

文章编号: 1000-0887(2004)09-0974-09

正弦电磁场中铁磁材料数学模型^{*}

顾晓安¹, 曾 进², 沈荣瀛¹

(1. 上海交通大学 振动、冲击、噪声国家重点实验室, 上海 200030;

2. 上海交通大学 数学系, 上海 200030)

(戴世强推荐)

摘要: 将电磁场理论与弹性力学理论相结合, 建立了描述铁磁材料在正弦电磁场中的数学模型, 并对该模型一类的 4 阶非线性偏微分方程的解进行了讨论。给出其一阶近似后得到的线性偏微分方程的解析表达式和数值计算方法。计算结果表明, 本方法是有效的。

关键词: 正弦电磁场; 铁磁材料; 力学特性; 数学模型

中图分类号: TB535 文献标识码: A

引 言

电力系统中存在着大量的电力设备来生产、输送、分配电能, 如发电机和变压器。为了减少磁路中的涡流损耗, 电力设备的铁心均用厚度为 0.27~0.30 mm 的铁磁材料(硅钢片)叠制而成。在变压器的铁心中分布着正弦交变的电磁场, 其作用在铁心铁磁材料(硅钢片)上的磁场力将诱发硅钢片发生振动, 这种振动将产生噪声污染。

电力设备的振动和噪声问题一直是电力工业生产中的主要问题, 大型电力变压器和发电机振动和噪声的研究始于 20 世纪 20、30 年代。IEEE Transactions 和其它学术期刊都刊载了大量文献。这些文献和专利涉及变压器和发电机振和噪声机理、声学特性、降噪措施等诸多方面的研究, 大多来自试验和经验总结。

分布在电力变压器铁心硅钢片上的磁场力是导致硅钢片发生振动的主要原因, 所以建立磁场力的表达式是解决问题的基础。电力变压器铁心硅钢片是一种铁磁质, 与顺磁质不同, 铁磁质具有复杂的磁致伸缩现象, 因此如何确立一种表征磁致伸缩现象的磁场力公式成为问题的关键。为了解决这个问题, 一些学者运用能量法的虚功原理提出了自己的计算模型, 这些模型理论上比较完善, 但无法用于定量分析。

变压器的铁心由硅钢片叠制而成, 由于每一叠片都与整个绕组交链, 所以所有叠片中的场都相同, 因此分析单片硅钢片的振动特性具有重要意义。

基于上述, 本文选取变压器铁心硅钢片为研究对象, 将电磁场理论与弹性力学理论相结合, 建立了一组既能用于定性分析又能保证较高计算精度定量分析的铁磁质中磁场力解析公

* 收稿日期: 2002_11_19; 修订日期: 2004_03_25

作者简介: 顾晓安(1969—), 男, 江苏常州人, 博士(Tel: + 86_21_62376358_223; Fax: + 86_21_62376206; E-mail: guxiaoa6786@sina.com);

沈荣瀛(联系人, Tel: + 86_21_62932221_812; E-mail: ryshen@public4.sta.net.cn)。

式。并将这些公式用于描述正弦电磁场中铁磁材料的数学模型中。需要说明的是,文中的建模方法不仅仅适用于电力变压器,也适用于其它与变压器具有相似磁路结构的电力设备。

1 磁场力的一般数学表达

1.1 磁场力的一般数学表达式

基于简化的励磁模型,线性、各向同性的铁磁介质所受的磁场力体积力密度为^[1]

$$f = J \times B - \frac{1}{2} H^2 \cdot \left(\mu + \frac{1}{2} \cdot \left[H^2 \tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \right] \right), \quad (1)$$

式中 f 是磁场力体积力密度矢量, J 是电流密度矢量, B 是磁感应强度矢量, H 是磁场强度, μ 是介质的磁导率, τ 是介质的体积密度。文中所有变量的单位均遵照国际电磁量单位制。

