别为下列函数的反函数

$$\Omega=f'(s)V+\alpha(s) \qquad (s_-\leqslant s\leqslant 1-s_{or}) \tag{2.15a}$$

$$\Omega=f'(s)V+\alpha(s) \qquad (s_c\leqslant s\leqslant s_+) \tag{2.15b}$$

当$s_0(\alpha)=s_c$时，$s_+^{-1}(\Omega,V)=s_c$。

表达式 (2.14a)、(2.14b) 在间断线 $\Omega=\zeta(V)$ 的 两 测适合熵条件，因此它是 (2.4a)～(2.4c) 的唯一解。

在饱和度产生间断的情况下，对压力方程(2.1a)应补充间断面上的衔接条件：

$$p\Big|_{x=x_f-0}=p\Big|_{x=x_f+0} \tag{2.16}$$

其中 $$x_f=\Omega^{-1}[\zeta(V)] \tag{2.17}$$

Ω^{-1}是函数(2.3)的反函数。

分别在区间$[0,x_f]$和$[x_f,L]$上积分(2.1a)，然后相加，可得

$$p_0(t)-p_L(t)=Q(t)\left\{\int_0^{x_f}\frac{dx}{A(x)k(x)\left[\frac{k_{rw}(s)}{\mu_w}+\frac{k_{ro}(s)}{\mu_o}\right]}+\int_{x_f}^{L}\frac{dx}{A(x)k(x)\left[\frac{k_{rw}(s)}{\mu_w}+\frac{k_{ro}(s)}{\mu_o}\right]}\right\} \tag{2.18}$$

当油水前沿到达采出端以后，代替上式将有

$$p_0(t)-p_L(t)=Q(t)\int_0^{L}\frac{dx}{A(x)k(x)\left[\frac{k_{rw}(s)}{\mu_w}+\frac{k_{ro}(s)}{\mu_o}\right]} \tag{2.19}$$

由式(2.15a)、(2.15b)、(2.3) 可得

$$dx=\frac{f''(s)V+\alpha'(s)}{\phi(x)A(x)}ds,\quad x=\Omega^{-1}[f'(s)V+\alpha(s)]$$

代入式 (2.18)、(2.19)，并注意到 $Q(t)=dV/dt$，可得一阶常微分方程的初值问题[8]：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dV}{dt}=F(V,t) &(2.20a)\\ &V(0)=0 &(2.20b)\end{aligned}\right\}$$

其中

$$F(V,t)=\frac{p_0(t)-p_L(t)}{B(V)} \tag{2.21}$$

$$B(V)=\int_{1-s_{or}}^{s_-}\frac{[f''(s)V+\alpha'(s)]ds}{N}+\int_{s_+}^{s_+^{-1}[\Omega(L),V]}\frac{[f''(s)V+\alpha'(s)]ds}{N}\quad \Omega^{-1}[f'(s_-)V+\alpha(s_-)]\leqslant L \tag{2.22a}$$

$$B(V)=\int_{1-s_{or}}^{s_-^{-1}[\Omega(L),V]}\frac{[f''(s)V+\alpha'(s)]ds}{N}\quad \Omega^{-1}[f'(s_-)V+\alpha(s_-)]>L \tag{2.22b}$$

式中 $N=\phi\{\Omega^{-1}[f'(s)V+\alpha(s)]\}A^2\{\Omega^{-1}[f'(s)V+\alpha(s)]\}\cdot k\{\Omega^{-1}[f'(s)V+\alpha(s)]\}[k_{rw}(s)/\mu_w+k_{ro}(s)/\mu_o]$

