应用数学和力学，第7卷第7期（1986年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

小参数在高阶导数项的椭圆型方程第一边值问题的一致收敛差分格式*

刘 必 跃

（南京大学，1985年1月25日收到）

摘 要

本文讨论了曲边区域上小参数 ε 在高阶导数项的椭圆型方程第一边值问题，从一致收敛的必要条件出发构造了特殊的差分格式，证明了差分方程问题解的一致收敛性，估计了收敛的阶数，并讨论了差分方程解的渐近性态。

在实际问题中存在大量的高阶导数项含有小参数 ε 的微分方程问题，由于这类问题具有边界层奇性，在计算时利用古典差分方法将遇到很大困难，出现数值不稳定。因此，必须采用特殊方法处理这类问题。近年来出现了一些用差分方法处理这类问题的工作。例如A. M. Ильин[1], R. B. Kellogg和A. Tsan[2], E. P. Doolan, J. J. H. Miller, W. H. A. Schilders[3] 等人分别对常微分方程问题构造了关于 ε 一致收敛的差分格式。苏煜城，吴启光[4]对椭圆型方程第一边值问题

$$L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \varepsilon\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}-a(x,y)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}=f(x,y) \qquad \left(0<\begin{matrix}x\\y\end{matrix}<1\right)$$

$$u_\varepsilon|_\Gamma=0$$

构造了一致收敛的差分格式，并证明了差分问题的解的渐近性态与微分方程问题的解的渐近性态是一致的。

本文讨论的是曲边区域上高阶导数项$\partial^2u/\partial y^2$含有小参数的椭圆型方程第一边值问题。对这个问题，M. Zlamal[5]在理论上讨论了解的渐近性质。本文在第一节讨论了摄动问题和相应退化问题的解的性质，构造了摄动问题解的渐近表达式；在第二节证明了差分格式一致收敛的必要条件，并据此构造了摄动问题的差分格式；第三节讨论了差分方程问题解的一致收敛性；第四节讨论了差分方程问题解的渐近性态；第五节给出了数值结果。

一、微分方程问题

在曲边区域 $\Omega+\partial\Omega$ 内讨论椭圆型方程第一边值问题：

* 苏煜城推荐。

$$L_\varepsilon u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} - B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} - C(x,y)u$$

$$= f(x,y) \qquad (x,y)\in\Omega \tag{1.1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(x,y) \tag{1.2}$$

其中 $\varepsilon>0$ 是小参数，$\Omega=\{(x,y)\,|\,y_0\leqslant y\leqslant y_*$，且 $\nu_1(y)\leqslant x\leqslant\nu_2(y)\}$，$\partial\Omega=\bigcup_{i=1}^{4}\Gamma_i$，

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma_1=\{(x,y)\,|\,x=\nu_1(y),\ \text{且}\ y_0\leqslant y\leqslant y_*\}\\ \Gamma_2=\{(x,y)\,|\,y=y_0,\ \text{且}\ \nu_1(y_0)<x<\nu_2(y_0)\},\\ \Gamma_3\{(x,y)\,|\,x=\nu_2(y),\ \text{且}\ y_0\leqslant y\leqslant y_*\}\\ \Gamma_4=\{(x,y)\,|\,y=y_*,\ \text{且}\ \nu_1(y_*)<x<\nu_2(y_*)\}\end{array}\right\} \tag{1.3}$$

$$\varphi(x,y)|_{\Gamma_2}=\psi(x),\quad \varphi(x,y)|_{\Gamma_1}=\varphi_1(y),\quad \varphi(x,y)|_{\Gamma_3}=\varphi_2(y) \tag{1.4}$$

假定方程的系数、右端函数、边值函数以及区域边界函数 ν_1，ν_2 等满足下述条件：

1) $B(x,y)\geqslant\alpha>0$，$C(x,y)\geqslant\beta>0$； (1.5)

2) $A(x,y)$，$B(x,y)$ 具有三阶连续偏导数，$C(x,y)$，$f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $A(x,y)$，$B(x,y)$，$C(x,y)$ 以及它们的三阶偏导数关于变量 x、y 分别满足 Lipschitz 条件；

3) $\nu_1(y)$，$\nu_2(y)$ 和 $\psi(x)$ 具有四阶连续导数，$\varphi_1(y)$，$\varphi_2(y)$ 有三阶导数，且 ν_1，ν_2，φ 的导数满足 Lipschitz 条件。

对问题 (1.1)，(1.2) 的解有下面的先验估计

引理 1 设 u 是适当光滑的函数

1) 若 $L_\varepsilon u\leqslant 0 \quad ((x,y)\in\Omega)$，$u|_{\partial\Omega}\geqslant 0$

则

$$u\geqslant 0 \qquad ((x,y)\in\bar{\Omega})$$

2) $$|u|\leqslant c(\max_{\partial\Omega}|u|+\max_{\Omega}|L_\varepsilon u|) \tag{1.6}$$

其中 c 是与 ε，u 无关的常数。

当 $\varepsilon=0$ 时，问题 (1.1)，(1.2) 退化为下述问题：

$$L_0 u_0 \equiv \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A(x,y)\frac{\partial u_0}{\partial x} - B(x,y)\frac{\partial u_0}{\partial y} - C(x,y)u_0$$

$$= f(x,y) \qquad ((x,y)\in\Omega) \tag{1.7}$$

$$u_0|_{\Gamma_1}=\varphi_1(y),\quad u_0|_{\Gamma_3}=\varphi_2(y),\quad u_0|_{\Gamma_2}=\psi(x) \tag{1.8}$$

