

组合型扁壳的一种广义变分原理及对幕壳的应用*

倪海鹰 童竞昱

(浙江大学, 1985年6月1日收到)

摘 要

本文提出一个带边梁的组合型扁壳弹性动力学广义变分原理, 对它与相应的基本方程、脊线条件及边界条件的等价性作了论证, 然后将这一变分原理应用于幕壳结构, 利用多重级数给出幕壳在常见的边界条件下的静动力学近似解析解, 将本文解析解同有限元计算及试验值作了比较, 结果表明我们的解析解收敛性好, 精确性令人满意。

一、引 言

组合型扁壳是由若干个中面为光滑曲面的壳体连接而成的, 其显著特征是: 在脊线处, 曲面的曲率或扭率发生突变。目前, 有人对某些组合型壳体的静力学解做过研究, 但对其动力学问题的讨论却很少见。钱伟长^[1]关于一般弹性体动力学广义变分原理已作了论述, 并且指出了广义变分原理在壳体分析中的应用^[2]。Gurtin^[3]的动力学广义变分原理包括了初始条件, 但他给出的卷积表达式难以用到壳体问题中。

我们对前人的工作加以改进和拓广, 利用 δ 函数处理脊线问题, 考虑边梁与壳体的共同作用。本文提出一种实用的组合型扁壳弹性动力学广义变分原理, 并论证了它与基本方程、脊线条件和边界条件的等价性。我们将这个原理应用于幕壳分析, 利用重级数形式给出了常见边界条件下的幕壳静动力学近似解析解。所考虑的边界条件有: (1)SSSS (即四边简支); (2)CCCC (即四边固定); (3)SCSC (对边简支对边固定); (4)四角简支带边梁。本文还将解析解和有限元法计算及试验值作了比较, 证实本文解析解不但收敛性好而且精确性也令人满意。因此, 这里提出的广义变分原理对一般组合型扁壳具有一定的实用意义。

二、组合型扁壳的弹性动力学广义变分原理

本文仅处理扁薄壳。坐标系($Oxyz$)如图1所示, 挠度 w 沿轴向为正。

在实际应用中, 常略去 x, y 方向的荷载, 惯性力及阻尼力。本文一方面利用扁壳中熟知的应力应变关系和引进应力函数:

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (2.1)$$

* 戴世强推荐。

另一方面,利用 δ 函数对脊线问题作特别处理、考虑边梁与整个壳体共同抗弯, 抗拉压. 那么, 组合型扁壳的弹性动力学广义变分原理叙述为

若将 w 、 φ 视为彼此独立且变分不受任何限制的函数, 则变分式

$$\delta\Gamma_2 = 0$$

其中

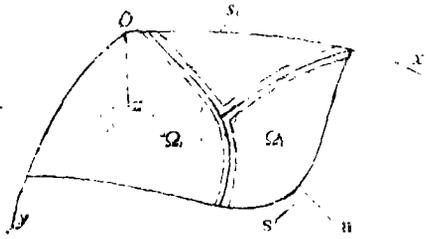


图1 组合型扁壳坐标系

$$\begin{aligned} \Gamma_2 = & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_i \left[\iint_{\Omega_i} (L_1 + p_2 w) dx dy - P^2 \iint_{\Omega_i} \frac{\rho}{2} w^2 dx dy - P \iint_{\Omega_i} \frac{c}{2} w^2 dx dy \right] \right. \\ & + \sum_m \int_{s_m} \left[w \Delta \left(\frac{\partial z}{\partial n} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \right] ds - \sum_j \frac{E}{2} \int_{l_j} \left[F_j (e_j' - k_s w)^2 \right. \\ & - 2e_j F_j \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} (e_j' - k_s w) + J_{z_j} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)^2 + J_{n_j} k_s'^2 \left. \right] ds \\ & - \sum_j \left(P^2 \int_{l_j} \frac{\rho_e}{2} w^2 ds + P \int_{l_j} \frac{c}{2} w^2 ds \right) + \int_{C_{N_n}} \left(\tilde{\varphi} - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \varepsilon_n' ds \\ & + \int_{C_s} \bar{q}_n w ds + \int_{C_w} (w - \tilde{w}) q_n ds + \int_{C_a} \left(\tilde{a}_n - \frac{\partial w}{\partial n} \right) M_n ds \\ & \left. - \int_{C_M} \tilde{M}_n \frac{\partial w}{\partial n} ds - \int_{C_{N_n}} \tilde{k}_n' \tilde{\varphi} ds - \int_{C_{N_n}} \tilde{\varepsilon}_n' \tilde{\varphi} ds \right\} dt \end{aligned} \quad (2.2)$$