分离变量后可得

$$G(V,t)=\int_0^V B(V)dV-\int_0^t [p_0(t)-p_L(t)]dt \tag{2.23}$$

由此 $G'_V=B(V)$

由(2.22a)、(2.22b)，易知$B(V)$恒大于零。于是由隐函数存在定理，初值问题(2.20a)、(2.20b)的解存在且唯一。

把由式(2.23)得到的V代入式(2.14a)、(2.14b)，便得到饱和度函数的唯一解。把V代入式(2.20a)，便得到$Q(t)$。$s(x,t)$和$Q(t)$既已知，对压力函数的问题(2.1a)、(2.1d)、(2.16)有唯一解，立即可得到

$$p(x,t)=p_0(t)-Q(t)\int_0^x \frac{dx}{A(x)k(x)\left[\dfrac{k_{rw}(s)}{\mu_w}+\dfrac{k_{ro}(s)}{\mu_o}\right]} \qquad (0\leqslant x\leqslant x_f(t)) \tag{2.24a}$$

$$p(x,t)=p_L(t)+Q(t)\int_x^L \frac{dx}{A(x)k(x)\left[\dfrac{k_{rw}(s)}{\mu_w}+\dfrac{k_{ro}(s)}{\mu_o}\right]} \qquad (x_f(t)\leqslant x\leqslant L) \tag{2.24b}$$

这样，我们得到了一维变截面流管中二相驱替问题的准确解。

三、一维变截面流管中二相驱替问题的准确解的计算

由式(2.23)计算V，需要计算$\int_0^V B(V)dV$的反函数。由于$B(V)$十分复杂，只能进行近似计算。注意到$G'_V=B(V)>0$，则可用牛顿迭代法近似地求出V。为求特定的时刻t^*时的累积注入量V^*，具体的计算程序是：

$$V^{k+1}=V^k-\frac{G(V^k,t^*)}{B(V^k)} \qquad (k=0,1,2,\cdots) \tag{3.1}$$

若初始值V^0取得适当，它在精确值V^*附近，由于$B(V)>0$，故$G(V^*,t^*)$在V^*处只有单零点，因此牛顿迭代程序(3.1)收敛，且收敛速度是很快的。

再考虑迭代误差$e^k=V^k-V^*$，可得下述递推的近似关系式

$$e^{k+1}\approx\frac{B'(V^*)}{2B(V^*)}(e^k)^2 \tag{3.2}$$

这表明其具有平方收敛性。

在实际计算时，对于给定的精度ε，由(3.1)迭代N次使得

$$|V^N-V^{N-1}|<\varepsilon \tag{3.3}$$

取$\widetilde{V}^*=V^N$作为V^*的近似值，由(2.14a)，(2.14b)可求得饱和度的近似分布

$$\tilde{s}(x,t^*)=s\left[\int_0^x \phi(x)A(x)dx,\ \widetilde{V}^*(t^*)\right] \tag{3.4}$$

再近似地算出$\widetilde{Q}(t^*)=[p_0(t^*)-p_L(t^*)]/B(\widetilde{V}^*)$，最后可得压力分布的近似表达式

$$p(x,t^*)=p_0(t^*)-\tilde{Q}(t^*)\int_0^x \frac{dx}{A(x)k(x)\left\{\dfrac{k_{rw}[\tilde{s}(x,t^*)]}{\mu_w}+\dfrac{k_{ro}[\tilde{s}(x,t^*)]}{\mu_o}\right\}}$$

$$(0\leqslant x\leqslant \tilde{x}_f(t^*)) \tag{3.5a}$$

$$p(x,t^*)=p_l(t^*)+\tilde{Q}(t^*)\int_0^x \frac{dx}{A(x)k(x)\left\{\dfrac{k_{rw}(\tilde{s}(x,t^*)]}{\mu_w}+\dfrac{k_{ro}[\tilde{s}(x,t^*)]}{\mu_o}\right\}}$$

$$(\tilde{x}_f(t^*)<x\leqslant L) \tag{3.5b}$$

四、一维变截面流管中二相驱替问题的数值解

如果我们需要的不仅是某些特定时刻的解，而是整个时段的解，则必须在 t 的密集的离散值 $t=t_1,t_2,\cdots,t_n$ 上按上节的算法求解 $V(t_i)$。由于每一次都要用牛顿迭代法求解一个超越方程，计算工作量比较大。有时，不如索性回到一阶常微分方程的初值问题(2.20a)、(2.20b)，用数值方法例如欧拉折线法求数值解，当然有积累误差，计算精度要差一点。

