

# 圆环壳在离心力作用下的应力和位移\*

陈山林 王玳瑜 邹定祺

(重庆建筑工程学院, 1984年7月10日收到)

## 摘 要

本文应用文[1]、[2]一般轴对称问题的结果计算了圆环壳在离心力作用下的应力和位移, 解答以 Fourier 级数形式给出, 文中分别给出了部分环壳和闭合环壳的算例。

## 一、引 言

近年来, 一些作者对承受内压和轴力的圆环壳问题作了许多有价值的研究工作。鉴于工程实际的需要, 研究其余各种荷载下的圆环壳问题已为当前环壳理论的重要课题之一。文[3]利用与 Новожилов<sup>[4]</sup>相似的变换, 解决了自重计算问题; 文[2]利用更一般的变换形式, 得到了一般荷载作用下轴对称问题的解答。

圆环壳常作为一些重要旋转结构的弹性联结部件, 随着结构一起转动, 这样的旋转结构在航天、核工业和化工中均有重要用途。因而在离心力场作用下的圆环壳的应力和位移计算, 是一个有实际意义的问题。

对此问题, 沈祖培等<sup>[5]</sup>应用 Tölke 环壳复变量方程求得了渐近解和幂级数解。但是文中作了边界自由, 因而垂直剪力为零的假设。这就使结果的应用受到一定限制。

本文应用文[2]的结果, 结合钱伟长、郑思樑(1980)<sup>[1]</sup>环壳轴对称问题齐次方程的一般解, 处理了离心力场作用下圆环壳的应力和位移计算, 给出了部分环壳和闭合环壳的两组算例。本文结果考虑了垂直剪力的存在, 因而较文[5]结果更为普遍适用。

## 二、基本方程、内力和位移

考虑在离心力场作用下的弹性圆环薄壳, 其坐标、位移和几何尺寸如图1所示。问题的基本方程可以写作<sup>[2]</sup>

$$\begin{aligned} & (1 + a \sin \phi) \dot{V} - a \cos \phi \dot{V} + 2 \mu i \sin \phi \dot{V} \\ & = \frac{4 \mu^2}{\alpha} Q_0 \cos \phi + 2 \mu a q i (3 + \nu) (1 + a \sin \phi)^3 \cos \phi \end{aligned} \quad (2.1)$$

\* 钱伟长推荐。

式中

$$\alpha = \frac{a}{R}, \quad \mu = [3(1-\nu^2)]^{\frac{1}{2}} \frac{a^2}{Rh}$$

$\nu$ ——泊桑系数

$Q_0$ —— $\phi=0$  处剪力

$$q = R\omega^2\rho h$$

$\omega$ ——角速度

$\rho$ ——密度

“.”表示对 $\phi$ 求导。

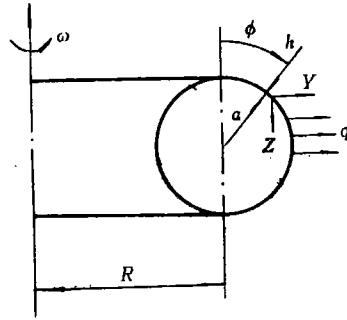


图1 坐标尺寸和位移

复函数

$$V = (1 + \alpha \sin\phi) \left[ \frac{4\mu^2}{\alpha} \frac{D}{a^2} \chi + \frac{2\mu}{a} \Phi i \right] - \frac{2\mu}{\alpha} i Q_0 \operatorname{ctg}\phi \quad (2.2)$$

式中:

$\chi$ ——经线切线转角,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad E \text{——杨氏模量,}$$

$$\Phi = \frac{R(1 + \alpha \sin\phi)}{\sin\phi} Q_\phi, \quad Q_\phi \text{——剪力.}$$

如果根据(2.1)和相应边界条件求得 $V$ , 则环壳内力和位移可按下述各式计算:

$$\left. \begin{aligned} N_\phi &= -\frac{\alpha}{2\mu} \frac{\cos\phi \operatorname{Im}V}{(1 + \alpha \sin\phi)^2} + \frac{\alpha + \sin\phi}{(1 + \alpha \sin\phi)^2} Q_0 \\ N_\theta &= -\frac{1}{2\mu} \left( \frac{\operatorname{Im}V}{1 + \alpha \sin\phi} \right)' - \frac{\alpha + \sin\phi}{(1 + \alpha \sin\phi)^2} Q_0 + \frac{\alpha}{\alpha} q(1 + \alpha \sin\phi)^2 \\ M_\phi &= \frac{\alpha a}{4\mu^2} \left[ \left( \frac{\operatorname{Re}V}{1 + \alpha \sin\phi} \right)' + \frac{\alpha \nu \cos\phi}{(1 + \alpha \sin\phi)^2} \operatorname{Re}V \right] \\ M_\theta &= \frac{\alpha a}{4\mu^2} \left[ \nu \left( \frac{\operatorname{Re}V}{1 + \alpha \sin\phi} \right)' + \frac{\alpha \cos\phi}{(1 + \alpha \sin\phi)^2} \operatorname{Re}V \right] \\ Q_\phi &= \frac{\alpha}{2\mu} \frac{\sin\phi \operatorname{Im}V}{(1 + \alpha \sin\phi)^2} + \frac{\cos\phi}{(1 + \alpha \sin\phi)^2} Q_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

以及

$$\left. \begin{aligned} \chi &= \frac{1}{\alpha E h} \frac{\operatorname{Re}V}{(1 + \alpha \sin\phi)} \\ Y &= \frac{R}{E h} (N_\theta - \nu N_\phi) (1 + \alpha \sin\phi) \\ Z &= Z_0 - \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{R \cos\phi}{E h (1 + \alpha \sin\phi)} d\phi \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

式中:

$N_\phi, N_\theta$ ——径向、环向薄膜力,  $M_\phi, M_\theta$ ——径向、环向弯矩,

$Y, Z$ ——水平和铅直位移,

$Z_0$ ——由位移 $Z$ 零位置( $\phi=\phi_0$ )规定决定。

其正方向规定同著作[6].

方程(2.1)是Новожилов型环壳变量方程, 与Töhle型方程差别在薄壳理论误差范围<sup>[7]</sup>.

右端是荷载项, 其中 $Q_0$ 系 $\phi=0$ 处剪力, 当边界没有竖向约束时, 由整体平衡条件可得 $Q_0=0$ , 这正是文[5]采用的假定. 但是在一般边界条件情况, 包括全圆环壳情形,  $Q_0 \neq 0$ , 我们应当考虑 $Q_0$ 的影响, 此时 $Q_0$ 数值可由相应位移补充条件决定. 我们将以算例2说明.

### 三、解 答

方程(2.1)的全解可以写做

$$V = V_0 + V^* \quad (3.1)$$

其中 $V_0$ 为齐次解,  $V^*$ 为非齐次解. 我们直接引述文[1]、[2]的有关结果.

$$\text{记 } V_0 = C_1' V_1 + C_2' V_2 \quad (3.2)$$

式中,  $C_1', C_2'$ 为待定复常数, 则有<sup>[1]</sup>

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \exp\left[(\beta + i\gamma)\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right)\right](R_1 + iR_2) \\ V_2 &= \exp\left[(\beta + i\gamma)\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right)\right](g_1 + ig_2) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= 1 + \sum_1^{\infty} (p_n \cos n\phi - q_n' \sin n\phi) \\ R_2 &= \sum_1^{\infty} (p_n' \sin n\phi + q_n \cos n\phi) \\ g_1 &= 1 + \sum_1^{\infty} (-1)^n (p_n \cos n\phi + q_n' \sin n\phi) \\ g_2 &= \sum_1^{\infty} (-1)^n (-p_n' \sin n\phi + q_n \cos n\phi) \\ p_n &= \frac{a_n + a_{-n}}{2}, \quad q_n = \frac{b_n + b_{-n}}{2} \\ p_n' &= \frac{a_n - a_{-n}}{2}, \quad q_n' = \frac{b_n - b_{-n}}{2} \\ C_n/C_0 &= \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad C_{-n}/C_0 = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

以及

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_n}{C_{n-1}} &= \frac{\mu - \frac{\alpha}{2} i[\lambda + i(n-1)][\lambda + i(n-2)]}{-(\lambda + in)^2 + \left\{ \mu - \frac{\alpha}{2} i[\lambda + i(n+1)][\lambda + i(n+2)] \right\}} \frac{C_{n+1}}{C_n} \\ &\quad (n > 0) \\ \frac{C_n}{C_{n+1}} &= \frac{\mu - \frac{\alpha}{2} i[\lambda + i(n+1)][\lambda + i(n+2)]}{(\lambda + in)^2 + \left\{ \mu - \frac{\alpha}{2} i[\lambda + i(n-1)][\lambda + i(n-2)] \right\}} \frac{C_{n-1}}{C_n} \\ &\quad (n < 0) \\ \left[ \mu - \frac{\alpha}{2} i(\lambda - i)(\lambda - 2i) \right] \frac{C_{-1}}{C_0} - \left[ \mu - \frac{\alpha}{2} i(\lambda + i)(\lambda + 2i) \right] \frac{C_1}{C_0} + \lambda^2 &= 0 \\ &\quad (n = 0) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

