应用数学和力学，第7卷第6期（1986年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

广义函数法边界积分方程的建立*

彭晓林　何广乾

（中国建筑科学研究院，1985年5月7日收到）

摘　要

从广义函数论出发，本文引入一特殊广义函数$\delta\theta_P$，通过它以及它的各阶导数建立了任一足够光滑函数的各阶导数的边界积分方程。对于由线性偏微分算子定义的问题，只要存在着相应的基本解，问题的偏微分方程总可转换成边界积分方程。

近年来边界元法在工程中得到越来越广泛的重视。边界元法以边界积分方程为基础，因此为了用边界元法求解物理问题，首先要将问题的偏微分方程转化为积分方程。在这方面 Betti 于 1873 年建立了著名的 Betti 互等定理，其后 1886 年 Somigliana 得到了通常所说的 Somigliana 恒等式。介绍它们的近代文献可见[1]～[3]。1906 年 Fredholm[4] 将势论问题中的积分方程法应用到弹性理论的边值问题之中，有关它的现代文献可见[5]～[6]。Muskhelishivili[7]，Mikhlin[8] 和其它研究人员利用复变函数建立了平面弹性力学问题的奇异积分方程。现在大部分边界元法研究人员用加权余量法和互等定理来建立边界积分方程。但是这些方法有时会导致物理上和数学上都无法正确解释的发散奇异积分。本文将从广义函数论出发来建立边界积分方程，结果表明现行方法的缺点可以得到克服。

一、广义函数 $\delta\theta_P$

取$C_c^\infty(R^n)$为广义函数的试函数空间[9]，$(f,\cdot)$代表一个由广义函数f定义的泛函关系。对任一$\varphi\in C_c^\infty(R^n)$，$(f,\varphi)$是一实或复数。在绝大多数边界元法的文献中，$\delta(x)$函数被解释为常义函数的极限。但若假定

$$x=x(x_1,x_2,\cdots,x_n)\qquad x\in R^n \tag{1.1}$$

$$\partial^m=\frac{\partial^m}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}\cdots\partial x_n^{m_n}},\quad m_1+m_2+\cdots+m_n=m \tag{1.2}$$

广义函数理论告诉我们

$$(\partial^m\delta(x),\varphi(x))=(-1)^m\partial^m\varphi(0)\qquad m\geqslant 0 \tag{1.3}$$

该方程仅当$\delta(x)$函数为广义函数时方能得到合适的解释。这就启发我们从广义函数论来建

* 陈至达推荐。

本文是研究生彭晓林博士论文的部分内容，指导教师为何广乾高级工程师。

立边界元法的边界积分方程。

为此定义一个特殊的广义函数 $\delta\theta_P$

$$(\delta\theta_P,\varphi(x))=\begin{cases}\varphi(P) & P\in\Omega\\ C_\Omega\varphi(P) & P\in\Gamma\\ 0 & P\notin\Omega+\Gamma\end{cases} \tag{1.4}$$

$$0\leqslant C_\Omega\leqslant 1 \tag{1.5}$$

这里Ω是R^n中的一个区域，Γ 是其边界，$P\in R^n$ 其坐标为$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$。又让$\{S_\alpha\}_n$, $\{M_\alpha\}_n$, $\{N_\alpha\}_n$ 是三个特殊函数组，每一函数组的元素均为 n 个。且

$$M_{\alpha,\alpha}=0 \tag{1.6}$$

$$N_\alpha=S_\alpha+M_\alpha \qquad \alpha=1,2,\cdots,n \tag{1.7}$$

$$S_\alpha=\frac{1}{\omega_{n-1}}\frac{x_\alpha}{r^n} \qquad \alpha=1,2,\cdots,n \tag{1.8}$$

$$r=\sqrt{x_\alpha\cdot x_\alpha} \tag{1.9}$$

ω_{n-1}——$n-1$ 维单位球面的面积

本文中( )$_{,\alpha}=\partial(\ )/\partial x_\alpha$，并且采用了重复相乘指标求和的简写约定。(1.6)中 α 从 1 到 n求和。进一步假定任一 M_α 的导数有界．从(1.6)～(1.9)易证[9]

