应用数学和力学,第25卷 第9期(2004年9月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004)09_0983_08

反平面剪切动态扩展裂纹尖端的弹_粘塑性场*

李范春[1], 赵文胜[2], 汤龙生[2]

(1. 大连海事大学 轮机学院, 大连 116026;
2. 航天科工集团第31研究所, 北京 100071)

(王银邦推荐)

摘要: 采用Bingham弹性_粘塑性模型对反平面剪切动态扩展裂纹尖端的应力应变场进行了渐近分析• 给出了适当的位移模式、推导了渐近方程并且给出了数值解• 分析和计算表明对于低粘性情况,裂纹尖端场具有对数奇异性• 对于高粘性情况,裂纹尖场具有幂奇异性• 对于临界情况,两种奇异性可以相互转换• 揭示了粘性在裂纹尖端场研究中的重要作用•

关 键 词: 裂纹场; 动态扩展; 粘塑性
中图分类号: O346.1 文献标识码: A

引 言

裂纹尖端的应力应变场是断裂理论的核心课题之一• 对于线弹性材料,由于应力强度因子的引入裂纹尖端场的属性已被完全揭示• 然而,对于非线性弹性材料,裂纹尖端场是非常复杂的,场的属性对材料的行为和裂纹状态非常敏感•

对于塑性材料,扩展裂纹尖端场的早期研究是由Chitaley和McMlintock[1]给出的II型问题解• 对于准静态I型扩展裂纹,在$\nu=0.5$情况下,裂纹尖端场的解由Gao[2]给出• 通过认真研究,我们发现对于扩展裂纹仍存在着许多进一步发展理论的空间• 与准静态解相比,动态具有更加合理的属性[3~5]• 但是,一些动态解含有塑性激波[3],这是令人置疑的问题•

文[6]建议了一种弹性_粘塑性模型,由文[6]给出的I型扩展裂纹尖端场的解消除了过去弹塑性解的所有缺陷• 此外,由文[6]给出的解是单参数解• 对于I、II型裂纹的应变奇异性方面的研究由文[7]~[10]给出• 本文采用Bingham提出的弹性_粘塑性模型,对反平面剪切动态扩展裂纹尖端场进行了渐近分析• 通过分析,我们发现对现低粘性情况,裂纹尖端场具有对数奇异性• 对于高粘性情况,裂纹尖端具有幂奇异性• 对于临界情况,两种奇异性可以相互转换•

1 本构模型

Bingham弹性_粘塑性本构模型如图1显示,模型由3个元件组成,即弹性元件、塑性元件

* 收稿日期: 2002_10_22; 修订日期: 2004_06_18
作者简介: 李范春(1960—),男,山东招远人,教授,博士(联系人. Tel: +86_13942049693; E_mail: lee_fc@126.com).

和粘性元件• 以 ε, ε_e, ε_p 表示总应变、弹性应变和塑性应变, σ, σ_v, σ_p 表示总应力、粘性应力和塑性应力• 则, 我们有

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p, \\ \varepsilon_e = \dfrac{\sigma}{E}, \\ \dot{\varepsilon}_p = \lambda^* \sigma_p \bullet \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_v + \sigma_p, \\ \sigma_v = \eta \dot{\varepsilon}_p, \\ \sigma_p = F(\varepsilon_p) \bullet \end{cases} \tag{2}$$

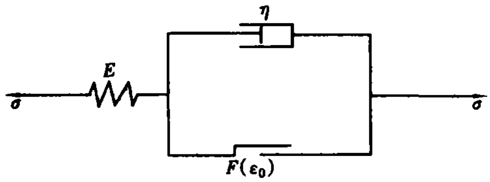


图 1　Bingham 模型

这里 λ^* 是流动因子, E 是弹性模量, η 是粘性系数, $F(\varepsilon_p)$ 是塑性加载函数,“ •” 表示对时间 t 的导数•

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \lambda^* \sigma^*, \tag{3}$$

$$\sigma^* = \frac{1}{1 + \eta\lambda^*}\sigma, \tag{4}$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}, \tag{5}$$

$$\lambda^* = \begin{cases} \dfrac{1}{\eta}\left[\dfrac{\sigma}{f(\varepsilon_p)} - 1\right] & (\sigma > f(\varepsilon_p)), \\ 0 & (\sigma \leqslant f(\varepsilon_p)) \bullet \end{cases} \tag{6}$$