在边界 Γ_4 上边界条件失去，因而原问题的解在此边界附近具有边界层奇性。

我们知道[6]，对问题(1.7)，(1.8) 来说，如果在点 $(\nu_1(y_0),\ y_0)$，$(\nu_2(y_0),\ y_0)$ 成立一定的相容性条件，则(1.7)，(1.8) 的解 u_0 关于 y 的二阶导数 $\partial^2u_0/\partial y^2$ 是有界的，否则，$\partial^2u_0/\partial y^2$ 将在 $(\nu_1(y_0),\ y_0)$，$(\nu_2(y_0),\ y_0)$ 附近出现奇性。为了揭示 $\partial^2u_0/\partial y^2$ 在上述两点附近的奇性，希望在下面渐近解和数值解中有较一般的结果，我们对退化问题(1.7)，(1.8)不加相容性条件，按〔5〕中所述方法考虑右端函数 $f(x,y)$ 的一般情形。

定义函数 $$F(x,y)=\omega\left(\frac{y-y_0}{\delta}\right)f(x,y) \tag{1.9}$$

其中

$$\omega\left(\frac{y-y_0}{\delta}\right)\begin{cases}=0 & (0\leqslant y-y_0\leqslant\delta/2)\\ =1 & (y-y_0\geqslant\delta)\\ \leqslant 1 & (\delta/2\leqslant y-y_0\leqslant\delta)\end{cases}$$

$c\varepsilon<\delta<1$，c 为适当选取的一个固定正数。

设v_0是下面问题的解

$$L_0v_0\equiv\frac{\partial^2v_0}{\partial x^2}+A(x,y)\frac{\partial v_0}{\partial x}-B(x,y)\frac{\partial v_0}{\partial y}-C(x,y)v_0=F(x,y)\tag{1.10}$$

$$v_0|_{\Gamma_i}=u_0|_{\Gamma_i}\qquad(i=1,\ 2,\ 3)\tag{1.11}$$

类似于[5]中的讨论，我们可以证得退化问题(1.7)，(1.8)的解$u_0(x,y)$和问题(1.10)，(1.11)的解$v_0(x,y)$有下面的关系：

引理 2
$$u_0=v_0+O(\delta)\tag{1.12}$$

并且
$$\frac{\partial^2v_0}{\partial y^2}=O(\delta^{-1})\tag{1.13}$$

按 Люстерник-Вишик 方法我们可以构造摄动问题(1.1)，(1.2)的解的渐近级数展开

$$u=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^iu_i+\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^iw_i\tag{1.14}$$

其中u_i是抛物方程混合边值问题的解，w_i是边界层函数，它们有以下形式

$$w_0=[\varphi(x,y_*)-u_0(x,y_*)]\exp[-B_0(y_*-y)/\varepsilon]\tag{1.15}$$

$$w_i=P_{2i}\exp[-B_0(y_*-y)/\varepsilon]\tag{1.16}$$

其中P_{2i}是Люстерник-Вишик 多项式$(i=1,\ 2,\cdots)$，$B_0=B(x,y_*)$，u_0是(1.6)，(1.7)的解。如在(1.12)中只取前二项，我们有下面的估计

引理 3 问题(1.1)，(1.2)的解u有下面的渐近展开式

$$u=u_0+w_0+O(\varepsilon\cdot\delta^{-1}+\delta)$$

证明 令$\Psi=u_0+w_0+w-(u_0-v_0)-u=v_0+w_0+w-u$

其中v_0是(1.10)，(1.11)的解，w满足方程$L_\varepsilon w=f(x,y)-F(x,y)$以及边界条件$w|_{\partial\Omega}=0$。由引理2知$u_0-v_0=O(\delta)$。由$v_0$，$w$，$u$满足的方程以及不等式

$$\left(\frac{y_*-y}{\varepsilon}\right)^k\exp[-B_0(y_*-y)/\varepsilon]\leqslant c\exp[-\alpha(y_*-y)/2\varepsilon]\tag{1.17}$$

可得
$$|L_\varepsilon\Psi|=\left|\varepsilon\frac{\partial^2v_0}{\partial y^2}+L_\varepsilon w_0\right|$$
$$\leqslant c\{\varepsilon\cdot\delta^{-1}+\exp[-\alpha(y_*-y)/2\varepsilon]\}$$

构造闸函数$\phi=c\{\delta+\varepsilon\cdot\delta^{-1}+\varepsilon\cdot\exp[-\alpha(y_*-y)/2\varepsilon]\}$，由引理1可得

$$|\Psi|\leqslant c(\delta+\varepsilon\cdot\delta^{-1}+\varepsilon)$$

令 $w=\exp[(y-y_0)/\delta]\cdot Y$，则$Y$满足

$$\frac{\partial^2Y}{\partial x^2}+\varepsilon\frac{\partial^2Y}{\partial y^2}-\left(B-\frac{2\varepsilon}{\delta}\right)\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{1}{\delta}\left(B+\delta\cdot c-\frac{\varepsilon}{\delta}\right)Y$$
$$=\exp[-(y-y_0)/\delta](f-F)\tag{1.18}$$

$$Y|_{\Gamma}=0 \tag{1.19}$$

又$(B+\delta\cdot c-\varepsilon/\delta)/\delta\geqslant c'/\delta$，$c'$是与$\varepsilon,\delta$无关的常数，由极值原理得到$|Y|\leqslant c\delta$。因为$w=\exp[(y-y_0)/\delta]\cdot Y$，所以，当$0\leqslant y-y_0\leqslant\delta$时，$w=O(\delta)$。又在区域