$$S_{\alpha,\alpha}=N_{\alpha,\alpha}=\delta(x) \tag{1.10}$$

二、$\delta\theta_P$的积分方程表达式

引理一 设 Γ_ε 为 R^n 中半径为 ε 的超球面的部份区域，该超球面的中心在 P 点，Γ_ε 的面积为 $H\cdot\varepsilon^{n-1}$, $H\leqslant\omega_{n-1}$ 为一常数，则对(1.7)式定义的$\{N_\alpha\}_n$ 和任一$\varphi\in C_c^\infty(R^n)$有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Gamma_\varepsilon}N_\alpha(x-P)n_\alpha(x)\varphi(x)d\Gamma(x)=\frac{H}{\omega_{n-1}}\varphi(P) \tag{2.1}$$

$n_\alpha,\alpha=1,\cdots,n$ 是 Γ_ε 上法向矢量在 x_α 方向的分量。

证 让 $\Gamma_\varepsilon+\Gamma_{2\varepsilon}$ 构成半径为 ε 的完整超球面。由$\{M_\alpha\}_n$ 的性质易得

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Gamma_\varepsilon}M_\alpha n_\alpha\varphi d\Gamma=0 \tag{2.2}$$

这是因为当 $\varepsilon\to0$ 时，Γ_ε 的面积趋于零，而

$$|M_\alpha n_\alpha\cdot\varphi|\leqslant C_\varphi<\infty,\ C_\varphi \text{ 为一常数} \tag{2.3}$$

$$\therefore\qquad \lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Gamma_\varepsilon}N_\alpha n_\alpha\varphi d\Gamma=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Gamma_\varepsilon}S_\alpha n_\alpha\varphi d\Gamma \tag{2.4}$$

而从(1.8)、(1.9)并用 $x-P$ 代替 x 则有

$$S_\alpha n_\alpha=\frac{(x_\alpha-\xi_\alpha)n_\alpha}{\omega_{n-1}r^n}=\frac{n_\alpha n_\alpha}{\omega_{n-1}r^{n-1}}=\frac{1}{\omega_{n-1}\varepsilon^{n-1}} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_\varepsilon}S_\alpha n_\alpha\varphi d\Gamma&=\frac{1}{\omega_{n-1}\varepsilon^{n-1}}\int_{\Gamma_\varepsilon}\varphi(x)d\Gamma(x)\\&=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{\Gamma'}\varphi(\xi_1+\varepsilon y_1,\xi_2+\varepsilon y_2,\cdots,\xi_n+\varepsilon y_n)d\Gamma'(y)\end{aligned} \tag{2.6}$$

上式中 Γ' 是将半径从 ε 扩张到 1 时 Γ_ε 所占的相应点集，其面积为H。

$$y=y(y_1,y_2,\cdots,y_n) \tag{2.7}$$

$$\varepsilon\cdot y=x-P \tag{2.8}$$

在(2.6)中让 $\varepsilon\to0$ 并代回到(2.4)式中

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Gamma_\varepsilon}N_\alpha(x-P)n_\alpha(x)\varphi(x)d\Gamma(x)=\frac{H}{\omega_{n-1}}\varphi(P) \tag{2.1}$$

引理一得证。

从引理一可从证明

定理一 设Ω是 R^n 中的一个区域，其边界Γ由逐段光滑的超曲面组成。对任一由(1.7)式定义的$\{N_\alpha\}_n$ 和任一 $\varphi\in C_c^\infty(R^n)$，广义函数 $\delta\theta_P$ 有如下的积分表达式

$$(\delta\theta_P,\varphi)=\int_\Gamma N_\alpha(x-P)n_\alpha(x)\varphi(x)d\Gamma(x)-\int_\Omega N_\alpha(x-P)\varphi(x)_{,\alpha}d\Omega(x) \tag{2.9}$$

$$\int_\Gamma N_\alpha n_\alpha\varphi d\Gamma=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon}N_\alpha n_\alpha\varphi d\Gamma \tag{2.10}$$