式(1)中的第一项 ($J \times B$) 是洛伦兹力;第三项 ($0.5 \cdot (H^2 \tau (\partial \mu / \partial \tau))$) 用来表征磁致伸缩现象。对于线性、各向同性的铁磁介质,可以认为介质的磁导率只与其体积密度有关, $\mu = 0$ 。

式(1)中的磁场力体积力密度为矢量形式,将其分解成沿直角坐标的3个分量,经推导可得:

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu H_x^2 - \frac{H^2}{2} \left(\mu - \tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} (\mu H_x H_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu H_x H_z), \quad (2)$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial x} (\mu H_y H_x) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu H_y^2 - \frac{H^2}{2} \left(\mu - \tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} (\mu H_y H_z), \quad (3)$$

$$f_z = \frac{\partial}{\partial x} (\mu H_z H_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu H_z H_y) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu H_z^2 - \frac{H^2}{2} \left(\mu - \tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \right) \right]. \quad (4)$$

电力设备(如电力变压器)的铁心结构具有对称性(可取为关于 xy 坐标平面对称);由于铁磁材料的磁导率很大,在忽略局部漏磁的条件下,可以认为所有磁通集中在铁心磁路中通过。基于上述,如果选择坐标系(见图1),使 x 轴与磁场方向平行,可得

$$H = H_x(y), H_y = H_z = 0. \quad (5)$$

将式(5)分别代入式(2)、(3)和(4),可得

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{H^2}{2} \left(\mu - \tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \right) \right], \quad (6)$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y} \left[- \frac{H^2}{2} \left(\mu - \tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \right) \right], \quad (7)$$

$$f_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{H^2}{2} \left(\mu - \tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \right) \right]. \quad (8)$$

磁场力 F 可表示为

$$\begin{aligned} F &= \int_V f dV = i \int_V f_x dV + j \int_V f_y dV + k \int_V f_z dV = \\ & i \iiint \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{H^2}{2} \left(\mu - \tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \right) \right] dx dy dz + j \iiint \frac{\partial}{\partial y} \left[- \frac{H^2}{2} \left(\mu - \tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \right) \right] dx dy dz + \\ & k \iiint \frac{\partial}{\partial z} \left[- \frac{H^2}{2} \left(\mu - \tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \right) \right] dx dy dz. \end{aligned} \quad (9)$$

1.2 表征磁致伸缩现象的磁场力的数学描述

试验验证推导铁磁质中的磁场力公式时必须充分考虑介质相邻粒子间的内应力,即介质

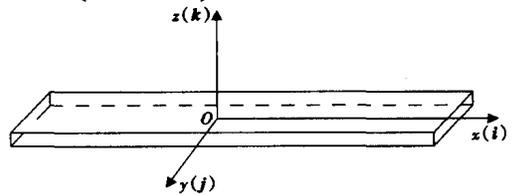


图1 硅钢片弯曲的坐标系

内部分子场的作用(有关分子场理论的讨论已超出本文的内容)• 为了解决这个问题,一些学者运用能量法的虚功原理提出了自己的计算模型^[2],这些模型理论上比较完善,但无法用于定量分析,这点可从式(1)看出,从式(1)可知,表征磁致伸缩现象的磁场力表达式为

$$f_c = \frac{1}{2} \cdot \left[H^2 \tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \right] \cdot \quad (10)$$

可见要想求出 f_c ,首先须求出 $\partial \mu / \partial \tau$,也就是介质的磁导率随介质的体积密度变化的规律,实践证明^[2],无论从数学还是物理的角度考虑,这都是一件十分困难的事情。

磁致伸缩现象是一种发生在铁磁质中的独特现象• 从宏观上说,所谓磁致伸缩就是励磁时,沿磁力线方向材料的尺寸要增加,而垂直于磁力线方向材料的尺寸要缩小;从微观上说,就是在材料的磁化过程中,材料将从磁化程度方向各异的多磁畴状态变成与外磁场同方向单磁畴状态,与此同时,介质立体晶状体结构和原子间距发生变化。