$$\bar{\Omega}'=\bar{\Omega}-\{(x,y)\,|\,y_0\leqslant y\leqslant y_0+\delta,\ \nu_1(y)\leqslant x\leqslant\nu_2(y)\}\text{ 上，}f-F=0,$$

$$L_\varepsilon w=0 \qquad ((x,y)\in\Omega')$$

$$w|_{\partial\Omega'}=O(\delta)$$

故$w=O(\delta)$，$(x,y)\in\bar{\Omega}'$，因此在$\bar{\Omega}$上都有$w=O(\delta)$。综合前面的结果，我们得到

$$u=u_0+w_0+O(\delta+\varepsilon\cdot\delta^{-1})$$

二、差分格式的构造

我们首先对区域进行剖分，作直线$y_j=j\tau$，$x_i=ih$，$\tau=\dfrac{y_*-y_0}{N}$，$(0\leqslant j\leqslant N,\ 0\leqslant i\leqslant M)$。记$\omega_{h,\tau}$为网格$\{y_j=j\tau,\ x_i=ih\}$的节点与区域$\Omega$的交集，$\partial\omega_{h,\tau}$为$\omega_{h,\tau}$的边界点，并记$\partial\omega_{i,h,\tau}=\partial\omega_{h,\tau}\cap\Gamma_i$ $(i=1,\cdots,4)$。

若$(x,y)\ \omega_{h,\tau}$，则与(x,y)相邻的点为$(x+h^+,y)$，$(x-h^-,y)$，$(x,y-\tau^-)$，$(x,y+\tau^+)$；设$g(x)$为适当光滑的函数，记

$$\left.\begin{aligned}
&g_{\bar{x}\hat{x}}=\frac{2}{h^++h^-}\left\{\frac{g(x+h^+)-g(x)}{h^+}-\frac{g(x)-g(x-h^-)}{h^-}\right\}\\
&g_{\mathring{x}}=\frac{g(x+h^+)-g(x-h^-)}{h^++h^-}\\
&g_{\bar{x}}=\frac{g(x)-g(x-h^-)}{h^-},\qquad g_{\hat{x}}=\frac{g(x+h^+)-g(x)}{(h^++h^-)/2}
\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

在下面的讨论中，我们引用一些记号，$B_0=B(x,y_*)$，$B=B(x,y)$，$\xi_1=\tau^-/\varepsilon$，$\xi_2=\tau^+/\varepsilon$，$\xi=\max\{\xi_1,\ \xi_2\}=\tau/\varepsilon$，$g(\xi_1,\xi_2)=\xi_1[\exp(B\xi_2)-1]-\xi_2[1-\exp(-B\xi_1)]$。

我们首先在$\omega_{h,\tau}$上构造下述差分格式

$$L_\varepsilon^{(h,\tau)}u^{(h,\tau)}\equiv u_{\bar{x}\hat{x}}^{(h,\tau)}+\gamma(x,y)\,u_{\bar{y}\hat{y}}^{(h,\tau)}+A(x,y)\,u_{\mathring{x}}^{(h,\tau)}-B(x,y)\,u_{\hat{y}}^{(h,\tau)}$$
$$-C(x,y)u^{(h,\tau)}=f(x,y) \qquad ((x,y)\in\omega_{h,\tau}) \tag{2.2}$$

$$u^{(h,\tau)}|_{\partial\omega_{h,\tau}}=u(x,y)|_{\partial\omega_{h,\tau}}=\varphi(x,y) \qquad ((x,y)\in\partial\omega_{h,\tau}) \tag{2.3}$$

其中$\gamma(x,y)$是待定的拟合因子。现在，我们导出(2.2)，(2.3)的解的一致收敛性必要条件。

引理 4 差分问题(2.2)，(2.3)的解$u^{(h,\tau)}$关于ε一致收敛于微分问题(1.1)，(1.2)的解u的必要条件是：对于固定的j，h和$\rho=\tau/\varepsilon$，当$\tau\to0$时，对于$\tau^+=\tau^-$的点

$$\frac{\gamma(x,y)}{\rho}=\frac{\varepsilon B_0}{2}\coth\frac{\rho B_0}{2}+o(1) \tag{2.4}$$

其中 $y=y_0+(N-j)\tau$。

证明 假设(2.2)，(2.3)的解$u^{(h,\tau)}$关于ε一致收敛于(1.1)，(1.2)的解u，并在引理3中令$\delta=\sqrt{\varepsilon}$，有$u(x,y)=u_0(x,y)+[\varphi(x,y_*)-u_0(x,y_*)]\exp[-B_0(y_*-y)/\varepsilon]+O(\sqrt{\varepsilon})$

将此代入差分方程(2.2)，让ρ，j固定，并在方程两边令$\tau\to 0$有

$$\lim_{\tau\to 0} 2\gamma(x,y)\left[\frac{\exp[B_0\tau^+/\varepsilon)-1}{\tau^+}-\frac{1-\exp(-B_0\tau^-/\varepsilon)}{\tau^-}\right]$$

$$=\lim_{\tau\to 0}B(x,y)[\exp(B_0\tau^+/\varepsilon)-\exp(-B_0\tau^-/\varepsilon)] \tag{2.5}$$