我们把区间$[0,T]$分成n份，若记 $t_i=\sum\limits_{j=0}^{i-1}\Delta t_j$，$\Delta t_j=t_{j+1}-t_j$，$\Delta t=\max\limits_{0\leqslant j\leqslant n-1}\{\Delta t_j\}$，利用欧拉折线法来解上述初值问题(20.a)、(20.b)。

$$\begin{cases} V_{i+1}=V_i+F(V_i,t_i)\Delta t_i \qquad (i=1,2,\cdots,n-1) & (4.1\text{a})\\ V_0=0 & (4.1\text{b})\end{cases}$$

此处 $t_n=T$，具体计算步骤是：

对于 $i=0$ 我们计算

$$V_1=F(V_0,t_0)\Delta t_0=F(0,0)\Delta t_0 \tag{4.2a}$$

$$F(0,0)=\frac{p_0(0)-p_L(0)}{\displaystyle\int_0^L \frac{dx}{A(x)k(x)\left\{\dfrac{k_{rw}[s_0(x)]}{\mu_w}+\dfrac{k_{ro}[s_0(x)]}{\mu_o}\right\}}}$$

由此可以算出V_1，我们利用在节点t_0、t_1处的值V_0、V_1，由线性内插法来决定$V^n(t)$在 $0\leqslant t\leqslant t_1$ 处的函数值

$$V^n(t)=\frac{V_1t}{\Delta t_0} \qquad (0\leqslant t\leqslant t_1) \tag{4.2b}$$

对于Buckley-Leverett 问题(2.4a)～(2.4c)，由(2.14a)、(2.14b)，其解可表示为

$$s=s(\Omega,V)=s\left[\int_0^x\phi(x)A(x)dx,\int_0^t Q(t)dt\right]=s\left[\int_0^x\phi(x)A(x)dx,V(t)\right]$$

$$(0\leqslant x\leqslant L;\quad 0\leqslant t\leqslant T)$$

对饱和度函数 $s(x,t)$，其近似解定义为

$$s^n(x,t)=s\left[\int_0^x\phi(x)A(x)dx,\ V^n(t)\right] \qquad (0\leqslant x\leqslant L;\ 0\leqslant t\leqslant t_1) \tag{4.2c}$$

对于$i=1$，我们用下述公式来计算V_2

$$V_2=V_1+F(V_1,t_1)\Delta t_1$$

$$F(V_1,t_1)=\frac{\dfrac{p_0(t_1)-p_L(t_1)}{dx}}{\displaystyle\int_0^L A(x)k(x)\left\{\frac{k_{rw}[s^n(x,t_1)]}{\mu_w}+\frac{k_{ro}[s^n(x,t_1)]}{\mu_o}\right\}} \tag{4.3a}$$

当算出V_2后，同样利用节点t_1、t_2处的V_1、V_2，由线性插值决定$V^n(t)$ $(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$上的函数值

$$V^n(t)=V_1+\frac{V_2-V_1}{\Delta t_1}(t-t_1) \tag{4.3b}$$

并由此决定

$$s^n(x,t)=s\left[\int_0^x\phi(x)A(x)dx,\ V^n(t)\right]\qquad(t_1\leqslant t\leqslant t_2) \tag{4.3c}$$

对一般情况，若V_i已解出，我们利用下述公式

$$V_{i+1}=V_i+F(V_i,t_i)\Delta t_i \tag{4.4a}$$

来计算V_{i+1}，其中

$$F(V_i,t_i)=\frac{\dfrac{p_0(t_i)-p_L(t_i)}{dx}}{\displaystyle\int_0^L A(x)k(x)\left\{\frac{k_{rw}[s^n(x,t_i)]}{\mu_w}+\frac{k_{ro}[s^n(x,t_i)]}{\mu_o}\right\}}$$

同样利用线性插值法决定

$$V^n(t)=V_i+\frac{V_{i+1}-V_i}{\Delta t_i}(t-t_i)\qquad(t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}) \tag{4.4b}$$

$$s^n(x,t)=s\left[\int_0^x\phi(x)A(x)dx,\ V^n(t)\right]\qquad(0\leqslant x\leqslant L;\ t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}) \tag{4.4c}$$