磁致伸缩现象通常用磁致伸缩率 ε 来表征,其表达式为

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (11)$$

其中 ε 是磁致伸缩率(无量纲), l 是硅钢片任一方向尺寸, Δl 是硅钢片该方向最大变形量。

随着研究工作的深入进行,越来越多的研究人员认为单从理论分析的角度研究磁致伸缩现象是不切实际的,应该采用理论分析与实验研究相结合的方法• 本文基于这种思路,从能量守恒的角度出发,引入弹性力学中的应变能体积密度概念,用应变能来表征磁致伸缩现象引起的能量变化,即消耗在使介质立体晶状体结构和原子间距发生变化的这一部分能量,从而给出一种能用于定性分析又能保证较高计算精度的定量分析的铁磁质中磁场力解析公式• 从式(1)可以看出,磁致伸缩率 ε 实际上就是材料的最大应变,由于铁磁材料(硅钢片)沿 z 方向, y 方向与 x 方向发生磁致伸缩,所以在计算应变时忽略剪切应变。

由弹性力学理论可知,弹性体发生形变时,将具有应变能,单位体积的应变能(应变能密度)可以表示为^[3]

$$U(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon^T D_1 \varepsilon, \quad (12)$$

其中:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$D_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

E 是材料的弹性模量, ν 是泊松比• 就是说,这部分磁场力对铁磁质所作的功转化为应变能储存在铁磁质中。

磁致伸缩现象具有周期性,对于圆频率 ω 的正弦交变电磁场,它的变化频率是 2ω • 可以假设表征磁致伸缩现象的磁场力也按这一频率变化• 即

$$F_c = F_{c\max} \sin 2\omega t \cdot \quad (15)$$

这样的假设有其理论和试验上的依据• 从理论上说,任何一个周期函数,只要其满足狄利

克雷(Dirichlet)条件,总可以展开为以基频及其倍频为频率的傅立叶级数;同时大量试验表明^[4],在变压器等电力设备的磁路振动谱中励磁电源频率的两倍频占有很大优势;因此,将两倍频取为主部是合理的。

从宏观上讲,外加的交变电磁场对铁磁材料所作的功(指有功部分,无功部分在一个变化周期内不做功)可以转化为三部分能量:一部分转化为磁滞损耗;一部分在铁磁质内产生感应电势和涡流,转化为涡流损耗(上述两部分能量所对应的磁场力可用式(1)中的 $\mathbf{J} \times \mathbf{B} - 0.5H^2 \cdot \mu$ 部分表示)。第三部分能量用于使铁磁质发生磁致伸缩现象。

当正弦磁场从零变化到四分之一周期时,磁场强度达到峰值,铁磁质的磁致伸缩率也达到峰值,此时铁磁质内所具有应变能最大。由功能转化关系,可知

$$\int_V \mu(\varepsilon) dV = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon^T \mathbf{D}_1 \varepsilon dV = \int_0^{T/4} \int_0^{\Delta x} F_{cx} dl_x dt + \int_0^{T/4} \int_0^{\Delta y} F_{cy} dl_y dt + \int_0^{T/4} \int_0^{\Delta z} F_{cz} dl_z dt, \quad (16)$$

其中: T 为时变磁场的周期。考虑到此处 ε 是弯曲问题中的线应变,则 $dl_x = \varepsilon dx$, 其它方向亦然。

取出式(16)等号右边任一项进行积分,则任一方向的磁场力可以表示为

$$F_{cx} = F_{cx\max} \sin 2\omega t = \frac{\omega \sin 2\omega t}{\Delta l_x} \int_V \mu(\varepsilon_x) dV = \frac{\omega \sin 2\omega t}{\Delta l_x} \int_V \frac{1}{2} E \varepsilon_x^3 dV, \quad (17)$$

$$F_{cy} = F_{cy\max} \sin 2\omega t = \frac{\omega \sin 2\omega t}{\Delta l_y} \int_V \mu(\varepsilon_y) dV = \frac{\omega \sin 2\omega t}{\Delta l_y} \int_V \frac{1}{2} E \varepsilon_y^3 dV, \quad (18)$$

$$F_{cz} = F_{cz\max} \sin 2\omega t = \frac{\omega \sin 2\omega t}{\Delta l_z} \int_V \mu(\varepsilon_z) dV = \frac{\omega \sin 2\omega t}{\Delta l_z} \int_V \frac{1}{2} E \varepsilon_z^3 dV. \quad (19)$$