特征指数  $\lambda = \beta + i\gamma$ , 文[1]已给出其值, 此时(3.5)式中  $n=0$  关系自动满足。

记

$$V^* = B_0 + \sum_1^{\infty} (B_n \cos n\phi + B'_n \sin n\phi) \quad (3.6)$$

并设方程(2.1)右端具有级数形式

$$f(\phi) = f_0 + \sum_1^{\infty} (f_n \cos n\phi + f'_n \sin n\phi) \quad (3.7)$$

则  $V^*$  之系数可由下述方程组求解<sup>[2]</sup>

$$\left. \begin{aligned} (\mu i - \alpha) B'_1 &= f_0, \quad (\mu i - 3\alpha) B'_2 - B_1 = f_1 \\ -B'_1 + 2\mu i B_0 + (3\alpha - \mu i) B_2 &= f'_1 \\ -B_n n^2 + \left[ \mu i - \frac{\alpha}{2} (n+2)(n+1) \right] B'_{n+1} + \left[ -\mu i + \frac{\alpha}{2} (n-2)(n-1) \right] B'_{n-1} \\ &= f_n \quad (n \geq 2) \\ -B'_n n^2 + \left[ -\mu i + \frac{\alpha}{2} (n+2)(n+1) \right] B_{n+1} + \left[ \mu i - \frac{\alpha}{2} (n-2)(n-1) \right] B_{n-1} \\ &= f'_n \quad (n \geq 2) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

式中, 系数  $f_n, f'_n$  由(2.1)式容易确定为

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= 0, \quad f_1 = \frac{4\mu^2}{\alpha} Q_0 + i2\mu a q (3+\nu) \left( 1 + \frac{3\alpha^2}{4} \right) \\ f_2 &= 0, \quad f_3 = -i \frac{3\alpha^2}{2} \mu a q (3+\nu), \quad f_j = 0 \quad (j \geq 4) \\ f'_1 &= 0, \quad f'_2 = \mu a q (3+\nu) \left( 3\alpha + \frac{\alpha^3}{2} \right) i \\ f'_3 &= 0, \quad f'_4 = -\mu a q (3+\nu) \frac{\alpha^3}{4}, \quad f'_j = 0 \quad (j \geq 5) \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

由(3.8), (3.9)可以得出, 系数  $B_0, B_2, B_4, \dots$  及  $B'_1, B'_2, B'_3, \dots$  必为零。因此特解  $V^*$  的形式为

$$V^* = B_1 \cos \phi + B'_2 \sin 2\phi + B_3 \cos 3\phi + B'_4 \sin 4\phi + \dots \quad (3.10)$$

与 Новожилов<sup>[4]</sup>对内压和轴力导得的特解形式相同。

这样, 我们就得到了方程(2.1)的全解

$$V = C'_1 V_1 + C'_2 V_2 + V^* \quad (3.11)$$

式中,  $C'_1, C'_2$  将由边界条件决定。

#### 四、计算结果

作为本文结果的应用, 我们计算了两组算例。

**算例 1** 半圆弧环壳(图2), 取  $\mu=10$ ,  $\alpha$  分别为 0.3, 0.5, 0.7,  $\nu=0.3$ , 假设上下边界夹紧, 没有竖向约束, 因此, 有  $Q_0=0$ , 取边界条件为  $X=0, Y=0$  ( $\phi=0$  和  $\phi=\pi$ )。在图3~6中, 绘出了  $N_\phi, N_\theta, M_\phi, M_\theta$  以及外、内表面的应力  $\sigma_{\phi 1}, \sigma_{\theta 1}$ , 和  $\sigma_{\phi 2}, \sigma_{\theta 2}$  的计算结果。由于对称性, 图中只绘出了  $[0, 90^\circ]$  的结果, 由图中看出在  $\mu$  为定值时, 随  $\alpha$  的减小,  $\sigma_\phi$  和  $\sigma_\theta$  均增大这一规律, 并得出  $(\sigma_\phi)_{\max}$  在  $\phi=0$  处, 内外表面分别为压、拉应力。