如此进行n步，即可算出初值问题（2.20a）、（2.20b）的近似解$V^n(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$和饱和度函数的近似解

$$s^n(x,t)=s\left[\int_0^x\phi(x)A(x)dx,\ V^n(t)\right]\qquad(0\leqslant x\leqslant L;\ 0\leqslant t\leqslant T) \tag{4.5}$$

以及压力函数的近似表达式

$$p^n(x,t)=p^n(x,t_i)+[p^n(x,t_{i+1})-p^n(x,t_i)]\frac{t-t_i}{\Delta t_i}$$

$$(t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1};\ i=0,1,\cdots,n-1) \tag{4.6}$$

此处

$$p^n(x,t_i)=p_0(t_i)-F(V_i,t_i)\int_0^x\frac{dx}{A(x)k(x)\left\{\dfrac{k_{rw}[s^n(x,t_i)]}{\mu_w}+\dfrac{k_{ro}[s^n(x,t_i)]}{\mu_o}\right\}}$$

$$(0\leqslant x\leqslant x_f^n(t_i)) \tag{4.7a}$$

$$p^n(x,t_i)=p_L(t_i)+F(V_i,t_i)\int_x^L\frac{dx}{A(x)k(x)\left\{\dfrac{k_{rw}[s^n(x,t_i)]}{\mu_w}+\dfrac{k_{ro}[s^n(x,t_i)]}{\mu_o}\right\}}$$

$$(x_f^n(t_i)\leqslant x\leqslant L) \tag{4.7b}$$

此处$F(V_i,t_i)$为上述已算出的数据，$x_j^n(t_i)=\Omega^{-1}\{\xi[V^n(t_i)]\}$。

在数值计算时，在这里所遇到的积分均采用高精度的高斯积分公式。

我们指出，上述数值解与流行的 Эфрос 方法[1]和 Higgins-Leighton 方法[2]在实质上是相同的。

五、数值解的收敛性和稳定性分析

首先讨论常微分方程式(2.20a)的右端$F(V,t)$对V、t满足 Lipschitz的连续条件。对t的 Lipschitz 连续条件，实质上只要求$p_0(t)$、$p_L(t)$分别满足 Lipschitz 连续条件，关于对V的 Lipschitz 条件，只要注意到$B(V)$的下述表达式

$$B(V)=\int_0^{x_f}\frac{dx}{A(x)k(x)\left[\frac{k_{rw}(s)}{\mu_w}+\frac{k_{ro}(s)}{\mu_o}\right]}+\int_{x_f}^{L}\frac{dx}{A(x)k(x)\left[\frac{k_{rw}(s)}{\mu_w}+\frac{k_{ro}(s)}{\mu_o}\right]}\tag{5.1}$$

得知$B(V)$是正的，且存在正常数β_0，使得$B(V)\geqslant\beta_0>0$一致成立，于是只要讨论$B(V)$满足 Lipschitz 连续条件就可以了。

为了下面讨论简便起见，记

$$\begin{aligned}B_1(V)=&\int_{1-s_{or}}^{s_-}\frac{[f''(s)V+\alpha'(s)]ds}{K\{\Omega^{-1}[f'(s)V+\alpha(s)]\}\left[\frac{k_{rw}(s)}{\mu_w}+\frac{k_{ro}(s)}{\mu_o}\right]}\\&+\int_{s_+}^{s_+^{-1}[\Omega(L),V]}\frac{[f''(s)V+\alpha'(s)]ds}{K\{\Omega^{-1}[f'(s)V+\alpha(s)]\}\left[\frac{k_{rw}(s)}{\mu_w}+\frac{k_{ro}(s)}{\mu_o}\right]}\end{aligned}\tag{5.2a}$$

$$B_2(V)=\int_{1-s_{or}}^{s_-^{-1}[\Omega(L),V]}\frac{[f''(s)V+\alpha'(s)]ds}{K\{\Omega^{-1}[f'(s)V+\alpha(s)]\}\left[\frac{k_{rw}(s)}{\mu_w}+\frac{k_{ro}(s)}{\mu_o}\right]}\tag{5.2b}$$