Γ_ε 是中心在P点，半径为 ε 的超球面在 Γ 上截割出的部份。

为了便于证明定理一，设G是球心在P点半径为 ε 的小球域与Ω的交，Γ_G 是G的边界并令 $\Gamma_{G\varepsilon}=\Gamma_G-\Gamma_\varepsilon$。在二维时（见图 1）当$P$点位于边界上的 P' 时

$$\Gamma_\varepsilon=\Gamma_{ADB};\ \Gamma_G=\Gamma_{ADBCA};\ \Gamma_{G\varepsilon}=\Gamma_{BCA} \tag{2.11a}$$

当 P位于Ω内部 P''点时，Γ_ε 不存在

$$\Gamma_G=\Gamma_{G\varepsilon} \tag{2.11b}$$

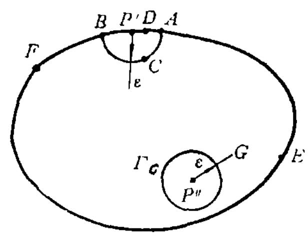

图 1

证 首先假定 $P\notin\Omega+\Gamma$ 则有

$$N_\alpha(x-P)_{,\alpha}=S_\alpha(x-P)_{,\alpha}=0 \quad 在\Omega+\Gamma内 \tag{2.12}$$

进行分部积分并利用(2.12)式

$$\int_\Gamma N_\alpha n_\alpha\varphi d\Gamma-\int_\Omega N_\alpha\varphi_{,\alpha}d\Omega=\int_\Omega N_{\alpha,\alpha}\varphi d\Omega=0 \tag{2.13}$$

当 $P\in\Omega+\Gamma$时，可令

$$\int_\Omega N_\alpha\varphi_{,\alpha}d\Omega=\int_G N_\alpha\varphi_{,\alpha}d\Omega+\int_{\Omega-G}N_\alpha\varphi_{,\alpha}d\Omega \tag{2.14}$$

$$\because\quad \int_{\Omega-G}N_\alpha\varphi_{,\alpha}d\Omega=\int_{\Gamma-\Gamma_G}N_\alpha n_\alpha\varphi d\Gamma-\int_{\Omega-G}N_{\alpha,\alpha}\varphi d\Omega$$

$$=\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon}N_\alpha n_\alpha\varphi d\Gamma-\int_{\Gamma_{G\varepsilon}}N_\alpha n_\alpha\varphi d\Gamma \tag{2.15}$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_G N_\alpha\varphi_{,\alpha}d\Omega=0 \tag{2.16}$$

所以(2.14)成为($\varepsilon\to0$)

$$\int_\Gamma N_\alpha n_\alpha\varphi d\Gamma-\int_\Omega N_\alpha\varphi_{,\alpha}d\Omega=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Gamma_{G\varepsilon}}N_\alpha n_\alpha\varphi d\Gamma \tag{2.17a}$$

而上式中的 $\Gamma_{G\varepsilon}$ 与引理一的 Γ_ε 相同，因而从引理一

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Gamma_{G\varepsilon}}N_\alpha n_\alpha\varphi d\Gamma=C_\Omega\varphi(P) \tag{2.17b}$$

$$C_\Omega=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{n-1}\varepsilon^{n-1}}\int_{\Gamma_{G\varepsilon}}d\Gamma \qquad 0\leqslant C_\Omega\leqslant 1 \tag{2.18}$$

将(2.17b)、(2.18)代入(2.17a)并考虑到(2.13)式

$$\int_\Gamma N_\alpha(x-P)n_\alpha(x)\varphi(x)d\Gamma(x)-\int_\Omega N_\alpha(x-P)\varphi(x)_{,\alpha}d\Omega(x)=\begin{cases}C_\Omega\varphi(P)\\0\end{cases} \tag{2.19}$$