便和组合型扁壳的基本方程、脊线条件和边界条件等价. 式(2.2)中

$$\begin{aligned} L_1 = & \frac{D}{2} \left\{ 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right\} \\ & + \frac{1}{2Eh} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1+\mu) \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$P \equiv \partial/\partial t$ 及 $P^2 \equiv \partial^2/\partial t^2$ 是一种算子, 其意义是变分后再作用于 w , 例如

$$\left. \begin{aligned} \delta \left[P \iint_{\Omega_i} \frac{c}{2} w^2 dx dy \right] &= \iint_{\Omega_i} c \frac{\partial w}{\partial t} \delta w dx dy \\ \delta \left[P^2 \iint_{\Omega_i} \frac{\rho}{2} w^2 dx dy \right] &= \iint_{\Omega_i} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dx dy \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

h 为壳厚, E 为杨氏模量, D 为抗弯刚度, μ 为泊松系数, $\Delta(\partial z/\partial n)$ 为脊线法向角增量, ρ 为单位面积质量, c 为阻尼系数, ρ_e 为边梁的单位长度质量, l_j 、 e_j 、 F_j 、 J_{z_j} 及 J_{n_j} 分别表示边梁长度、偏心距、截面积、平面内和平面外惯性矩, 其余符号参见[4].

对式(2.2)作一次变分, 不仅可导出基本方程、脊线条件和边界条件, 而且可证明本文的广义变分原理与它们的等价性. 式(2.2)变分为

$$\delta\Gamma_2 = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_i \left[\iint_{\Omega_i} \left(-D \nabla^2 \nabla^2 w + \nabla_i^2 \varphi + p_2 - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c \frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta w dx dy \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \iint_{\Omega_i} \left(\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + \nabla_i^2 w \right) \delta \varphi dx dy + \int_{C'_q} (\tilde{q}_n - q_n) \delta w ds \\
 & + \sum_{i(C_o)} [\tilde{q}_i - (\Delta M_{ns})_i] \delta w - \int_{C_a} \left(\frac{\partial w}{\partial n} - \tilde{a}_n \right) \delta M_n ds + \int_{C_w} (w - \tilde{w}) \delta q_n ds \\
 & + \int_{C_N} (M_n - \tilde{M}_n) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) ds + \int_{C'_{N_n}} (\tilde{\varphi} - \varphi) \delta k'_i ds \\
 & + \int_{C'_{N_n}} (k'_i - \tilde{k}'_i) \delta \varphi ds + \sum_{j(C_{U_n})} [(\Delta e_{ns})_j - \tilde{\beta}_j] \delta \varphi_j + \int_{C_{N_{ns}}} \left(\tilde{\varphi} - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \delta e'_i ds \\
 & + \int_{C_{v_i}} (e'_i - \tilde{e}'_i) \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds + \int_{C_{N_{ns}}} (e'_i - \tilde{e}'_i) \delta \tilde{\varphi} ds + \int_{C'_{N_n}} (k'_i - \tilde{k}'_i) \delta \tilde{\varphi} ds \\
 & + \sum_{k(C_{N_n})} [(\Delta e'_{ns})_k - \tilde{\beta}_k] \delta \tilde{\varphi}_k + \sum_j \left\{ \int_{l_j} \left[EF_j (e'_i - k_s w) k_s - E e_j F_j \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} k_s \right. \right. \\
 & \left. \left. - EJ_{zj} \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + E e_j F_j \frac{\partial^2}{\partial s^2} (e'_i - k_s w) - \rho_e \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c \frac{\partial w}{\partial t} \right] \delta w ds \right. \\
 & \left. - \int_{l_j} EJ_{nj} k'_i \delta k'_i ds + \int_{l_j} EF_j (k_s w + e_j \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - e'_i) \delta e'_i ds \right\} \\
 & - \sum_{j(l_i)} \left\{ \Delta \frac{\partial}{\partial s} \left[EJ_{zj} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - E e_j F_j (e'_i - k_s w) \right] \right\}_j \delta w + \sum_{j(l_i)} \Delta \left\{ EJ_{zj} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right. \\
 & \left. - E e_j F_j (e'_i - k_s w) \right\} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right) \Bigg\}_j + \sum_m \left\{ \int_{s_m} \left[\Delta \left(\frac{\partial z}{\partial n} \right)^\pm w - \Delta u_n^\pm \right] \right. \\
 & \left. \cdot \delta \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \right) ds + \int_{s_m} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \Delta \left(\frac{\partial z}{\partial n} \right)^\pm + \Delta Q_n^\pm \right] \delta w ds \right\} d\tau = 0 \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