此处 $K\{\Omega^{-1}[f'(s)V+\alpha(s)]\}=\phi\{\Omega^{-1}[f'(s)V+\alpha(s)]\}A^2\{\Omega^{-1}[f'(s)V+\alpha(s)]\}k\{\Omega^{-1}[f'(s)V+\alpha(s)]\}$

若V_1、$V_2\in\Omega^{-1}[f'(s_-)V+\alpha(s_-)]\leqslant L$，我们首先证明(5.2a)中的第一项满足Lipschitz条件。注意到

$$\begin{aligned}&\left|\int_{1-s_{or}}^{s_-}\frac{[f''(s)V_1+\alpha'(s)]ds}{K\{\Omega^{-1}[f'(s)V_1+\alpha(s)]\}\left[\frac{k_{rw}(s)}{\mu_w}+\frac{k_{ro}(s)}{\mu_o}\right]}\right.\\&\left.-\int_{1-s_{or}}^{s_-}\frac{[f''(s)V_2+\alpha'(s)]ds}{K\{\Omega^{-1}[f'(s)V_2+\alpha(s)]\}\left[\frac{k_{rw}(s)}{\mu_w}+\frac{k_{ro}(s)}{\mu_o}\right]}\right|\\&\leqslant\left|\int_{1-s_{or}}^{s_-}\frac{[V_1K\{\Omega^{-1}[f'(s)V_2+\alpha(s)]\}-V_2K\{\Omega^{-1}[f'(s)V_1+\alpha(s)]\}]f''(s)ds}{K\{\Omega^{-1}[f'(s)V_1+\alpha(s)]\}K\{\Omega^{-1}[f'(s)V_2+\alpha(s)]\}\left[\frac{k_{rw}(s)}{\mu_w}+\frac{k_{ro}(s)}{\mu_o}\right]}\right|\\&+\left|\int_{1-s_{or}}^{s_-}\frac{(K\{\Omega^{-1}[f'(s)V_2+\alpha(s)]\}-K\{\Omega^{-1}[f'(s)V_1+\alpha(s)]\})\alpha'(s)ds}{K\{\Omega^{-1}[f'(s)V_1+\alpha(s)]\}K\{\Omega^{-1}[f'(s)V_2+\alpha(s)]\}\left[\frac{k_{rw}(s)}{\mu_w}+\frac{k_{ro}(s)}{\mu_o}\right]}\right|\end{aligned}$$

$$\leqslant M\int_{1-s_{or}}^{s_-}|V_1K\{\Omega^{-1}[f'(s)V_2+\alpha(s)]\}-V_2K\{\Omega^{-1}[f'(s)V_1+\alpha(s)]\}|ds$$

$$+M\int_{1-s_{or}}^{s_-}|K\{\Omega^{-1}[f'(s)V_2+\alpha(s)]\}-K\{\Omega^{-1}[f'(s)V_1+\alpha(s)]\}|ds \tag{5.3}$$

此处M为正常数。

若$A(x)$、$\phi(x)$、$k(x)$均满足Lipschitz条件，则有

$$\begin{aligned}&|K\{\Omega^{-1}[f'(s)V_2+\alpha(s)]\}-K\{\Omega^{-1}[f'(s)V_1+\alpha(s)]\}|\\&\qquad\leqslant M|\Omega^{-1}[f'(s)V_2+\alpha(s)]-\Omega^{-1}[f'(s)V_1+\alpha(s)]|\end{aligned} \tag{5.4}$$

为方便起见，在以后不同处，M表示不同意义的正常数。

由关系式(2.3)，我们可得

$$\int_{\Omega^{-1}[f'(s)V_1+\alpha(s)]}^{\Omega^{-1}[f'(s)V_2+\alpha(s)]}\phi(x)A(x)dx=f'(s)(V_2-V_1)$$