在上式中令$\tau^+=\tau^-$，则有

$$\lim_{\tau\to 0}\gamma(x,y)/\rho=\varepsilon B_0/2\cdot\coth B_0\rho/2$$

由等式(2.5)知，在差分方程(2.2)中，我们应该选取

$$\gamma(x,y)=\frac{\varepsilon B(x,y)P(\xi_1,\xi_2)}{2g(\xi_1,\xi_2)} \tag{2.6}$$

其中$g(\xi_1,\xi_2)$如前所定义，$P(\xi_1,\xi_2)=\exp(B\xi_2)-\exp(-B\xi_1)$。

记 $u_0=u^{(h,\tau)}(x,y)$， $u_1=u^{(h,\tau)}(x+h^+,y)$， $u_2=u^{(h,\tau)}(x-h^-,y)$ (2.7)

$u_3=u^{(h,\tau)}(x,y+\tau^+)$， $u_4=u^{(h,\tau)}(x,y-\tau^-)$

则

$$L_\varepsilon^{(h,\tau)}u^{(h,\tau)}\equiv-a_0u_0+\sum_{i=1}^{4}a_iu_i=f(x,y) \tag{2.8}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
a_0&=\frac{2}{h^++h^-}\left(\frac{1}{h^+}+\frac{1}{h^-}\right)+\frac{2\gamma(x,y)}{\tau^++\tau^-}\left(\frac{1}{\tau^+}+\frac{1}{\tau^-}\right)+C(x,y)\\
a_1&=\frac{2}{h^+(h^++h^-)}+\frac{A(x,y)}{h^++h^-},\quad a_2=\frac{1}{h^++h^-}\left(\frac{2}{h^-}-A(x,y)\right)\\
a_3&=\frac{1}{\tau^++\tau^-}\left(\frac{2\gamma(x,y)}{\tau^+}-B(x,y)\right),\quad a_4=\frac{1}{\tau^++\tau^-}\left(\frac{2\gamma(x,y)}{\tau^-}+B(x,y)\right)
\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

利用$\gamma(x,y)$的非负性可以证得下述结果。

引理 5 设Ω'为Ω的任意子域，$\omega'_{h,\tau}=\Omega'\cap\omega_{h,\tau}$，$\omega''_{h,\tau}$是靠近$\omega'_{h,\tau}$的点组成，$V(x,y)$是定义在$\omega'_{h,\tau}$和$\omega''_{h,\tau}$上的网格函数。若

$$L_\varepsilon^{(h,\tau)}V(x,y)\leqslant 0 \qquad (L_\varepsilon^{(h,\tau)}V(x,y)\geqslant 0) \qquad (x,y)\in\omega'_{h,\tau}\ \text{且}$$

$$V(x,y)\geqslant 0 \qquad (V(x,y)\leqslant 0) \qquad (x,y)\in\omega''_{h,\tau}$$

则

$$V(x,y)\geqslant 0 \qquad (V(x,y)\leqslant 0) \qquad (x,y)\in\omega'_{h,\tau}$$

引理 6 存在与h，τ，ε无关的常数c，使对定义在$\omega_{h,\tau}$上的网格函数$V(x,y)$，有

$$|V(x,y)|\leqslant c\max\{\max_{\omega_{h,\tau}}|L_\varepsilon^{(h,\tau)}V(x,y)|,\ \max_{\partial\omega_{h,\tau}}|V(x,y)|\} \tag{2.10}$$

由上述引理知，差分方程问题(2.2)、(2.3)唯一可解，并满足稳定不等式。

三、差分格式的一致收敛性和误差估计

在本节中，我们将讨论差分方程问题(2.2)，(2.3)的解$u^{(h,\tau)}$和微分方程问题(1.1)，(1.2)的解$u(x,y)$之间的古典估计和非古典估计，从而证得$u^{(h,\tau)}$关于小参数ε一致收敛于u，

其阶为$O(h+\tau^{1/6})$。

首先，对于格式(2.2)的拟合因子$\gamma(x,\ y)$，有

引理 7 $|\gamma(x,\ y)-\varepsilon|\leqslant c\tau^2/\varepsilon \qquad (\tau^+=\tau^-)$ (3.1)

$|\gamma(x,\ y)-\varepsilon|\leqslant M\tau \qquad (\tau^+\neq\tau^-)$ (3.2)

其中c，M是与h，τ和ε无关的常数。

设问题(1.1)，(1.2)的系数，右端，边界条件满足适当的相容性条件，使对每一个固定的ε，u有直到四阶为止的有界偏导数，此时我们有

$$\left|\frac{\partial^k u(x,y)}{\partial y^k}\right|\leqslant c\varepsilon^{-k}, \qquad \left|\frac{\partial^k u(x,y)}{\partial x^k}\right|\leqslant c \qquad (k=1,2,3,4) \tag{3.3}$$

由(2.10)，(3.1)，(3.2)，(3.3)我们可证得下述古典估计

引理 8 $|u-u^{(h,\tau)}|\leqslant c(h+\tau^2/\varepsilon^3) \qquad (\tau^-=\tau^+)$ (3.4)

$|u-u^{(h,\tau)}|\leqslant c(h+\tau/\varepsilon^2) \qquad (\tau^-\neq\tau^+)$ (3.5)