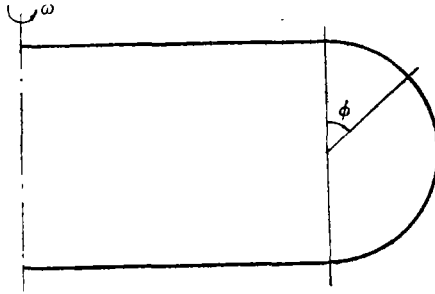


图 2 半圆弧环壳

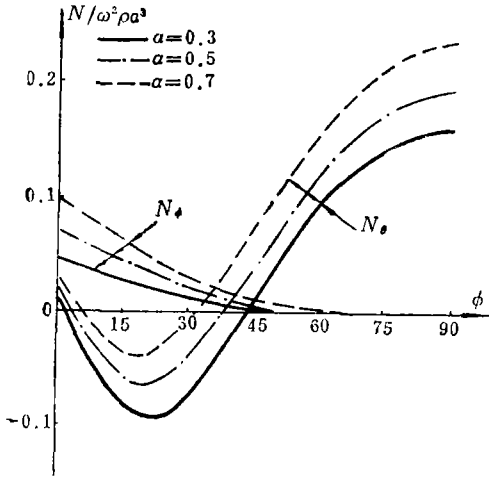


图 3

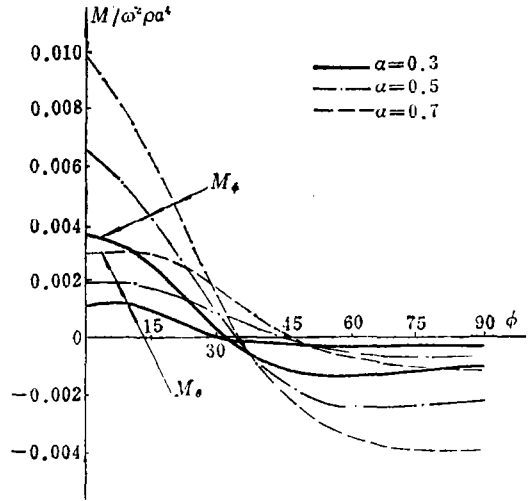


图 4

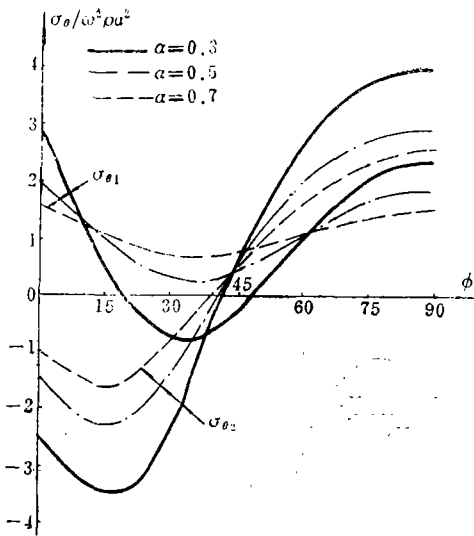


图 5

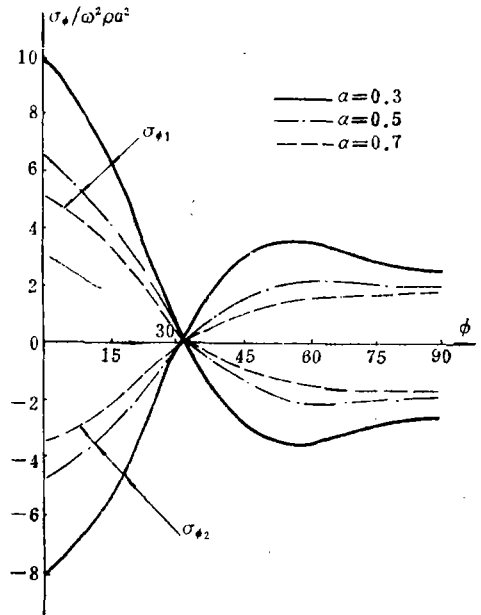


图 6

算例 2 闭合圆环壳 (图1), 取  $\nu=0.3$ ,  $h/a=1/20$ ,  $\alpha=0.3, 0.5, 0.7$ ; 此时, 解只有周期特解  $V^*$ , 剪力  $Q_0$  应由位移周期条件决定. 三个位移  $Z, \chi, Y$  中, 不难判明,  $Y, \chi$  的周期性已自动满足, 由  $Z$  的周期性, 按 (2.4) 式, 我们得到

$$\oint \frac{\cos\phi \operatorname{Re} V^*}{1 + \alpha \sin\phi} d\phi = 0 \quad (4.1)$$

上式给出决定  $V^*$  中常数  $Q_0$  的补充条件.