下面对磁场体积力 3 个方向分量的大小进行讨论。由于铁磁材料(硅钢片)的厚度(z 方向尺寸)和长度(x 方向尺寸)、宽度(y 方向尺寸)相比甚小,所以 Δl_z 亦是小量。由式(17)~(19)可知,3 个分量中 z 方向的磁场力占优势。也就是说,按图 1 选取坐标系,铁磁材料(硅钢片)在励磁状态下的形变将以 z 方向的弯曲变形为主要特征。这点已经在工程中得到验证。

2 数学模型

2.1 铁磁材料的几何特点及其力学模型

为了减少磁路中的涡流损耗,电力设备的铁心均用厚度为 0.27~0.30 mm 的铁磁材料(硅钢片)叠制而成,其厚度与长度和宽度方向尺寸相比,数量级通常在 $10^{-3} \sim 10^{-4}$;铁磁材料的材料属性是弹性体,所以它的振动问题可以归结为弹性薄板的弯曲振动。如图 1 建立坐标系,基于板的厚度(z 方向尺寸)比其它两个方向尺寸小得多,以及挠度比厚度又小得多的假设,弹性薄板理论在分析板的弯曲问题时,忽略厚度方向的正应力;认为薄板中面内的各点没有平行于中面的位移;薄板中面的法线在变形后仍保持为法线。利用上述假设可以将薄板的弯曲问题简化为二维问题且全部应力和应变可用中面的挠度 v 表示。

求解挠度 v 的微分方程^[3,6]

$$D_0 \left[\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} \right] = q(x, y), \quad (20)$$

其中: $D_0 = Eh^3/[12(1-\nu^2)J]$ 是板的弯曲刚度。 E 是材料的弹性模量, ν 是材料的泊松比, h 是板的厚度。式中 $q(x, y)$ 是作用在板表面 z 方向的分布载荷。

2.2 数学模型

由麦克斯韦的电磁场理论可知

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = - \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \quad (21)$$

其中: \boldsymbol{E} 为电场强度矢量, 也就是说对于一个按 $E \cos \omega t$ 规律变化的电场, 将感生出一个按正弦规律变化的磁场

$$H_x(y, t) = \frac{H_x(\gamma)}{\omega} \sin \omega t \quad (22)$$

此时, 铁磁材料在磁场力的作用下发生弯曲振动, 式(20)变为

$$D_0 \left[\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} \right] + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q(x, y, t), \quad (23)$$

其中: ρ 为材料的单位面积质量, 对于线性、均匀、各向同性的铁磁介质, 可以近似认为磁场体积分密度处处相等, 将式(19)式与式(9)结合代入式(23), 可得

$$D_0 \left[\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} \right] + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\sin^2 \omega t}{\omega^2} \left[- \frac{\mu H^2}{2} \right] + \frac{\omega \sin 2 \omega t}{\Delta z} \int \frac{1}{2} E \varepsilon^3 dz, \quad (24)$$

其中, ε 具有如下表达式:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon(v, z) \quad (25)$$

ε_0 是未发生形变时的磁致伸缩率, $\varepsilon(v, z)$ 是板发生形变导致的磁致伸缩率变化量, 式(23)是一个四阶非线性偏微分方程, 根据铁磁材料(硅钢片)的紧固方式, 可将两端面($x = \pm l_x/2$)的边界条件确定为两端固支, 即

$$\begin{cases} v_i = 0 & (i = 1, 2), \\ \frac{\partial v_i}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, \end{cases} \quad (26)$$