其中c是与h，τ和ε无关的常数。

在上述引理中，我们已得到古典估计，若能再得到一个非古典估计，便可得到一致收敛性定理。我们知道$|u-u^{(h,\tau)}|\leqslant|u-u_0-w_0|+|u_0+w_0-u^{(h,\tau)}|$，由引理3知，$|u-u_0-w_0|=O(\delta+\varepsilon\cdot\delta^{-1})$，因此只要得到$|u_0+w_0-u^{(h,\tau)}|$的估计即可。我们首先考虑$L_\varepsilon^{(h,\tau)}(u_0+w_0-u^{(h,\tau)})$的量级，但由于$L_0^{(h,\tau)}u_0$中有一项$\gamma(x,y)u_{0\bar{y}\hat{y}}$，而我们对$\partial^2u_0/\partial y^2$在$y=y_0$附近的奇性并不了解，仅由引理2知道$\partial^2u_0/\partial y^2$的量级。因此需考虑

$$|u_0+w_0-u^{(h,\tau)}|\leqslant|u_0-v_0|+|v_0+w_0-v^{(h,\tau)}|+|v^{(h,\tau)}-u^{(h,\tau)}|$$

其中$v^{(h,\tau)}$是下述问题的解：

$$\left.\begin{aligned}&L_\varepsilon^{(h,\tau)}v^{(h,\tau)}=F(x,y)\\&v^{(h,\tau)}|_{\partial\omega_{h,\tau}}=u^{(h,\tau)}|_{\partial\omega_{h,\tau}}\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

这里$F(x,\ y)$见(1.9)。

下面我们分别估计$|v^{(h,\tau)}-u^{(h,\tau)}|$和$|v_0+w_0-v^{(h,\tau)}|$。记$w^{(h,\tau)}=u^{(h,\tau)}-v^{(h,\tau)}$，则$w^{(h,\tau)}$满足

$$\left.\begin{aligned}&L_\varepsilon^{(h,\tau)}w^{(h,\tau)}=f(x,y)-F(x,y)=\Phi(x,y)\\&w^{(h,\tau)}|_{\partial\omega_{h,\tau}}=0\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

引理 9 问题(3.7)的解$w^{(h,\tau)}$有估计式

$$|w^{(h,\tau)}|\leqslant c\delta \tag{3.8}$$

其中c与h，τ，ε无关。

证明 令$w^{(h,\tau)}=\exp[(y-y_0)/\delta]Y^{(h,\tau)}$，将它代入(3.7)，并整理得

$$L_\varepsilon^{(h,\tau)*}Y^{(h,\tau)}\equiv-b_0Y_0+\sum_{i=1}^4 b_iY_i=\exp[-(y-y_0)/\delta]\Phi(x,y) \tag{3.9}$$

其中
$$b_0=\frac{2}{h^++h^-}\left(\frac{1}{h^+}+\frac{1}{h^-}\right)+\frac{2\gamma(x,y)}{\tau^++\tau^-}\left(\frac{1}{\tau^+}+\frac{1}{\tau^-}\right)+C(x,y)$$

$$b_1=\frac{1}{h^++h^-}\left(\frac{2}{h^+}+A(x,\ y)\right),\quad b_2=\frac{1}{h^++h^-}\left(\frac{2}{h^-}-A(x,\ y)\right)$$

$$b_3=\frac{\exp(\tau^+/\delta)}{\tau^++\tau^-}\left\{\frac{2}{\tau^+}\gamma(x,\ y)-B(x,\ y)\right\},\quad b_4=\frac{\exp(-\tau^+/\delta)}{\tau^++\tau^-}\left\{\frac{2\gamma(x,y)}{\tau^-}+B(x,\ y)\right\}$$

Y_i $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ 4)$的定义同(2.7)。

显然，$b_i>0$ $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ 4)$，$\sum_{i=1}^{4}b_i-b_0=-\frac{BS}{\varepsilon g(\xi_1,\xi_2)}-C(x,y)$，其中$S=\exp(B\xi_2)[1-\exp(-\eta_1)]-\exp(\eta_2)[1-\exp(-\eta_1-\eta_2)]+\exp(-B\xi_1)[\exp(\eta_2)-1]$，$\eta_1=\tau^-/\delta$，$\eta_2=\tau^+/\delta$。由于我们现在讨论的是非古典估计，因此可取$\delta=\tau^{1/5}$。故有$\eta_1$，$\eta_2\leqslant\tau^{4/5}$。利用台劳展式可以证得$S>0$，因而$L_\varepsilon^{(h,\tau)*}$是正型算子，极值原理成立。用类似的方法，可以得出估计式$S/\varepsilon g(\xi_1,\xi_2)\geqslant1/2\delta$，所以$\sum_{i=1}^{4}b_i-b_0\leqslant-c/\delta$。构造闸函数$\Psi=c\delta\pm Y^{(h,\tau)}$，利用极值原理可得$|Y^{(h,\tau)}|\leqslant c\delta$，再运用引理3的证明中估计$w$的方法，类似地即证得$w^{(h,\tau)}=O(\delta)$ $(x,y)\in\omega_{h,\tau}$。

引理10 存在与h，τ和ε无关的常数c，使

$$|L_\varepsilon^{(h,\tau)}(v_0+w_0-v^{(h,\tau)})|\leqslant c(h+\tau\cdot\delta^{-1}+\varepsilon\cdot\delta^{-1}+\exp[-\alpha(y_*-y)/2\varepsilon])\qquad(3.10)$$

证明 $L_\varepsilon^{(h,\tau)}(v_0+w_0-v^{(h,\tau)})=L_\varepsilon^{(h,\tau)}v_0-F(x,y)+L_\varepsilon^{(h,\tau)}w_0$