当 P 在Ω内时，从(2.18)知$C_\Omega=1$，所以(2.19)式等价于

$$(\delta\theta_P,\varphi)=\int_\Gamma N_\alpha n_\alpha\varphi d\Gamma-\int_\Omega N_\alpha\varphi_{,\alpha}d\Omega \tag{2.9}$$

定理一证毕。

我们知道一个广义函数可以有多种积分表达式，它们每一形式一般仅对某一问题很适合。例如若设L为一线性偏微分算子，对如下的定解方程

$$L[\varphi(x)]=f(x) \tag{2.20}$$

虽然可以从定理一构造出 $\varphi(x)$的积分方程，但是(2.9)式中存在的包含未知函数的面积分却使实际应用很不经济。但只要存在着适当的基本解，下面的定理可以克服这一困难。为此首先定义 L的伴随算子 L^* 和双线性形式$L'[\cdot,\cdot]$为

$$\int_\Omega uL(v)d\Omega=\int_\Omega vL^*(u)d\Omega+\int_\Gamma L'[u,v]d\Gamma \tag{2.21}$$

上式中 u,v 是两个充分光滑的函数。

定理二　设L是一线性偏微分算子，其伴随算子 L^*的基本解设为 E^*，则

$$(\delta\theta_P,\varphi)=-\int_\Gamma L'[E^*(x-P),\ \varphi(x)]d\Gamma(x)+\int_\Omega E^*(x-P)L(\varphi(x))d\Omega(x) \tag{2.22}$$

证　显然

$$\int_\Omega\varphi[N_{\alpha,\alpha}-L^*(E^*)]d\Omega=\int_\Omega\varphi[\delta(x-P)-\delta(x-P)]d\Omega=0 \tag{2.23}$$

$$N_\alpha\varphi_{,\alpha}+E^*L(\varphi)=(\varphi N_\alpha)_{,\alpha}+E^*L(\varphi)-\varphi L^*(E^*) \tag{2.24}$$

引入微分形式[10]，我们知道

$$n_\alpha d\Gamma=(-1)^{\alpha-1}dx_1dx_2\cdots dx_{(\alpha)-1}dx_{(\alpha)+1}\cdots dx_n \tag{2.25}$$

又定义微分形式 ω 为

$$\omega=\varphi N_\alpha(-1)^{\alpha-1}dx_1dx_2\cdots dx_{(\alpha)-1}dx_{(\alpha)+1}\cdots dx_n+L'[E^*,\varphi]d\Gamma \tag{2.26}$$

上二式中(α)表示该指标不参与求和约定。ω 的外微分是

$$d\omega=[(\varphi N_\alpha)_{,\alpha}+E^*L(\varphi)-\varphi L^*(E^*)]d\Omega \tag{2.27}$$

而从广义 Gauss-Ostrogradskii 公式

$$\int_\Omega d\omega=\int_\Gamma\omega \tag{2.28}$$

并将(2.24)～(2.27)代入(2.28)后有

$$\int_\Gamma N_\alpha n_\alpha\varphi d\Gamma-\int_\Omega N_\alpha\varphi_{,\alpha}d\Omega=-\int_\Gamma L'[E^*,\varphi]d\Gamma+\int_\Omega E^*L(\varphi)d\Omega \tag{2.29}$$

从定理一，上式等价于

$$(\delta\theta_P,\varphi)=-\int_\Gamma L'[E^*,\varphi]d\Gamma+\int_\Omega E^*L(\varphi)d\Omega \tag{2.22}$$

定理二证毕。

从定理二很容易得到(2.20)式给定的待求函数 φ 的边界积分方程

$$C_\Omega\varphi(P)=-\int_\Gamma L'[E^*,\varphi]d\Gamma+\int_\Omega E^*fd\Omega \tag{2.30}$$