其中 \boldsymbol{n} 为断面的外法线方向

两个自由边 ($y = \pm l_y/2$) 的边界条件为,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial \boldsymbol{n}^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \boldsymbol{n}^2} + \frac{2 \partial^2 v}{\partial s^2} \right] = 0, \end{cases} \quad (27)$$

其中 s 表示边界断面的切线方向

$$\text{初始条件: } t = 0 \text{ 时, } \begin{cases} H = 0, \\ v = 0 \end{cases} \quad (28)$$

3 数学模型的解

3.1 解析解的讨论

下面对式(24)进行一些讨论, 经典电磁场理论建立的时变电磁场中的磁场力模型是基于下述假设^[5]: “这些结果的推导是以可逆变化这一假设为基础的, 并且我们假设场的建立是如此之慢, 以致它可以用一连串的稳定状态来表示。”式(24)中 $\partial^2 v / \partial t^2$ 项的物理意义是板的法向加速度, 在上述假设条件下, 可以认为板的法向形变速度近似于匀速, 法向加速度近似于零, 式(24)变为:

$$D_0 \left[\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} \right] = \frac{\sin^2 \omega t}{\omega^2} \left[- \frac{\mu H^2}{2} \right] + \frac{\omega \sin 2 \omega t}{\Delta z} \int \frac{1}{2} E \varepsilon^3 dz \quad (29)$$

严格地说式(29)不再是一个振动方程, 而是一个位势方程。从数学的角度讲, 它不再是一个波动方程, 而是一个定常方程。给定不同的 t 值就可以动态地描述在正弦电磁场作用下铁磁材料随磁场变化而发生的形变过程。这正是本文所关心的。式(29)是一个二维偏微分方程, 但仍是非线性的, 寻求它的数值解并不容易。这里假设对于线性、均匀、各向同性的铁磁介质, 可以近似认为

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon(v) \quad (30)$$

将 $\varepsilon(v)$ 写成两阶泰勒级数形式, 则

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + v_0 + c_1 v + c_2 v^2 + O(v^3) \quad (31)$$

将式(31)代入式(29), 并忽略高阶项, 可得

$$D_0 \left[\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} \right] = \frac{\sin^2 \omega t}{\omega^2} \left[- \frac{\mu H^2}{2} \right] + \frac{1}{2} E \omega (\varepsilon_0 + v_0 + c_1 v + c_2 v^2)^2 \sin 2 \omega t \quad (32)$$

这里需要说明的是, 通常铁磁材料的使用状态远离初始饱和阶段, 此时, 铁磁材料的磁化比较容易并跟从易磁化方向, 板的形变与强感应阶段相比较小, 可以近似认为 $\varepsilon = \varepsilon_0$ 。于是, 式(32)可写成

$$D_0 \left[\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} \right] = \frac{\sin^2 \omega t}{\omega^2} \left[- \frac{\mu H^2}{2} \right] + \frac{1}{2} E (\varepsilon_0)^2 \omega \sin 2 \omega t \quad (33)$$

式(33)是一个四阶线性偏微分方程, 可以简化写成如下形式

$$\Delta^2 v = v_{4x} + 2v_{2x2y} + v_{4y} = c_1 \sin^2 \omega t + c_2 \sin 2 \omega t, \quad (34)$$

其中: $c_1 = -\mu H^2 / 2D_0 \omega^2$, $c_2 = E(\varepsilon_0)^2 / 2D_0$ 。在讨论式(34)的解之前, 先求一个两阶泊松方程 $\Delta^2 v = c$ 的解, 可以尝试用行波法求其定解。

假设 $v = v(x + ay)$, 代入式 $\Delta^2 v = c$ 则

$$\begin{cases} v^{(4)} = 2a^2 v^{(4)} + a^4 v^{(4)} = c, \\ (a^4 + 2a^2 + 1)v^{(4)} = c, \\ v^{(4)} = c(a^4 + 2a^2 + 1)^{-1} = c \end{cases} \quad (35)$$