再由中值定理

$$\Omega^{-1}[f'(s)V_2+\alpha(s)]-\Omega^{-1}[f'(s)V_1+\alpha(s)]=\frac{f'(s)}{\phi(x)A(x)|_{x^*}}(V_2-V_1) \tag{5.5}$$

此处 x^*是介于 $\Omega^{-1}[f'(s)V_2+\alpha(s)]$、$\Omega^{-1}[f'(s)V_1+\alpha(s)]$ 中的某个值。于是有

$$|\Omega^{-1}[f'(s)V_2+\alpha(s)]-\Omega^{-1}[f'(s)V_1+\alpha(s)]|\leqslant C|V_2-V_1| \tag{5.6}$$

我们再来估计(5.3)中诸项、对第二项，由(5.4)、(5.6)立即可得

$$\int_{1-s_{or}}^{s_-}|K\{\Omega^{-1}[f'(s)V_2+\alpha(s)]\}-K\{\Omega^{-1}[f'(s)V_1+\alpha(s)]\}|ds\leqslant M|V_2-V_1|$$

对第一项则有

$$\begin{aligned}&\int_{1-s_{or}}^{s_-}|V_1K\{\Omega^{-1}[f'(s)V_2+\alpha(s)]\}-V_2K\{\Omega^{-1}[f'(s)V_1+\alpha(s)]\}|ds\\
&\quad\leqslant\int_{1-s_{or}}^{s_-}|(V_1-V_2)K\{\Omega^{-1}[f'(s)V_2+\alpha(s)]\}\\
&\quad-V_2(K\{\Omega^{-1}[f'(s)V_1+\alpha(s)]\}-K\{\Omega^{-1}[f'(s)V_2+\alpha(s)]\})|ds\\
&\quad\leqslant M|V_1-V_2|+M\int_{1-s_{or}}^{s_-}|\Omega^{-1}[f'(s)V_1+\alpha(s)]\\
&\quad-\Omega^{-1}[f'(s)V_2+\alpha(s)]|ds\leqslant M|V_1-V_2|\end{aligned}$$

用类似的方法可证明(5.2a)中的第二项亦满足Lipschitz条件。

这样我们证明了，若V_1、$V_2\in\Omega^{-1}[f'(s_-)V+\alpha(s_-)]\leqslant L$，Lipschitz条件成立

$$|B_1(V_2)-B_1(V_1)|\leqslant M|V_2-V_1| \tag{5.7}$$

若 V_1、$V_2\in\Omega^{-1}[f'(s_-)V+\alpha(s_-)]>L$，按上述类似的方法可证

$$|B_2(V_2-B_2(V_1)|\leqslant|V_2-V_1| \tag{5.8}$$

对于$V_1\in\Omega^{-1}[f'(s_-)V_1+\alpha(s_-)]\leqslant L$，$V_2\in\Omega^{-1}[f'(s_-)V_2+\alpha(s_-)]>L$的情况，我们在$V_1$、$V_2$之间选取$V^*$满足条件：

$$\Omega^{-1}[f'(s_-)V^*+\alpha(s_-)]=L$$

再注意到 $B_1(V^*)=B_2(V^*)$，于是有

$$\begin{aligned}|B(V_1)-B(V_2)|&\leqslant|B(V_1)-B(V^*)|+|B(V^*)-B(V_2)|\\&=|B_1(V_1)-B_1(V^*)|+|B_2(V^*)-B_2(V_2)|\leqslant M|V_1-V^*|\\&\quad+M|V^*-V_2|\leqslant M|V_1-V_2|\end{aligned}\tag{5.9}$$