这时面积分项为已知积分。

(2.30)为单个微分算子定解问题的边界积分方程，现在让我们转而讨论由偏微分方程组

$$L_{ij}(\varphi_j)=f_i,\ i=1,2,\cdots,m;\quad j\text{ 从 }1\sim m\text{ 重指标求和} \tag{2.31}$$

定义的定解问题转化为积分方程组的问题。(2.31)中 L_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,m)$ 为线性偏微分算子，它们的伴随算子和双线性形式分别记为 L^*_{ij}，$L'_{ij}[\cdot,\cdot]$，我们定义 φ^*_{jr} $(j,r=1,2,\cdots,m)$构成算子 L^*_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,m)$的基本解以致于

$$L^*_{ji}(\varphi^*_{jr})=\delta_{ir}\cdot\delta(x)\qquad i,r=1,2,\cdots,m \tag{2.32}$$

$$\delta_{ir}=\begin{cases}1, & i=r\\ 0, & i\neq r\end{cases} \tag{2.33}$$

δ_{ir} 是所谓的 Kronecker 符号。

类似于(2.30)的推导过程，容易得到

$$C_\Omega\varphi_r(P)=-\int_\Gamma L'_{jk}[\varphi^*_{jr}(x-P),\ \varphi_k(x)]d\Gamma(x)$$

$$+\int_\Omega\varphi^*_{jr}(x-P)L_{jk}(\varphi_k(x))d\Omega(x) \tag{2.34}$$

三、广义函数 $\delta\theta_P$ 的导数

为了叙述方便，在本小节中指标 m,m_i $(i=1,2,\cdots,n)$与求和约定无关。

在很多问题中，仅有待求函数自身的边界积分方程一般尚不足以实施边界元计算，因此有必要研究待求函数的边界积分方程，在原则上

$$(\delta\theta_P,\partial^m\varphi)=\int_\Gamma N_\alpha n_\alpha\partial^m\varphi d\Gamma-\int_\Omega N_\alpha\partial^m\varphi_{,\alpha}d\Omega \tag{3.1}$$

建立了由(1.3)式定义的导数的积分方程，但上式中引入了 $m+1$ 阶导数 $\partial^m\varphi_{,\alpha}$，而这对数值计算十分不利。从另一方面，广义函数论告诉我们，任一广义函数的任意阶导数存在且对 $\delta\theta_P$ 有

$$(\partial^m\delta\theta_P,\varphi)=(-1)^mC_\Omega\partial^m\varphi(P) \tag{3.2}$$

若令

$$\varphi_{m1}=\varphi(P)+\sum_{\alpha=1}^n x_\alpha\frac{\partial\varphi(P)}{\partial x_\alpha}+\cdots+\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m-1}\frac{x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}\varphi(P)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} \tag{3.3}$$

$$\varphi_{m2}=\varphi_{m1}+\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m}\frac{x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}}{m!}\frac{\partial^m\varphi(P)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} \tag{3.4}$$

$$\varphi'=\varphi(x)-\varphi_{m2}+\frac{x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}}{m!}\frac{\partial^m\varphi(P)}{\partial x_1^{m_1}\cdots\partial x_n^{m_n}} \tag{3.5}$$

则

$$(\partial^m\delta\theta_P,\varphi)=(\delta\theta_P,(-1)^m\partial^m(\varphi-\varphi_{m1}))=(\partial^m\delta\theta_P,\varphi-\varphi_{m1})$$

$$=(\delta\theta_P,\ (-1)^m\partial^m\varphi')=(\partial^m\delta\theta_P,\varphi')$$

上式启发我们推测 $\partial^m\delta\theta_P$ 的可能泛函数形式为

$$(\partial^m\delta\theta_P,\varphi)=\int_\Gamma \partial^m N_\alpha n_\alpha\bar{\varphi}d\Gamma-\int_\Omega \partial^m N_\alpha\bar{\varphi},_\alpha d\Omega \tag{3.6}$$

$$\bar{\varphi}=\varphi-\varphi_{m_2}+D_\Omega\ \frac{x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}}{m!}\cdot\frac{\partial^m\varphi(P)}{\partial x_1^{m_1}\cdots\partial x_n^{m_n}} \tag{3.7}$$