由(3)~ (6)式有

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = \dfrac{\dot{\sigma}}{E} + \lambda\sigma, \\ \lambda = \dfrac{\lambda^*}{1 + \eta\lambda^*} = \dfrac{1}{\eta}\left[1 - \dfrac{F(\varepsilon_p)}{\sigma}\right], \\ \varepsilon_p = \varepsilon - \dfrac{\sigma}{E}, \end{cases} \tag{7}$$

对于三维情况, 我们以张量形式重写(1)、(2), 则有

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = \boldsymbol{C} : \dot{\sigma} + \lambda \boldsymbol{S}, \\ \lambda = \dfrac{1}{\eta}\left[1 - \dfrac{F(\varepsilon_p)}{\sigma}\right] \geqslant 0, \\ \dot{\varepsilon}_p = \dfrac{2}{3\eta}[\sigma - F(\varepsilon_p)] \bullet \end{cases} \tag{8}$$

这里 $\boldsymbol{S}$ 是 σ 的偏量, $\boldsymbol{C}$ 是四阶柔度张量, σ 是等效应力, ε_p 是等塑性应变• σ 和 ε_p 由下式定义

$$\begin{cases} \sigma = \left(\dfrac{3}{2}\boldsymbol{S} : \boldsymbol{S}\right)^{1/2}, \\ \varepsilon_p = \displaystyle\int \left(\dfrac{2}{3}\dot{\varepsilon}_p : \dot{\varepsilon}_p\right) \mathrm{d}t \bullet \end{cases} \tag{9}$$

2　基 本 方 程

让 X_i $(i = 1, 2)$ 表示固定的笛卡尔坐标系统• 我们考虑沿 X_1 方向以常速度 V 扩展的 III 型裂纹• 以 x, y 表示随裂纹一起运动的正交的坐标系统• 则有

$$\begin{cases} X_1 = x + Vt, \\ X_2 = y, \end{cases} \tag{10}$$

这里 t 表示时间(见图 2)•

稳恒扩展裂纹是指如果在 x, y 坐标观察应力和应变场, 场将不随时间而改变• 对于任意量 Φ, 我们有它的率为:

$$\dot{\Phi} = -V\frac{\partial}{\partial x}\Phi = V\left[\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\right]\Phi, \tag{11}$$

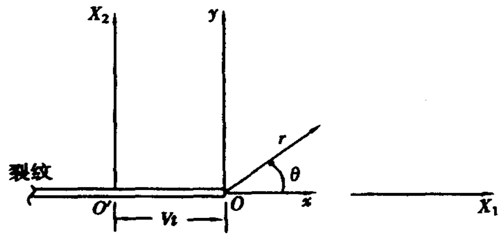


图 2　运动和静止坐标

这里

$$\begin{cases} \Phi = \Phi_{ij\cdots k}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\cdots\boldsymbol{e}_k, \\ \dot{\Phi} = \dot{\Phi}_{ij\cdots k}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\cdots\boldsymbol{e}_k• \end{cases} \tag{12}$$

以 τ_{ij}, γ_{ij} 和 W 分别表示应力分量、应变分量和位移分量• 则, 有运动方程和几何关系为:

$$\frac{\partial\tau_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\tau_r = \rho\ddot{W}, \tag{13}$$

$$\begin{cases} \gamma_r = \dfrac{\partial W}{\partial r}, \\ \gamma_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial W}{\partial\theta}• \end{cases} \tag{14}$$

这里 ρ 是质量密度•

现在, 我们考虑塑性单元呈现理想塑性这种特殊情况• 利用方程(8), (9), 我们有极坐标系下的本构关系•

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_\alpha = \dfrac{1}{\mu}\dot{\tau}_\alpha + \dfrac{1}{\eta}\tau_\alpha\left[1 - \dfrac{\tau_0}{\tau}\right] \\ \tau = (\tau_r^2 + \tau_\theta^2)^{1/2} \end{cases} \quad (\alpha = r, \theta), \tag{15}$$