利用(3.2)，(1.13)，(1.15)以及差商和导数的关系可得

$$|L_\varepsilon^{(h,\tau)}v_0-F(x,y)|=|L_\varepsilon^{(h,\tau)}v_0-L_0v_0|\leqslant c(\tau\cdot\delta^{-1}+\varepsilon\cdot\delta^{-1}+h),$$

$$|w_{0\bar{x}\hat{x}}+A(x,y)w_{0\hat{x}}-c(x,y)w_0|\leqslant c\exp[-\alpha(y_*-y)/2\varepsilon].$$

而 $\gamma(x,\ y)w_{0\bar{y}\hat{y}}-B(x,y)w_{0\hat{y}}=B(x,y)[\varphi(x,y_*)-u_0(x,y_*)]\cdot I$，

其中$I=\exp[-B_0(y_*-y)/\varepsilon]\{[\exp(B_0\xi_2)-\exp(B\xi_2)][1-\exp(-B_0\xi_1)]-[\exp(-B_0\xi_1)-\exp(-B\xi_1)]\cdot[\exp(B_0\xi_2)-1]\}/\varepsilon g(\xi_1,\ \xi_2)$。

由中值定理知，存在介于B_0，B之间的B_1，B_2，使

$$\exp(B_0\xi_2)-\exp(B\xi_2)=B_y(x,\ \theta_1)(y_*-y)\exp(B_1\xi_2)\xi_2,$$

$$\exp(-B_0\xi_1)-\exp(-B\xi_1)=-B_y(x,\ \theta_2)(y_*-y)\xi_1\exp[-B_2\xi_1].$$

若$B\geqslant B_0$，则$B_1\leqslant B$，易证$|(y_*-y)\exp[-B_0(y_*-y)/2\varepsilon]I_1/\varepsilon g(\xi_1,\ \xi_2)|\leqslant c$，

其中
$$I_1=B_y(x,\theta_1)\exp(B_1\xi_2)[1-\exp(-B_0\xi_1)]-B_y(x,\theta_2)\exp(-B_2\xi_1)[\exp(B_0\xi_2)-1].$$

若$B\leqslant B_0$，则 $I=(y_*-y)I_2\exp[-B(y_*-y)/2\varepsilon]/\varepsilon$

其中 $I_2=\exp[-B(y_*-y)/2\varepsilon]I_1\exp[-(B_0-B)(y_*-y)/\varepsilon]/g(\xi_1,\ \xi_2)$

由于 $B_0\geqslant B_1$，$B_2\geqslant B$，亦可证得$|(y_*-y)I_2/\varepsilon|\leqslant c$ 从而有

$$|I|\leqslant c\exp[-\alpha(y_*-y)/2\varepsilon]$$

因此，存在与ε，τ，h和δ无关的常数，使

$$|L_\varepsilon^{(h,\tau)}w_0|\leqslant c\exp[-\alpha(y_*-y)/2\varepsilon]$$

综合上述结果，即得(3.10)。

引理11 设 $\Phi_1(x,y)=(\tau+\varepsilon)\exp[-\alpha(y_*-y)/2\varepsilon]$

则
$$L_\varepsilon^{(h,\tau)}\Phi_1(x,y)\leqslant-k_0\exp[-\alpha(y_*-y)/2\varepsilon]\qquad(3.11)$$

其中k_0与h，τ，ε无关。

证明 经过不复杂的运算，我们有

$$L_\varepsilon^{(h,\tau)}\Phi_1(x,y)=-C(x,y)(\tau+\varepsilon)\exp[-\alpha(y_*-y)/2\varepsilon]$$

$$-B(\tau+\varepsilon)I\cdot\exp[-\alpha(y_*-y)/2\varepsilon]/\varepsilon g(\xi_1,\xi_2)$$

其中$I=[\exp(B\xi_2)-1]\left[1-\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\xi_1\right)\right]-\left[\exp\left(\frac{\alpha}{2}\xi_2\right)-1\right][1-\exp(-B\xi_1)]$。

当$x\in(0,+\infty)$时，$q(x)=(\exp-1)/x\exp(x)$是x的增函数，故

$$B\xi_2[1-\exp(-\alpha\xi_1/2)]>\alpha\xi_1[1-\exp(-B\xi_1)]/2 \tag{3.12}$$

又 $$1+\frac{B\xi}{2!}+\frac{(B\xi_2)^2}{3!}+\frac{(B\xi_2)^3}{4!}+\cdots>1+\frac{\frac{\alpha}{2}\xi_2}{2!}+\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\xi^2\right)^2}{3!}+\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\xi_2\right)^3}{4!}+\cdots \tag{3.13}$$

结合(3.12)，(3.13)，可证得$I>0$。

现考虑$(\tau+\varepsilon)I/\varepsilon g(\xi_1,\xi_2)$的量级．当$\xi\to0$时，$I/g(\xi_1,\xi_2)\to\alpha(B-\alpha/2)/2B>\alpha^2/4B$，因此存在$l_1$，使$\max(\xi_1,\ \xi_2)\leqslant l_1$时，

$$\frac{\tau+\varepsilon}{\varepsilon}\cdot\frac{BI}{g(\xi_1,\xi_2)}<-\alpha^2/4 \tag{3.14}$$

设l_2为足够大的数．显然，若$\xi_1\geqslant l_2$，有

$$\frac{\tau}{\varepsilon}\cdot\frac{I}{g(\xi_1,\xi_2)}\geqslant1-\exp(-\alpha\xi_1/2)-\frac{[\exp(\alpha\xi_2/2)-1][1-\exp(-B\xi_1)]}{[\exp(B\xi_2/2)-1][\exp(B\xi_2/2)+1)}\geqslant\frac{1}{4}$$