下面的定理三证实了(3.6)、(3.7)的正确性并给出了 D_Ω 与C_Ω之间的关系。在叙述定理前首先给出一极易用归纳法证明的公式

$$\partial^m S_\alpha=f^\alpha_{m_1m_2\cdots m_n}(n_1,n_2,\cdots,n_n)/r^{n+m-1},\ \ \alpha=1,2,\cdots,n \tag{3.8}$$

$$n_\alpha=x_\alpha/r,\qquad \alpha=1,2,\cdots,n \tag{3.9}$$

定理三 广义函数 $\partial^m\delta\theta_P$ 有(3.6)、(3.7)式给定的积分表达式，只要

$$D_\Omega=(-1)^m C_\Omega\Big/\left[\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Gamma_{G\varepsilon}}\frac{n_1^{m_1}\cdots n_n^{m_n}}{m!\,r^{n-1}}f^\alpha_{m_1\cdots m_n}\ n_\alpha d\Gamma\right] \tag{3.10}$$

在(3.6)中，$N_\alpha=N_\alpha(x-P)$，边果Γ上的积分与(2.10)相似。区域积分按下式理解

$$\int_\Omega\partial^m N_\alpha\bar{\varphi},_\alpha d\Omega=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Omega-G}\partial^m N_\alpha\bar{\varphi},_\alpha d\Omega \tag{3.11}$$

$\Gamma_{G\varepsilon}$，G 的意义同定理一。

证 类似于定理一的证明易证

$$\int_{\Omega-G}\partial^m N_\alpha\bar{\varphi},_\alpha d\Omega=\int_{\Gamma-\Gamma_G}\partial^m N_\alpha n_\alpha\bar{\varphi}d\Gamma-\int_{\Omega-G}\partial^m(N_{\alpha,\alpha})\bar{\varphi}d\Omega \tag{3.12}$$

$$\because\quad \left.\begin{array}{ll} N_{\alpha,\alpha}=0 & \text{在}\Omega-G\text{内}\\ \Gamma-\Gamma_G=\Gamma-\Gamma_\varepsilon-\Gamma_{G\varepsilon} & \end{array}\right\} \tag{3.13}$$

在(3.12)式两边让 $\varepsilon\to0$ 可推出

$$\int_\Gamma\partial^m N_\alpha n_\alpha\bar{\varphi}d\Gamma-\int_\Omega\partial^m N_\alpha\bar{\varphi},_\alpha d\Omega=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Gamma_{G\varepsilon}}\partial^m N_\alpha n_\alpha\bar{\varphi}d\Gamma \tag{3.14}$$

并且上式中的区域积分、边果积分分别由(3.11)、(2.10)式的形式定义。

$$\because\quad \lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Gamma_{G\varepsilon}}\partial^m N_\alpha n_\alpha\bar{\varphi}d\Gamma=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Gamma_{G\varepsilon}}\partial^m S_\alpha n_\alpha\bar{\varphi}d\Gamma \tag{3.15}$$

则从(3.6)式知(3.14)的右边必须等于$(-1)^m C_\Omega\partial^m\varphi(P)$。因此必须有

$$(-1)^m C_\Omega\partial^m\varphi(P)=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Gamma_{G\varepsilon}}\partial^m S_\alpha n_\alpha\bar{\varphi}d\Gamma \tag{3.16}$$

在 $x=P$ 点邻域将 $\varphi(x)$ 展成泰勒级数，则

$$\bar{\varphi}=D_\Omega\ \frac{x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}}{m!}\ \frac{\partial^m\varphi(P)}{\partial x_1^{m_1}\cdots\partial x_n^{m_n}}+o(\varepsilon^{n+1}) \tag{3.17}$$