其解的形式为:

$$\begin{aligned} v &= \frac{c_0}{4!} \xi^4 + a_1 \xi^3 + a_2 \xi^2 + a_3 \xi + a_4 \\ v(x + ay) &= \frac{c_0}{4!} (x + ay)^4 + a_1 (x + ay)^3 + \\ &\quad a_2 (x + ay)^2 + a_3 (x + ay) + a_4 \end{aligned} \quad (36)$$

式(36)中共有 5 个待定常数, 可以利用边界条件下其值。问题在于, v 的低阶偏导数是有其对应的物理意义的, 可以很容易地给出这部分边界条件; 但是, 其高阶偏导数往往没有对应的物理意义, 所以无法给出式(36)的所有定解条件, 也就无法得到其定解。

对于式(36), 由于时间 t 与坐标 x, y 无关, 同时系统满足线性叠加原理, 其具有如下形式的解,

$$\begin{cases} v = v_1(x + ay) \sin^2 \omega t + v_2(x + by) \sin 2 \omega t, \\ v = v_1(x + ay) \left[\frac{1 - \cos 2 \omega t}{2} \right] + v_2(x + by) \sin 2 \omega t, \end{cases} \quad (37)$$

其中 v_1, v_2 分别具有式(36)的解析形式。式(37)说明频率为 50Hz 的电磁场将诱发铁磁材料产

生频率为 100Hz 的形变, 这和试验结果是相一致的。

3.2 数值计算

选取一台单相三柱变压器旁柱上的硅钢片为研究对象, 按图 1 建立坐标系, 其片长 (x 方向) 为 300 mm, 片宽 (y 方向) 为 25 mm, 片厚 (z 方向) 为 0.3 mm。材料特性 $E = 1.95 \times 10^{11}$ Pa, $\nu = 0.25$, $\epsilon = 0.6 \times 10^{-6}$; 励磁条件为标称额定工作磁通密度 1.6 Tesla, 励磁频率 (ω) 为 $100 \pi/s$

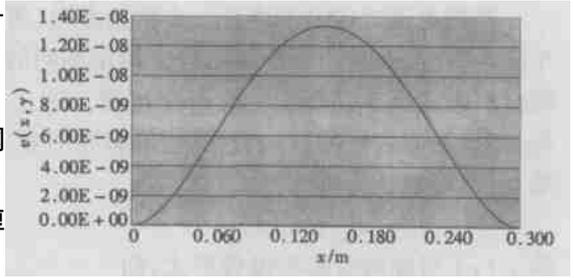


图 2 涡流引起的板变形

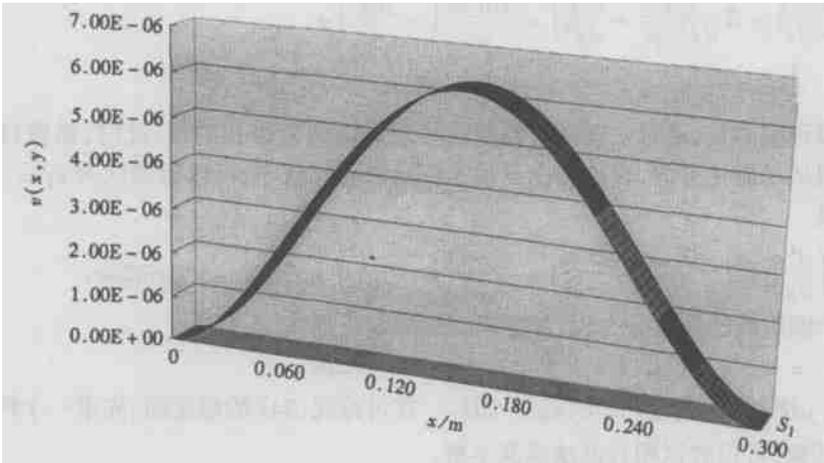
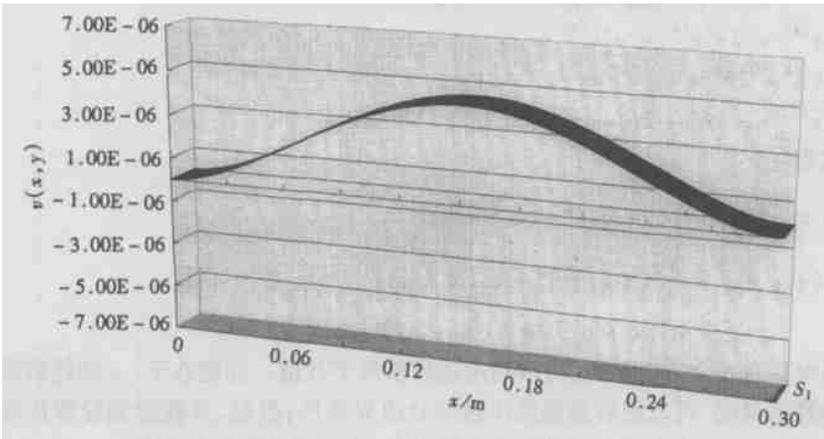