若$\xi_2\geqslant l_2$，$\xi_1\leqslant l_2$，有

$$\frac{\tau}{\varepsilon}\cdot\frac{I}{g(\xi_1,\xi_2)}\geqslant$$

$$\frac{\xi_2}{\xi_1}\frac{[\exp(B\xi_2)-1][1-\exp(-\alpha\xi_1/2)]-\frac{\alpha}{10(B+1)}[\exp(B\xi_2)-1][1-\exp(-B\xi_1)]}{\exp(B\xi_2)-1}\geqslant\alpha/10$$

因此存在与h，τ，ε无关的常数l_2，使当$\xi\geqslant l_2$时，

$$-\frac{\tau+\varepsilon}{\varepsilon}\cdot\frac{BI}{g(\xi_1,\xi_2)}\leqslant-c \tag{3.15}$$

由于$I<0$，$g(\xi_1,\ \xi_2)>0$故在闭区域$l_1\leqslant\max(\xi_1,\ \xi_2)\leqslant l_2$上亦有下式成立：

$$-\frac{\tau+\varepsilon}{\varepsilon}\cdot\frac{BI}{g(\xi_1,\xi_2)}\leqslant-c_2 \tag{3.16}$$

综合(3.14)～(3.16)，可知存在与ε，h，τ无关的常数k_0，使(3.11)成立．

结合引理10和引理11，我们有下述结果

引理12 存在与h，τ，ε和δ无关的常数c，使

$$|v_0+w_0-v^{(h,\tau)}|\leqslant c(h+\tau\cdot\delta^{-1}+\varepsilon\cdot\delta^{-1}) \tag{3.17}$$

取$\delta=\tau^{1/5}$，综合引理7～12，可得非古典估计．

引理13 存在与h，τ，ε无关的常数M，使差分方程问题(2.2)，(2.3)的解$u^{(h,\tau)}$和微分方程问题(1.1)，(1.2)的解u之间满足估计式

$$|u-u^{(h,\tau)}|\leqslant M(h+\tau^{1/5}+\varepsilon\cdot\tau^{-1/5}) \tag{3.18}$$

经过前面的一系列工作，我们可以得出本文的主要定理，即一致收敛性结果．

定理1 设u和$u^{(h,\tau)}$分别是(1.1)，(1.2)和(2.2)，(2.3)的解，则存在与h，τ，ε无关的常数c，使

$$|u-u^{(h,\tau)}|\leqslant c(h+\tau^{1/5}) \tag{3.19}$$

证明 当$\tau<\varepsilon^{5/2}$时，由引理8知$|u-u^{(h,\tau)}|\leqslant c(h+\tau^{1/6})$，当$\tau\geqslant\varepsilon^{5/2}$时，由引理13亦有

$|u-u^{(h,\tau)}|\leqslant c(h+\tau^{1/5})$。因此，对一切$\varepsilon$一致地有(3.19)成立。

四、差分方程问题解的渐近性态

我们在第一节中已指出，当$\varepsilon\to 0$时，摄动问题(1.1)，(1.2)退化为抛物型方程的初、边值问题(1.7)，(1.8)，并且由于$B(x,y)\geqslant\alpha>0$，这种退化是正则的[7]。由引理3知，当$\varepsilon\to 0$时，除了在$y=y_*$附近，摄动问题(1.1)，(1.2)的解$u(x,y)$逼近于退化问题(1.7)(1.8)的解$u_0(x,y)$。通过下面的定理可知，当τ，h固定，$\varepsilon\to 0$时，差分方程问题(2.2)，(2.3)的解$u^{(h,\tau)}$的渐近性态与微分方程问题(1.1)，(1.2)的解u的渐近性态是一致的。

当h，τ暂时固定，$\varepsilon\to 0$时，差分方程(2.2)退化为下述差分方程

$$L_0^{(h,\tau)}\ u_0^{(h,\tau)}\equiv u_{0\bar{x}\hat{x}}^{(h,\tau)}+A(x,y)u_{0\hat{x}}^{(h,\tau)}-B(x,y)u_{0\bar{y}}^{(h,\tau)}-C(x,y)u_0^{(h,\tau)}=f(x,y) \tag{4.1}$$

显然，差分方程(4.1)和微分方程(1.7)是相容的，截断误差为$O(h+\tau)$，并且(4.1)是无条件稳定的差分格式。类似于[4]中定理2，我们可以得到本节的主要结果。

定理2 在$\omega_{h,\tau}$内，让h，τ固定，令$\varepsilon\to 0$，则差分方程问题(2.2)，(2.3)的解逼近于退化问题

$$\left.\begin{array}{ll} L_0^{(h,\tau)}u_0^{(h,\tau)}=f(x,y) & ((x,y)\in\omega_{h,\tau}) \\ u_0^{(h,\tau)}|_{\partial\omega_{i,h,\tau}}=u^{(h,\tau)}|_{\partial\omega_{i,h,\tau}}, & (i=1,2,3) \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

的解。

五、数 值 结 果

我们考虑问题

$$\begin{aligned} L_\varepsilon u_\varepsilon &\equiv u_{xx}+\varepsilon u_{yy}+2xu_x-(1+y)u_y-(2+x)u \\ &=4x^3-x^4+4x-xy-x^2y-2 \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$u_\varepsilon|_{\partial\Omega}=\left[1+x^3+xy+y\left(x-\frac{y^2}{4}\right)\left(x-1+\frac{1}{3}y^3\right)\right]\Big|_{\partial\Omega} \tag{5.2}$$

$$\Omega=\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant 1,\ y^2/4\leqslant x\leqslant 1-y^3/3\}$$