这里 μ 是剪切模量, η 是粘性系数, τ_0 是剪切屈服应力, τ 等效剪切应力• 现在我们给出一种人工粘性分布, η 由下式定义:

$$\eta = \begin{cases} \eta_0 & (r > R), \\ \eta_0\dfrac{r}{R} & (r \leqslant R), \end{cases} \tag{16}$$

这里 η_0 为常数, R 是特征尺寸• 对于渐近解, 我们仅仅考虑 $r < R$ 的区域• 则方程(15)可写为

$$\dot{\gamma}_\alpha = \frac{1}{\mu}\dot{\tau}_\alpha + \frac{R}{\eta_0 r}\tau_\alpha\left[1 - \frac{\tau_0}{\tau}\right], \qquad (\alpha = r, \theta)• \tag{17}$$

3　对数奇异性

我们假设位移模式为

$$W = r\left[A\sin\theta\ln\frac{R}{r} + g(\theta)\right], \tag{18}$$

这里 A 是常数, 则有

$$\ddot{W} = \frac{V^2}{r}\sin\theta[A\cos 2\theta + (g'' + g)\sin\theta], \tag{19}$$

$$\dot{\gamma}_r = 0, \quad \dot{\gamma}_\theta = \frac{V}{r}\left[A\cos 2\theta + (g'' + g)\sin\theta\right] \cdot \tag{20}$$

设

$$\begin{cases} \tau_r = T_r(\theta)\tau_0, \quad \tau_\theta = T_\theta(\theta)\tau_0, \\ \tau = T(\theta)\tau_0, \end{cases} \tag{21}$$

从方程(13),(15)我们得

$$f'' + f + \frac{A}{\sin\theta}\cos 2\theta - \frac{\alpha T_\theta}{1 - M^2\sin^2\theta}\frac{1}{\sin\theta}\left(1 - \frac{1}{T}\right) = 0, \tag{22}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}T_r}{\mathrm{d}\theta} - T_\theta + \dfrac{\alpha}{\sin\theta}T_r\left(1 - \dfrac{1}{T}\right) = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}T_\theta}{\mathrm{d}\theta} + T_r - \dfrac{\alpha M^2\sin\theta}{1 - M^2\sin^2\theta}T_\theta\left(1 - \dfrac{1}{T}\right) = 0, \end{cases} \tag{23}$$

这里

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{2\mu R}{\eta V}, \; f = \dfrac{\mu}{\tau_0}g, \\ A = \dfrac{\mu}{\tau_0}A, \quad M = V\left(\dfrac{\rho}{\mu}\right)^{1/2} \cdot \end{cases} \tag{24}$$

进一步,我们引进新函数 ψ 和 λ:

$$\begin{cases} T = 1 + \dfrac{\lambda}{\alpha}, \\ T_r = -T\cos\psi, \\ T_\theta = T\sin\psi \cdot \end{cases} \tag{25}$$

则方程(22),(23)变为

$$f'' + f + \frac{A}{\sin\theta}\cos 2\theta - \frac{\lambda\sin\psi}{\sin\theta}\frac{1}{1 - M^2\sin^2\theta} = 0, \tag{26}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\theta} + \dfrac{\lambda}{\sin\theta}\dfrac{\cos^2\psi - M^2\sin^2\theta}{1 - M^2\sin^2\theta} = 0, \\ \left(1 + \dfrac{\lambda}{\alpha}\right)\left(\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\theta} - 1\right) - \dfrac{\lambda}{\sin\theta}\dfrac{\sin\psi\cos\psi}{1 - M^2\sin^2\theta} = 0 \cdot \end{cases} \tag{27}$$

边界条件为

$$\tau_r\mid_{\theta=0} = \tau_\theta\mid_{\theta=\pm\pi} = 0 \cdot \tag{28}$$

则有

$$\psi(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \psi(\pi) = \pi \cdot \tag{29}$$

$f(\theta)$ 是奇函数· 在 $\theta = 0$ 处,解的正则性要求:

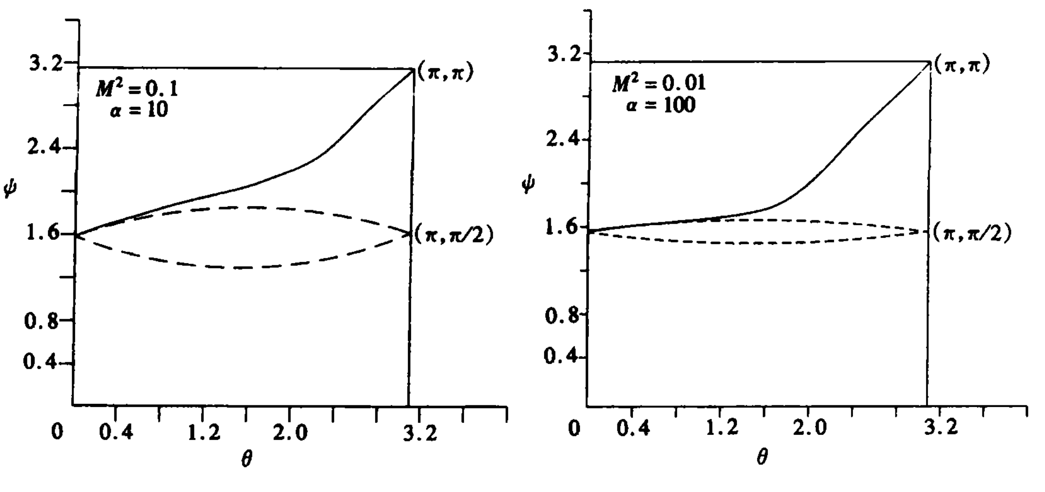
$$\lambda(0) = A \cdot \tag{30}$$

常数 A 是满足条件 $\psi(\pi) = \pi$ 的待定常数·

数值解由图3(a,b)给出· 对于固定的 M,存在一个 $\alpha_{cr}(M)$ 的临界值,仅仅当 $\alpha > \alpha_{cr}$ 时解存在· α_{cr} 和 M 之间的关系由图5表示·

4　幂奇异性

正如上面所提及的,对于固定的 M,当 $\alpha < \alpha_{cr}$ 时,对数奇异性解不存在· 因此,我们试图找到其他类型的解· 我们假设



(a) (b)

图 3 ψ_θ 曲线

$$W = h(\theta)r^{1-\delta}, \tag{31}$$

这里, δ 是一个待求量, 则有

$$\ddot{W} = r^{-1-\delta}V^2\{h''\sin^2\theta + \delta h'\sin 2\theta + (1-\delta)[1-(1+\delta)\cos 2\theta]h\} \tag{32}$$

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_r = -\delta V r^{-1-\delta}[h'\sin\theta - (1-\delta)h\cos\theta], \\ \dot{\gamma}_\theta = V r^{-1-\delta}[h''\sin\theta + \delta h'\cos\theta + (1-\delta)h\sin\theta] \cdot \end{cases} \tag{33}$$

让

$$\tau_r = S_r(\theta)\tau_0 r^{-\delta}, \quad \tau_\theta = S(\theta)\tau_0 r^{-\delta} \cdot \tag{34}$$

由(13), (15) 得

$$\begin{aligned} &\sin\theta(1-M^2\sin^2\theta)(h''+h) + \delta h'\cos\theta(1-2M^2\sin^2\theta) - \\ &\quad \delta h\sin\theta[1-M^2(1-\delta)-\delta M^2\sin^2\theta] - (\alpha+\delta\cos\theta)S_\theta - \delta S_r\sin\theta = 0 \cdot \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{cases} (1-M^2\sin^2\theta)(S_\theta'+S_r) - \delta S_r - \delta M^2 S_\theta\sin\theta\cos\theta - \\ \quad \alpha M^2 S_\theta\sin\theta - M^2\delta\cos\theta[h'\sin\theta-(1-\delta)h\cos\theta] = 0, \\ (S_r' - S_\theta)\sin\theta + S_r(\alpha+\delta\cos\theta) + \delta[h'\sin\theta-(1-\delta)h\cos\theta] = 0 \cdot \end{cases} \tag{36}$$