在图7~10中, 绘出了  $N_\theta, N_\phi, M_\theta, M_\phi$  的分布曲线, 表1中给出了应力的计算结果. 由上

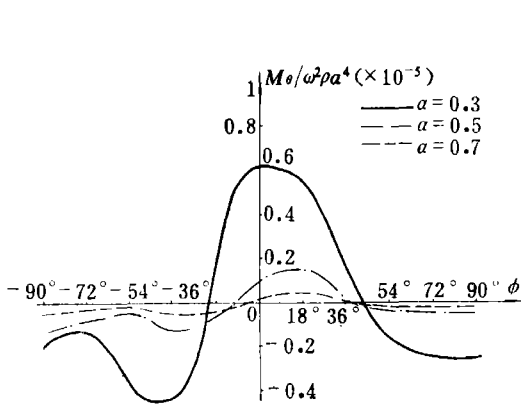


图 7

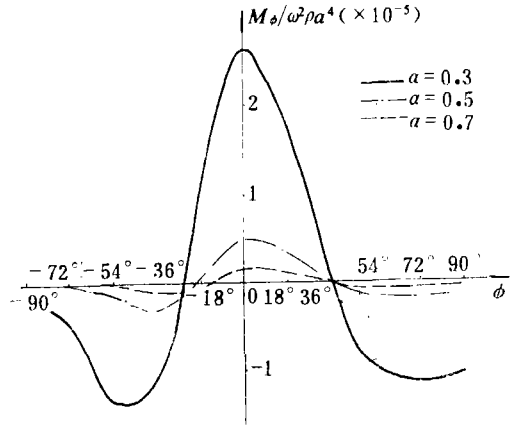


图 8

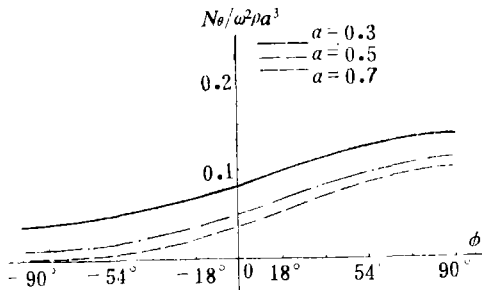


图 9

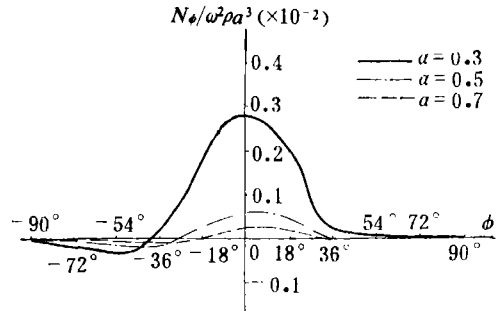


图 10

述图表可得出, 闭合环壳厚度不变时, 其内力  
和应力随距旋转轴的距离而发生急剧变化. 当  
 $\alpha=(a/R)$  由 0.5 变为 0.3 时, 即  $R$  增大了  $2/3$   
时, 最大应力  $(\sigma_\theta)_{\max}$  由  $100.5(\rho\omega^2 a^2)$  增大为  
 $169(\rho\omega^2 a^2)$ . 在图 11 中绘出了假定  $Q_0=0$  时的  
计算结果, 并与实际结果做了比较 ( $\alpha=0.3$   
时). 在  $\phi=0$  处  $(\sigma_\phi)_{\max}$  的值, 差别约为 5%,  
二者曲线变化规律相似, 数值差别较明显, 在  
某些地方 ( $\phi$  约为  $-30^\circ$  处) 差别达到 112%.  
本算例表明, 即使在离心力场这种仅有水平荷