其中 \sum_i 为对全部 Ω_i 求和, \sum_j 为全部边梁求和, $\sum_{j(l_i)}$ 为对边梁连接点求和且 Δ 是沿 s 方向增

量, \sum_m 为对全部脊线求和, ΔQ_n^\pm 、 Δu_n^\pm 分别为脊线法向剪力和位移改变量。其余符号参见[4]。

注意到边梁上的变分区间相应地与 C_q 、 C_{N_n} 和 $C_{N_{ns}}$ 的区间重合, 采用上述符号, 由(2.5)可得到下列

1、组合型扁壳基本方程

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - \nabla_i^2 \varphi + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} = p_z; \quad \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + \nabla_i^2 w = 0 \quad (\text{在 } \Omega_i \text{ 内}) \tag{2.6}$$

2、边界条件

$$\left. \begin{aligned}
 C_w: & w = \tilde{w}; \quad C_a: \partial w / \partial n = \tilde{a}_n; \quad C_M: M_n = \tilde{M}_n \\
 C'_q: & q_n + EJ_{zj} \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + E e_j F_j \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} k_s - EF_j \left[(e'_i - k_s w) k_s + \right. \\
 & \left. + e_j \frac{\partial^2}{\partial s^2} (e'_i - k_s w) \right] + \rho_e \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} = \tilde{q}_n
 \end{aligned} \right\} \tag{2.7}$$

$$\left. \begin{aligned} C'_{u_n}: k'_i = \tilde{k}'_i; C_{v_n}: \varepsilon'_i = \tilde{\varepsilon}'_i; C'_{N_n}: \varphi + EJ_{n_j} k'_i = \tilde{\varphi} \\ C_{N_{ns}}: \frac{\partial \varphi}{\partial n} - EF_j \left(k_s w + e_j \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \varepsilon'_i \right) = \tilde{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

在 C_q 内:

$$\text{角点处} \quad (\Delta M_{ns})_i + \left\{ \Delta \frac{\partial}{\partial s} \left[EJ_{zi} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - Ee_i F_i (\varepsilon'_i - k_s w) \right] \right\}_i = \tilde{q}_i \quad (2.9)$$

边梁连接处

$$\left\{ \Delta \frac{\partial}{\partial s} \left[EJ_{zj} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - Ee_j F_j (\varepsilon'_i - k_s w) \right] \right\}_j = 0 \quad (2.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \left[EJ_{zj} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - Ee_j F_j (\varepsilon'_i - k_s w) \right]_h^+ = 0 \\ \left[EJ_{zj} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - Ee_j F_j (\varepsilon'_i - k_s w) \right]_h^- = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

$$\text{在 } C_{u_n} \text{ 内角点处:} \quad (\Delta \varepsilon'_{ns})_{j'} = \tilde{\beta}_{j'} \quad (2.12)$$

$$\int_{C_{N_{ns}}} (\varepsilon'_i - \tilde{\varepsilon}'_i) \delta \tilde{\varphi} ds + \int_{C'_{N_n}} (k'_i - \tilde{k}'_i) \delta \tilde{\varphi} ds + \sum_{k(C_{N_n})} [(\Delta \varepsilon'_{ns})_k - \tilde{\beta}_k] \delta \tilde{\varphi}_k = 0 \quad (2.13)$$

其中 C'_i 、 C'_{u_n} 、 C'_{N_n} 分别为除角点外的边界 C_q 、 C_{u_n} 、 C_{N_n} 。(2.7)的 C'_i 项是边梁平面内弯曲动力平衡方程,(2.8)中 C'_{N_n} 项在两边对 s 求二次微分后是边梁平面外的弯曲平衡方程,(2.8)中 $C_{N_{ns}}$ 项两边对 s 求一次微分后是边梁轴向力的平衡方程,(2.13)是引入 φ 后对放松的边界约束产生的补充条件,(2.11)与略去边梁扭转刚度意义相同。