利用差分格式(2.2)，(2.3)对$\varepsilon=1/5^i(i=1,\cdots,5)$，和正方形网格$h=\tau=1/(8\cdot 2^{j-1})$ $(j=1,2,3,4)$的各种情况进行了计算，得到了数值解，在计算过程中我们用渐近解与数值解进行了比较。

表1列出了当$\varepsilon=1/5^4$时$\omega_{h,\tau}$中某些网格点上的数值解和误差随着h的不同所得到的值。从此表可以看出，对于固定的ε，在每个网格节点上，h越小，数值解越接近于原问题的解，误差越小。表2列出了当$h=1/64$时靠近$y=1$边界层那一层网格点上的数值解和误差随着ε的变化而得到的值，从此表可以看出，差分问题(2.2)，(2.3)的解在边界层附近对原问题的解的逼近效果还是比较理想的，绝对误差和相对误差都在$10^{-2}\sim 10^{-3}$之间。表3列出了h，ε的各种情况下的最大误差，由此也可看出，对每个固定的ε，最大误差随着h的减小而减小。

表 1 ($\varepsilon=1/5^4$)

x y		h=1/8	1/16	1/32	1/64	渐近解
(0.5, 0.25)	数值解	1.2512	1.2499	1.2498	1.2496	1.2500
	误 差	0.1210(−2)	0.1045(−3)	0.2127(−3)	0.3958(−3)	
(0.375, 0.5)	数值解	1.2398	1.2373	1.2389	1.2395	1.2402
	误 差	0.1331(−2)	0.2916(−2)	0.1295(−2)	0.7505(−3)	
(0.375,0.75)	数值解	1.3225	1.3291	1.3313	1.3325	1.3340
	误 差	0.1142(−1)	0.4865(−2)	0.2668(−2)	0.1469(−2)	
(0.75, 0.75)	数值解	1.9826	1.9837	1.9840	1.9841	1.8438
	误 差	0.1821(−2)	0.6580(−3)	0.3395(−3)	0.2375(−3)	

表 2 ($h=1/64$)

x y		$\varepsilon=1/5$	$1/5^2$	$1/5^3$	$1/5^4$	$1/5^5$
(0.375, 0.9844)	数值解	1.4095	1.4185	1.4259	1.4252	1.4252
	渐近解	1.3907	1.4123	1.4215	1.4219	1.4219
(0.4688, 0.9844)	数值解	1.5455	1.5608	1.5715	1.5711	1.5711
	渐近解	1.5273	1.5523	1.5639	1.5644	1.5644
(0.5625, 0.9844)	数值解	1.7197	1.7299	1.7374	1.7372	1.7372
	近渐解	1.7038	1.7251	1.7314	1.7316	1.7316
(0.625, 0.9844)	数值解	1.8598	1.8600	1.8624	1.8622	1.8622
	渐近解	1.8460	1.8609	1.8574	1.8594	1.8594
(0.6563, 0.9844)	数值解	1.9383	1.9307	1.9300	1.9299	1.9299
	近渐解	1.9250	1.9357	1.9289	1.9286	1.9286

表 3 最大误差

ε	h=1/8	1/16	1/32	1/64
1/5	0.3036(−1)	0.3161(−1)	0.5503(−1)	0.7007(−1)
$1/5^2$	0.2986(−1)	0.2055(−1)	0.1605(−1)	0.1163(−1)
$1/5^3$	0.3044(−1)	0.2111(−1)	0.1367(−1)	0.7667(−2)
$1/5^4$	0.3044(−1)	0.2112(−1)	0.1417(−1)	0.8443(−2)
$1/5^5$	0.3044(−1)	0.2112(−1)	0.1417(−1)	0.8443(−2)

本文是在苏煜城和吴启光老师指导下完成的，作者在此表示衷心的感谢。

参 考 文 献

[1] Ильин А. М., Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной, *Матем. Заметки.*, **6**,2 (1969), 237—248.

[2] Kellogg, R. Bruce and Alice Tsan, Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problem without turning points, *Math. Comp.*, **32**, 144 (1978), 1025—1039.

[3] Doolan, E. P., J. J. H Miller and W. H. A. Schilders, *Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers*, Boole Press, Dublin (1980).

[4] 苏煜城、吴启光，椭圆-抛物偏微分方程奇异摄动问题的差分解法，应用数学和力学，**1**，2 (1980)，167—176.

[5] Zlamal, Milos, The parabolic equation as a limiting case of a certain elliptic equation, *Ann. Math. Pura. Appl.*, **57** (1962), 143-150.

[6] Вентцеьл Т. Д., О применении мемода конечных разностей к решению первой краевой задачи для уравнений параболического типа, *Матем. Сборник*, **40**, 82 (1956), 101—122.

[7] 苏煜城，《奇异摄动中的边界层校正法》，上海科学技术出版社 (1983).

Uniformly Convergent Difference Schemes for First Boundary Value Problem for Elliptic Differential Equations with a Small Parameter at the Highest Derivative

Liu Bi-yue

(*Nanjing University, Nanjing*)

Abstract

In this paper we consider the Dirichlet problem for elliptic differential equations. A special difference scheme is constructed from the necessary condition of uniform convergence. We also prove the uniform convergence and the asymptotic behavior of the solution of the difference problem, and give the error estimate.