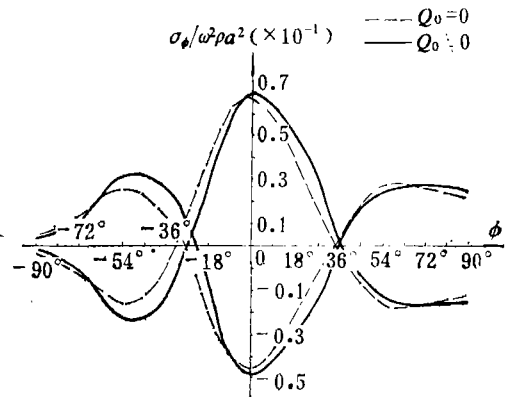


图 11

表 1

闭合环壳不同 $\alpha$ 时, 环向应力 $\sigma_\theta$ , 径向应力 $\sigma_\phi$ 值表 $(h=a/20)$ 

$\alpha$	$\phi$ $\sigma/\rho\omega^2a^2$ $\times(10^{-2})$	$\phi$										
		$-90^\circ$	$-72^\circ$	$-54^\circ$	$-36^\circ$	$-18^\circ$	$0^\circ$	$18^\circ$	$36^\circ$	$54^\circ$	$72^\circ$	$90^\circ$
0.3	$\sigma_{\phi 1}$	-0.2626	-1.177	-3.213	-2.616	2.774	6.915	4.831	0.1607	-2.370	-2.592	-2.376
	$\sigma_{\phi 2}$	0.2511	1.120	3.077	2.691	-2.066	-5.805	-3.980	0.1936	2.440	2.599	2.387
	$\sigma_{\theta 1}$	81.06	84.24	94.85	114.4	140.6	169.0	198.4	228.6	255.7	274.5	281.1
	$\sigma_{\theta 2}$	81.19	84.86	96.79	116.7	140.5	166.0	195.5	227.8	256.5	275.7	282.3
0.5	$\sigma_{\phi 1}$	-0.0169	-0.1364	-0.3231	-0.8137	0.0126	1.225	0.9671	-0.0291	-0.4427	-0.3721	-0.3168
	$\sigma_{\phi 2}$	0.0112	-0.0016	0.2898	0.7398	-0.0149	-1.050	-0.7290	0.1037	0.4249	0.3735	0.3180
	$\sigma_{\theta 1}$	24.93	27.41	35.21	49.78	72.01	100.5	133.2	167.1	197.0	217.6	224.9
	$\sigma_{\theta 2}$	24.95	27.41	35.41	50.47	72.36	100.0	132.6	166.9	197.2	217.8	225.1
0.7	$\sigma_{\phi 1}$	-0.0051	-0.0077	-0.0479	-0.3117	-0.0982	0.4483	0.3331	-0.0109	-0.1265	-0.1000	-0.0957
	$\sigma_{\phi 2}$	-0.0028	-0.0082	-0.0020	0.2401	0.1049	-0.3414	-0.2501	0.03898	0.1308	0.1107	0.0961
	$\sigma_{\theta 1}$	6.390	7.952	13.37	24.64	44.00	71.62	105.7	142.2	175.2	198.2	206.4
	$\sigma_{\theta 2}$	6.392	7.953	13.39	24.86	44.23	71.50	105.5	142.1	175.3	198.2	206.5

载的情形,  $Q_0$  (在  $\phi=0$  处即为垂直剪力) 存在, 且对结果有一定影响。这是因为, 闭合环壳内外半圆部份变形不对称, 这从图 7~10 中内力, 应力的不对称性可以推知。由于这种不对称性, 出现了剪力  $Q_0$ 。

## 参 考 文 献

- [1] 钱伟长、郑思樑, 轴对称圆环壳的一般解, 应用数学和力学, 1, 3 (1980), 287—299.
- [2] 陈山林, 圆环壳在一般荷载下的轴对称问题 (未发表)。
- [3] 王玳瑜、陈山林、吴国平, 圆环壳在自重作用下的一般解, 《国际薄壳及空间结构学术会议 (IASS) 论文集》, 莫斯科 (1985)。
- [4] Новожилов, В. В., 《薄壳理论》, 科学出版社, 北京 (1959)。
- [5] 沈祖培、吴振辉、赵鸿宾, 转动圆环壳中的应力和位移, 清华大学学报, 21, 3 (1981), 93—110.
- [6] Flegge, W., *Stresses in Shells*, 2ed., New York (1973)。
- [7] 钱伟长、郑思樑, 轴对称圆环壳的复变量方程和轴对称细环壳的一般解, 清华大学学报, 19, 1 (1979), 27—47.

## Stress and Displacement of Ring Shells under Centrifugal Force

Chen Shan-lin   Wang Dai-yu   Zou Ding-qi

*(Chongqing Institute of Architecture and Engineering, Chongqing)*

### Abstract

Using the results of ref.[1] and [2] about the general axial symmetrical problem, this paper calculates the stress and displacement of ring shell under centrifugal force. The solution is given in Fourier series form.

In the paper the examples of open ring shells and close ring shells are given respectively.