3、脊线条件

$$\Delta Q_n^\pm |_{s_m} = - \left[\Delta \left(\frac{\partial z}{\partial n} \right)^\pm \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \right]_{s_m}; \quad \Delta u_n^\pm |_{s_m} = \left[\Delta \left(\frac{\partial z}{\partial n} \right)^\pm w \right]_{s_m} \quad (2.14)$$

由于上述变分原理在分析组合型扁壳时避开了广义函数,我们可以用普通的数学分析方法处理泛函表达式和相应的基本方程、脊线和边界条件,所以具有一定的理论和实用意义。

三、应用广义变分原理的幕壳静动力学解析解

幕壳结构由四块梯形斜板和一块矩形顶板的壳面与边梁组合而成,如图2所示。它可作大跨度、大荷载结构的顶盖或楼盖。

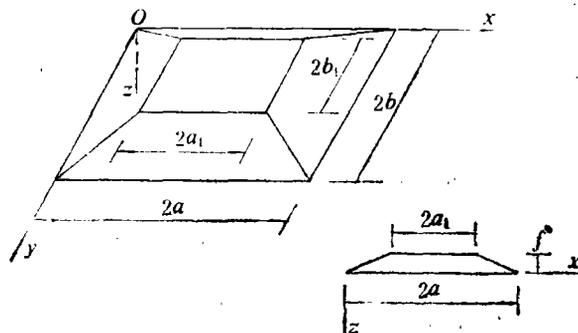


图2 幕壳的几何图形

本文利用重级数对常见边界的幕壳给出近似解析解。我们引入若干无量纲量，包括挠度、应力函数、坐标以及相关参数：

$$w = \frac{a^4}{D} 10^{-6} \bar{w}, \quad \varphi = \sqrt{\frac{12(1-\mu^2)}{h}} \cdot a^4 \cdot 10^{-6} \bar{\varphi} \quad (3.1)$$

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/b$$

$$\lambda = h/f, \quad \gamma = a/b, \quad V = 1 - a_1/a \quad (3.2)$$

本文仅讨论均布荷载，分别求解如下两种典型的边界条件问题：

1、静力学问题解

a、四边简支 (SSSS)

设重三角级数解为

$$\bar{w} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi\xi}{2} \sin \frac{n\pi\eta}{2}; \quad \bar{\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} B_{kl} \sin \frac{k\pi\xi}{2} \sin \frac{l\pi\eta}{2} \quad (3.3)$$

它们满足边界条件。将式(3.3)代入式(2.2)得两个线性方程组（取有限项数 N ）

$$\left. \begin{aligned} [m^2 + (\gamma n)^2]^2 A_{mn} - \frac{4\gamma^2 \sqrt{12(1-\mu^2)}}{\pi^3 \lambda V} \sum_{k=1}^{2N-1} \sum_{l=1}^{2N-1} [\alpha_1 + (\beta_1 + \beta_2)] B_{kl} &= \frac{16^2 \cdot 10^6}{\pi^6 mn} \\ (m, n = 1, 3, \dots, 2N-1) \\ 4\gamma^2 \sqrt{12(1-\mu^2)} \sum_{m=1}^{2N-1} \sum_{n=1}^{2N-1} [\alpha_1 + (\beta_1 + \beta_2)] A_{mn} + [k^2 + (\gamma l)^2]^2 B_{kl} &= 0 \\ (k, l = 1, 3, \dots, 2N-1) \end{aligned} \right\} (3.4)$$

其中 α_1 、 β_1 和 β_2 见 [5]。

b、四角简支带边梁

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \xi = 0, 2: \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad q_n + EJ_z \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} - EF e \frac{\partial^2 e'_s}{\partial s^2} = 0 \\ \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} + EF \left(e'_s - e \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) - \tilde{\varphi} = 0 \\ \eta = 0, 2: \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad q_n + EJ_z \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} - EF e \frac{\partial^2 e'_s}{\partial s^2} = 0 \\ \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} + EF \left(e'_s - e \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) - \tilde{\varphi} = 0 \end{aligned} \right\} (3.5)$$