图 3 板在涡流和磁致伸缩共同作用下的最大变形



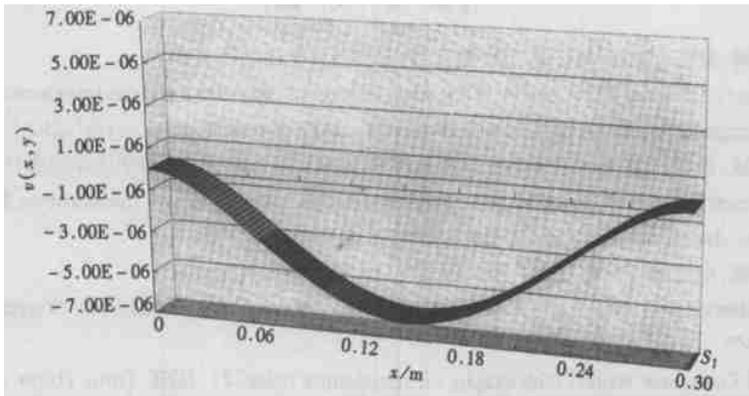
(a) $t = 0.0025 s$

对于形如式(29)的两维四阶双曲型偏微分方程, 可以按下式构造差分格式:

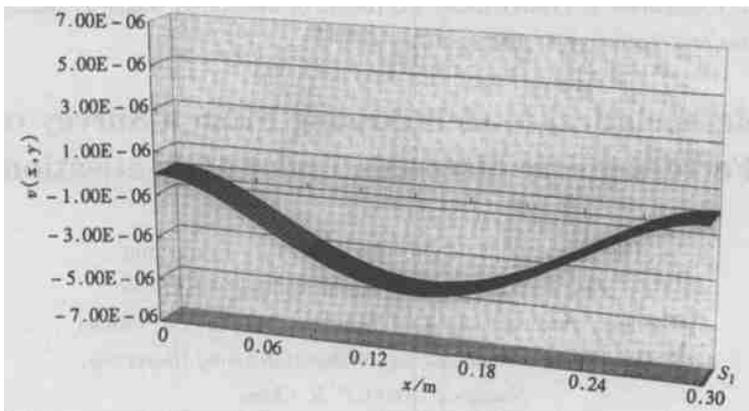
$$20u_{i,j} - 8(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + 2(u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}) + (u_{i+2,j} + u_{i-2,j} + u_{i,j+2} + u_{i,j-2}) = f_{i,j} \times h^4,$$