将(3.17)代入式(3.16)中发现 D_Ω 必须且只须为

$$D_\Omega=(-1)^m C_\Omega\Big/\left[\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Gamma_{G\varepsilon}}\frac{n_1^{m_1}\cdots n_n^{m_n}}{m!}\cdot\frac{f^\alpha_{m_1\cdots m_n}}{r^{n-1}}n_\alpha d\Gamma\right] \tag{3.18}$$

因此最终我们得到

$$C_\Omega\partial^m\varphi(P)=\int_\Gamma\partial^m N_\alpha(x-P)n_\alpha(x)\bar{\varphi}(x,P)d\Gamma(x)$$
$$-\int_\Omega\partial^m N_\alpha(x-P)\bar{\varphi}(x,P),_\alpha d\Omega(x) \tag{3.19}$$

这就证明了定理三。

另外类似于(2.30)式的证明，$(\partial^m\delta\theta_P,\varphi)$也可表达为如下的形式

$$(\partial^m \delta\theta_P, \varphi) = -\int_\Gamma L'[\partial^m E^*, \bar{\varphi}] d\Gamma + \int_\Omega \partial^m E^* L(\bar{\varphi}) d\Omega \tag{3.20}$$

四、弯曲板的边界积分方程（直接法）

假定一板所占的区域为 Ω，其边界为 Γ，Γ 是光滑的。由上面几节建立的理论可以得到下面二个用于直接边界元法的边界积分方程

$$C_\Omega w(P) = \int_\Omega q w^* d\Omega + \int_\Gamma [w^* V_n + \theta_n^* M_n - w V_n^* - \theta_n M_n^*] d\Gamma \tag{4.1}$$

$$C_\Omega \theta_n(P) = \int_\Omega q w_n^* d\Omega + \int_\Gamma [V_{nn}^* \bar{w} + M_{nn}^* \theta_n - w_n^* V_n - \theta_{nn}^* M_n] d\Gamma \tag{4.2}$$

$$\bar{w} = w(x,y) - w(P) \tag{4.3}$$

这里所有带星号函数是已知函数并且 V_{nn}^* 当 $r\to 0$ 时具有 $1/r^2$ 的奇异性。θ_n，M_n，V_n 是边界Γ上的函数，w 是定义在 $\Omega+\Gamma$ 上。

许多文献得到过类似于(4.2)的方程，但那儿的 $\bar{w}$ 被 w 代替，这是不恰当的，因为在这种情况下，V_{nn}^* 将会导致 $1/r^2$ 不可积的奇异积分。

参 考 文 献

[1] Love, A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th edition, Dover, New York (1944).

[2] Pearson, C. E., *Theoretical Elasticity* (1959).

[3] Villaggio, P., *Qualitative Methods in Elasticity* (1977).

[4] Fredholm, J., Solution d'un probleme fondamental de la theorie de l'elasticite, *Arch. Mat. Astronomi och Fysik*, 2 (1906), 1—8.

[5] Kellogg, O. D., *Foundations of Potential Theory* (1953).

[6] Sternberg, W. J. and T.L. Smith, *The Theory of Potential and Spherical Harmonics* (1944).

[7] Muskhelishvili, N. I., *Singular Integral Equations* (1953).

[8] Mikhlin, S. G., *Integral Equations* (1957).

[9] Gel'fand, I. and G. Silov, *Generalized Functions*, 1—4 (1964).

[10] Flanders, H., *Differential Forms* (1963).

The Establishment of Boundary Integral Equations by Generalized Functions

Peng Xiao-lin He Guang-qian

(*China Academy of Building Research, Beijing*)

Abstract

By the theory of generalized functions this paper introduces a specific generalized function $\delta\theta_P$, by which, together with its various derivatives, the boundary integral equations and its arbitrary derivatives of any sufficiently smooth function can be established. These equations have no non-integral singularities. For a problem defined by linear partial differential operators, the partial differential equations of the problem can always be converted into boundary integral equations so long as the relevant fundamental solutions exist.