角点处 $w=0$ 。

设

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{w} &= \left(\frac{20}{\pi}\right)^5 \sum_{m=1}^{2N-1} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi\xi}{2} + \sum_{m=1}^{2N-1} \{a_m \operatorname{ch} \lambda_m(\eta-1) \\
 &\quad + A_m [(\eta-1) \operatorname{sh} \lambda_m(\eta-1) + b_m \operatorname{ch} \lambda_m(\eta-1)]\} \sin m\pi\xi/2 \\
 &\quad + \left(\frac{20}{\pi}\right)^5 \sum_{n=1}^{2N-1} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi\eta}{2} + \sum_{n=1}^{2N-1} \{a_n \operatorname{ch} \lambda_n(\xi-1) \\
 &\quad + B_n [(\xi-1) \operatorname{sh} \lambda_n(\xi-1) + b_n \operatorname{ch} \lambda_n(\xi-1)]\} \sin n\pi\eta/2 \\
 \bar{\varphi} &= \sum_{k=1}^{2N-1} C_k [(\eta-1) \operatorname{sh} \lambda_k(\eta-1) - a'_k \operatorname{ch} \lambda_k(\eta-1)] \sin \frac{k\pi\xi}{2} \\
 &\quad + \sum_{l=1}^{2N-1} D_l [(\xi-1) \operatorname{sh} \lambda_l(\xi-1) - a'_l \operatorname{ch} \lambda_l(\xi-1)] \sin \frac{l\pi\eta}{2}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

其中 a_m 、 a_n 、 a'_k 、 a'_l 、 b_m 、 b_n 、 λ_m 和 λ_n 见[5]。 \bar{w} 仅 C_q 条件不满足， $\bar{\varphi}$ 除 $C_{N,s}$ 外其余边界条件均满足。四角简支幕壳的广义变分解法与四边简支相仿，在此略去，详见[5]。

2、动力学问题解

本文针对各种边界条件假设了振型函数及响应函数，用有限自由度近似代替无限自由度体系，并解由变分得出的线性微分方程组。例如，对四边简支条件设

$$\bar{w} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}(t) \sin \frac{m\pi\xi}{2} \sin \frac{n\pi\eta}{2}; \quad \bar{\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} q_{kl}(t) \sin \frac{k\pi\xi}{2} \sin \frac{l\pi\eta}{2} \quad (3.7)$$

若假定模态 m/n 的固有频率为 ω_{mn} ，有频率公式

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D\pi^4}{16\rho a^4} \left\{ [m^2 + (\gamma n)^2]^2 + \frac{48\gamma^4(1-\mu^2)}{\pi^6 \lambda^2 V^2} \cdot \frac{[\alpha_1 - \alpha_2 + 2(\beta_1 + \beta_2)]^2}{[m^2 + (\gamma n)^2]^2} \right\} \quad (3.8)$$

其中 α_2 见[5]。令 $\gamma=1$ ， $V=1$ ， $m=n=1$ ，且设幕壳倾斜角 $\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$ ，则(3.8)与[6]中的解析解完全相同，但式(3.8)适用范围更广。当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时，式(3.8)为矩形板的频率精确公式。其余边界条件的动力学解详见[5]。

最后，对本文一系列解析解由电算考察其收敛性。图3~图4表明，取代表性几组曲线按级数项数不同计算，解析解经受了收敛性考验。

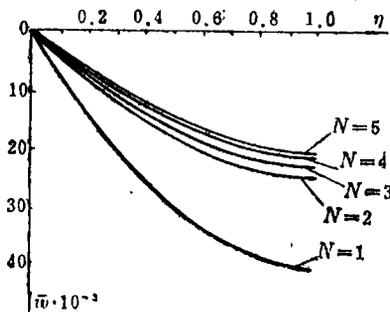


图3 四角简支挠度($\xi=\eta$)

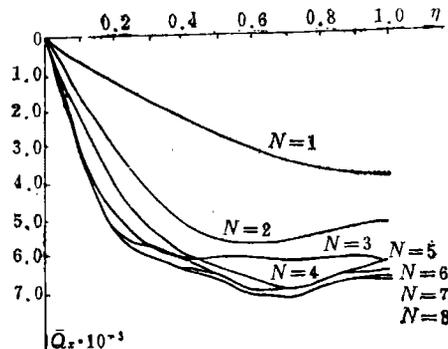


图4 四边简支剪力($\xi=0$)

四、本文解析解与有限元法及试验值比较

共同的幕壳参数为 $\gamma=1, V=0.5, a=0.6m, \mu=0.167$, 容重 $r=2500kg/m^3$. 用混凝土模型($E=2.8 \cdot 10^5 kg/cm^2$)作四边简支($h=6.5cm, f=10.8cm, p_z=0.5kg/cm^2$)及四边固定($h=6.3cm, f=10.5cm, p_z=1.0kg/cm^2$)幕壳试验. 文中解析解与SAPV^[8]程序计算结果比较很接近, 同[7]中的Wilson- θ 法比较结果满意. 解析解和实测值相比吻合.