这样，我们证明了$B(V)$的 Lipschitz 连续性。

若用L、K表示$F(V,t)$的Lipschitz系数，亦即

$$|F(V_2,t)-F(V_1,t)|\leqslant L|V_2-V_1|\tag{5.10a}$$

$$|F(V,t_2)-F(V,t_1)|\leqslant K|t_2-t_1|\tag{5.10b}$$

由常微分方程的定性理论[10]，再次得知初值问题(2.20a)、(2.20b)的解存在且唯一，从而问题(2.1a)～(2.1f)的解存在且唯一。

定义误差函数

$$\varepsilon_i=V(t_i)-V^n(t_i)\tag{5.11}$$

由常微分方程数值解法理论[10]，可得下述误差估计式

$$|\varepsilon_i|\leqslant\frac{\Delta t}{2}\left(M+\frac{K}{L}\right)(e^{LT}-1)=C\Delta t\qquad(i=1,2,\cdots,n)\tag{5.12}$$

此处$M=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|F[V(t),t]|$，$C$为正常数。

对于连续变量的情况，考虑误差函数

$$\varepsilon(t)=V(t)-V^n(t)\qquad(0\leqslant t\leqslant T)\tag{5.13}$$

注意到对于任意的t，均存在区间$[t_j,t_{j+1}]$，使得$t_j\leqslant t\leqslant t_{j+1}$，于是我们有下述估计

$$\begin{aligned}|\varepsilon(t)|=|V(t)-V^n(t)|&\leqslant|V(t)-V(t_j)|+|V(t_j)-V^n(t_j)|\\&\quad+|V^n(t_j)-V^n(t)|\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&|V(t)-V(t_j)|\leqslant M(t-t_j)\leqslant M\Delta t\\&|V(t_j)-V^n(t_j)|=|\varepsilon_j|\leqslant C\Delta t\\&|V^n(t_j)-V^n(t)|\leqslant|V^n(t_j)-V^n(t_{j+1})|\leqslant|V^n(t_j)-V(t_j)|\\&\quad+|V(t_j)-V(t_{j+1})|+|V(t_{j+1})-V^n(t_{j+1})|\\&\quad=|\varepsilon_j|+|\varepsilon_{j+1}|+|V(t_j)-V(t_{j+1})|\leqslant 2C\Delta t+M\Delta t\end{aligned}$$

于是最后可得误差估计式

$$|\varepsilon(t)|\leqslant 3C\Delta t+2M\Delta t=(3C+2M)\Delta t\tag{5.14}$$

稳定性分析是这样的，考虑

$$U_{i+1}=U_i+F(U_i,t_i)\Delta t_i$$

$$V_{i+1}=V_i+F(V_i,t_i)\Delta t_i$$

令$e_i=U_i-V_i$，我们有

$$|e_i|\leqslant e^{LT}|e_0|\tag{5.15}$$

当$i\Delta t\leqslant T$，这结果表明此格式是稳定的。

下面是关于$s^n(x,t)$、$p^n(x,t)$的收敛性分析。注意到$s(x,t)$、$s^n(x,t)$的表达式，有

$$s(x,t)-s^n(x,t)=s\left[\int_0^x\phi(x)A(x)dx,V(t)\right]-s\left[\int_0^x\phi(x)A(x)dx,V^n(t)\right]$$

当$\Delta t\to 0$时，$V^n(t)$一致收敛于$V(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$。注意到Buckley-Leverett问题解$s(\Omega,V)$的表达式(2.14a)、(2.14b)、(2.15a)、(2.15b)以及相应的性质，可得$s^n(x,t)$均方收敛于$s(x,t)$，

亦即

$$\left\| s^n(x,t)-s(x,t) \right\|_{L_2([0,L])\times L_2([0,T])} \longrightarrow 0 \qquad (\Delta t\to 0) \tag{5.16}$$

注意到当$\Delta t\to 0$时，$F[V^n(t),t]\underset{一致}{\longrightarrow} F[V(t),t]=Q(t)\,(0\leqslant t\leqslant T)$；$x_f{}^n(t)=\Omega^{-1}\{\zeta[V^n(t)]\}\longrightarrow x_f(t)=\Omega^{-1}\{\zeta[V(t)]\}\ (0\leqslant t\leqslant T)$，由$p^n(x,t)$的表达式(4.6)、(4.7a)、(4.7b)，立即可得

$$p^n(x,t)\underset{一致}{\longrightarrow} p(x,t) \qquad (0\leqslant x\leqslant L;\ 0\leqslant t\leqslant T)$$