其中: 步长 $h = 0.0025$ 。采用 Gauss_Seidel 迭代对由上述差分格式构成的线性方程组进行求

解, 求解结果见图 2~ 图 4。



(b) $t = 0.0075 \text{ s}$



(c) $t = 0.00875 \text{ s}$

图 4 板在涡流和磁致伸缩共同作用下不同时刻的变形

将 $\omega t = \pi/2$, $\varepsilon_0 = 0$ 代入式(33) 可得图 2 所示结果, 它表征铁磁材料单纯由感生涡流而引起的变形; 图 3 表征感生涡流和磁致伸缩现象引起的板的最大变形。将上述三张图中的数据进行比较可知, 铁磁材料在磁场中的形变主要取决于磁致伸缩率 ε^* 。图 4 描述正弦电磁场中铁磁材料的变形过程, 时间 t 分别取为 $t = 0.0025 \text{ s}$, 0.0075 s , 0.00875 s 。

表 1 给出了数值计算与试验结果比较, 其中数值均为不同励磁条件下板的挠度的峰值。

$B / (\text{Tesla})$	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
计算结果 v_{\max} / m	2.6×10^{-6}	3.4×10^{-6}	4.7×10^{-6}	5.8×10^{-6}	6.4×10^{-6}
实验结果 v_{\max} / m	2.1×10^{-6}	2.7×10^{-6}	3.9×10^{-6}	4.9×10^{-6}	$5.1 \times 4.9 \times 10^{-6}$

比较结果表明, 由式(33)求解的值的精度完全可以满足工程应用的需要。

4 结 论

电磁振动和噪声是工程中常见的复杂问题^[7,8]。本文将电磁场理论与弹性力学理论相结合, 建立了描述铁磁材料在正弦电磁场中力学特性的数学模型。虽然模型是建立在铁磁材料是线性、均匀、各向同性介质以及简化的励磁条件基础之上的, 数值计算结果与实验结果比较表明数学模型是有效的, 其解的精度完全可以满足工程应用的需要。

[参 考 文 献]

- [1] 冯慈璋. 静态电磁场[M]. 第二版. 西安: 西安交通大学出版社, 1998.
- [2] Reyne G, Coulomb J L. A survey of the main aspects of magnetic forces and mechanical behaviour of ferromagnetic materials under magnetisation[J]. IEEE Trans Magnetics, 1987, **23**(5): 3765—3767.
- [3] 王勛成, 邵敏. 有限单元法基本原理和数值方法[M]. 第二版. 北京: 清华大学出版社, 1997.
- [4] Andersen Douglas W, Myles Mark M. Field of sound radiation by power transformers[J]. IEEE Trans Power Apparatus and Systems, 1981, **100**(7): 3513—3524.
- [5] 黄席椿. 电磁能与电磁力[M]. 第二版. 北京: 人民教育出版社, 1983.
- [6] Zienkiewicz O C. The Finite Element Method[M]. London: Mcgraw_hill Book Company(UK) Limited, 1977.
- [7] IEEE Committee report. Bibliography on transformer noise[J]. IEEE Trans Power Apparatus and Systems, 1968, **87**(2): 372—387.
- [8] Foster S L, Reiplinger E. Characteristics and control of transformer sound[J]. IEEE Trans Power Apparatus and Systems, 1981, **100**(3): 1072—1077.

Mathematical Models Arising From a Survey of Ferromagnetic Materials Under Magnetisation

GU Xiao_an¹, ZENG Jin², SHEN Rong_ying¹

(1. State Key Laboratory of Vibration, Shock and Noise,
Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P. R. China;
2. Department of Mathematics, Shanghai Jiaotong University,
Shanghai 200030, P. R. China)

Abstract: Sinusoidal alternating magnetic fields established inside the cores would cause vibrations of silicon steel sheets and make noises. The mechanical behavior of ferromagnetic materials must be modeled for such complicated problems. Mathematical models describing the mechanical behavior of ferromagnetic materials under magnetization were focused on. Through combination of the electromagnetic field theory with the theory of elastic mechanics, several nonlinear systems of fourth_order partial differential equations were deduced. By making further assumptions, the first_order approximation of the above equations was established. Although the models were deduced based on assumption of linear, homogeneous, isotropic materials and simplified magnetization model, the results, which the formulations give, are proved to be good enough for engineering application.

Key words: sinusoidal magnetic field; ferromagnetic material; methanical behavior; mathematical model