1 四边简支幕壳前6个频率比较

频率Hz	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
本文	241.16	399.96	399.96	650.35	650.35	669.77
SAPV	242.71	405.01	405.31	665.94	677.20	703.73
相对误差%	-0.64	-1.25	-1.32	-2.34	-3.96	-4.83

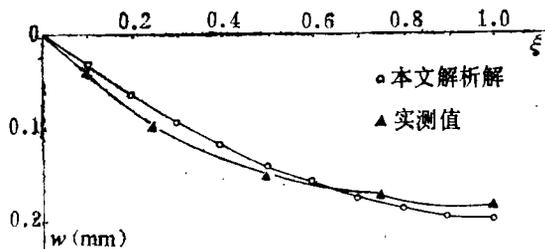
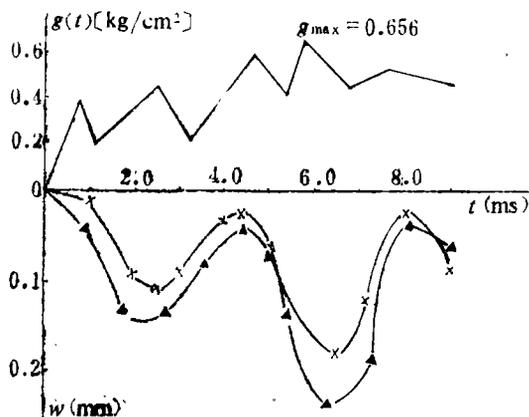


图5 四边简支幕壳均载下挠度值($\eta=1$)



▲ 本文解析解 × Wilson- θ 法(部分节点无转动)
图6 冲击荷载 $g(t)$ 下四边简支幕壳中点挠度

表2 幕壳解析解与实测值频率比较

频率 Hz	SSSS			CCCC	
	[对称-对称振型]		反对称-反对称振型	对称-对称振型	
	f_1	f_2	f_1	f_1	f_2
本文	255.78	724.88	726.55	421.58	868.36
实测值	257	784	700	430	930
相对误差%	-0.47	-7.54	3.79	-1.96	-6.63

表 3

静动力荷载下幕壳中点应力值比较

应力 kg/cm ²	本文解析解			有限元法 ^[7]			SSSS实测值	
	静载 0.7kg/cm ²		冲击荷载	静载 0.7kg/cm ²		冲击荷载	静 载	冲击荷载**
	SSSS	CCCC	SSSS	SSSS	CCCC	SSSS*	0.7kg/cm ²	
上表面	-34.07	-17.12	-45.54	-34.9	-20.8	-36.58	-23.89	-37.66
下表面	11.33	8.824	16.75	17.4	7.3	20.84	12.89	21.52

* 一些单元的节点无转动 ** 用夹具使壳体不致跳动

本文作者得到了浙江大学 400 号研究室在试验上的帮助, 谨致谢意。

参 考 文 献

- [1] 钱伟长, 《变分法及有限元》, 科学出版社 (1980).
- [2] 钱伟长, 《广义变分原理》, 知识出版社 (1985).
- [3] Gurtin, M. E., Variational principles for linear elastodynamics, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16,1 (1963).
- [4] 刘世宁, 弹性扁壳的广义变分原理及扁壳理论的某些问题, 力学学报, 1 (1963).
- [5] 倪海鹰, 应用广义变分原理研究幕壳的静动力问题, 浙江大学硕士学位论文 (1984).
- [6] Опишвили О. Д., *Некоторые Динамические Задачи Теории Обочек*, Москва (1957).
- [7] 裘涛, 幕壳静动力分析, 浙江大学研究生论文 (1981).
- [8] Bathe, K. J., E. L. Wilson and F. E. Peterson, *SAPV A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear System*, Univ. of California, Berkeley (1976).

A Generalized Variational Principle of Composite Shallow Shells and Its Application to the Folded Shell

Ni Hai-ying Tong Jing-yu

(Zhejiang University, Hangzhou)

Abstract

In this paper, a generalized variational principle of elastodynamics in composite shallow shells with edge beams is presented, and its equivalence to corresponding basic equations, ridge conditions and boundary conditions is proved. Then this variational principle is applied to the folded shell structure. By means of double series, the approximate analytical solutions for statics and dynamics under common boundary conditions are obtained. The comparison of our results with FEM computations and experiments shows the analytical solutions have good convergence and their accuracy is quite satisfactory.