$$p(x,t)=p_0(t)-Q(t)\int_0^x \frac{dx}{A(x)k(x)\left\{\dfrac{k_{rw}[s(x,t)]}{\mu_w}+\dfrac{k_{ro}[s(x,t)]}{\mu_o}\right\}} \qquad (0\leqslant x\leqslant x_f) \tag{5.17a}$$

$$p(x,t)=p_l(t)+Q(t)\int_x^L \frac{dx}{A(x)k(x)\left\{\dfrac{k_{rw}[s(x,t)]}{\mu_w}+\dfrac{k_{ro}[s(x,t)]}{\mu_o}\right\}} \qquad (x_f<x\leqslant L) \tag{5.17b}$$

定理 1 由第四节公式(4.5)、(4.6)所构造的近似函数 $s^n(x,t)$、$p^n(x,t)$，当 $\Delta t\to 0$，$s^n(x,t)$均方收敛于$s(x,t)$，$p^n(x,t)$一致收敛于$p(x,t)$，此处$s(x,t)$、$p(x,t)$为问题(2.1a)～(2.1f)的解。

六、结 论

1. 本文总结了工程上广泛应用的求解二相二维渗流问题的不变流管近似方法，全面考察了其核心部份即在给定两端的压力时一维刚性变截面流管中的二相驱替问题。

2. 本文证明了上述一维流管问题的解的存在唯一性，并给出了准确解，从而对不变流管近似解法作了改进。

3. 本文还给出了该一维流管问题的数值解及其收敛性和稳定性分析。由于这一数值解法与流行的 Эфрос 方法和 Higgins-Leighton 方法在实质上是一致的，因而同时为它们提供了理论基础。

参 考 文 献

[1] Эфрос Д. А., Движение водо-нефтяной смеси в системе скватин, *Труды Вниu*, вып. 12, Гостоптехиздат, Ленинград (1958), 3—32.

[2] Higgins, R. V. and A. J. Leighton, A computer method to calculate two-phase flow in any irregularly bounded porous medium, *Pet. Tech. J.*, (1962), 679—683.

[3] 陈钟祥，用电网模型研究二相二维非定常渗流的一种近似方法，力学学报，1 (1965)，60—62.

[4] Martin, J. C. and R. E. Wegher, Numerical solution of multiphase, two-dimensional incompressible flow using stream-tube relationships, *Soc. Pet. Eng. J.* (1979), 313—323.

[5] Craig, F. F., The reservoir engineering aspects of waterflooding, *Monograph Series, Society of Petroleum Engineers of AIME*, 3, Dallas, Tex (1971).

[6] Muskat, M. and M. Meres, The flow of heterogeneous fluids, *Physics*, 7, 9 (1936), 346.

[7] Buckly, S. E. and M. C. Leverett, Mechanism of fluid displacement in sands, *Trans., AIME*, 146 (1942), 107—116.

[8] Чарный И. А., *Подземная Гидрогазодинамика*, Гостоптехиздат, Москва (1963).

[9] 陈钟祥,关于计算两相渗流时饱和率突变的方法,《北京石油学院科学研究论文集》, 2 (1964), 84—89.

[10] 李荣华、冯果忱,《微分方程数值解法》, 人民教育出版社 (1980).

Fixed Stream-Tube Method for Solving Two-Phase Plane Flow Problems and Its Theoretical Analysis

Chen Zhong-xiang

(*Scientific Research Institute of Petroleum Exploration and Development, Beijing*)

Yuan Yi-rang

(*Shandong University, Jinan*)

Jiang Li-shang

(*Peking University, Beijing*)

Abstract

The fixed stream-tube method widely adopted in engineering field for giving an approximate solution to the two-dimensional problems of Two-Phase flow through porous media is summarized and an improvement has been made in this paper. Its core part, i. e., the fluid displacement within a one-dimensional stream tube with variable cross-sectional area under a given pressure difference across the tube is thoroughly studied. The existence and uniqueness of solution are proved. The exact solution, numerical solution and its convergence, stability analyses are given in this paper.