我们引入新函数 S 和 ψ 即

$$\begin{cases} S_r = -S\cos\psi, \\ S_\theta = S\cos\psi \end{cases} \tag{37}$$

方程(36) 变为

$$\begin{cases} S' + \dfrac{(\delta\cos\theta+\alpha)(\cos^2\psi - M^2\sin^2\theta)}{\sin\theta(1-M^2\sin^2\theta)}S + \dfrac{\delta\cos\psi\sin\psi}{(1-M^2\sin^2\theta)}S - \\ \quad \dfrac{\delta[\cos\psi + M^2\sin\theta\sin(\psi-\theta)]}{\sin\theta(1-M^2\sin^2\theta)}[h'\sin\theta-(1-\delta)h\cos\theta] = 0, \\ S(\psi'-1) - \dfrac{(\delta\cos\theta+\alpha)\sin\psi\cos\psi}{\sin\theta(1-M^2\sin^2\theta)}S - \dfrac{\delta\cos\psi}{\sin\theta}\sin(\psi-\theta)S + \\ \quad \dfrac{\delta[\sin\psi + M^2\sin\theta\sin(\psi-\theta)]}{\sin\theta(1-M^2\sin^2\theta)}[h'\sin\theta-(1-\delta)h\cos\theta] = 0 \cdot \end{cases} \tag{38}$$

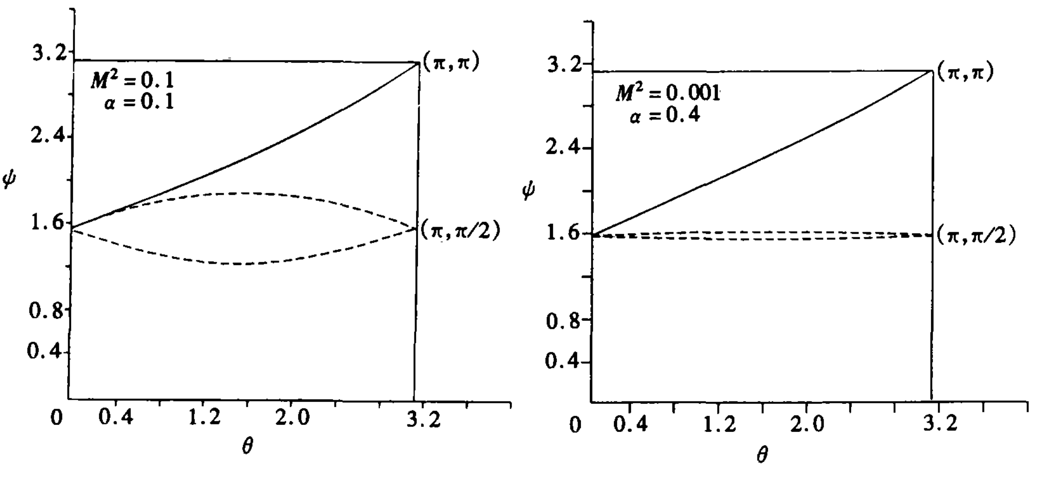
边界条件为

$$\phi(0)=\frac{\pi}{2},\quad \phi(\pi)=\pi. \tag{39}$$

$\theta=0$ 处的正则条件要求

$$h'(0)=1+\frac{\alpha}{\delta}. \tag{40}$$

数值计算显示对于固定的 M. 当 $\alpha<\alpha_{cr}$ 时, 解总是存在, 而且当 $\alpha\to 0$ 时 $\delta\to 1/2$. 当 $\alpha\to\alpha_{cr}$ 时 $\delta\to 0$. 则 ϕ_θ 曲线由图 4(a, b)给出.



(a) (b)

图 4 ϕ_θ 曲线

5 极限情况

由(40), 我们发现当 $\delta\to 0(\alpha\to\alpha_{cr})$ 时

$$h'\to\infty. \tag{41}$$

如果我们设

$$h(\theta)=\frac{H(\theta)}{\delta}+h_0(\theta)+\delta h_1(\theta)+\cdots \tag{42}$$

将方程(42)代入到方程(35), (38), 比较 δ, δ^2, .., 的系数, 我们得

$$H=C\sin\theta, \tag{43}$$

$$\begin{aligned}&\sin\theta(1-M^2\sin^2\theta)(h_0''+h_0)+\\&\quad C\cos^2\theta(1-M^2\sin\theta)-\\&\quad C\sin^2\theta(1-M^2)-aS\sin\phi=0,\end{aligned} \tag{44}$$

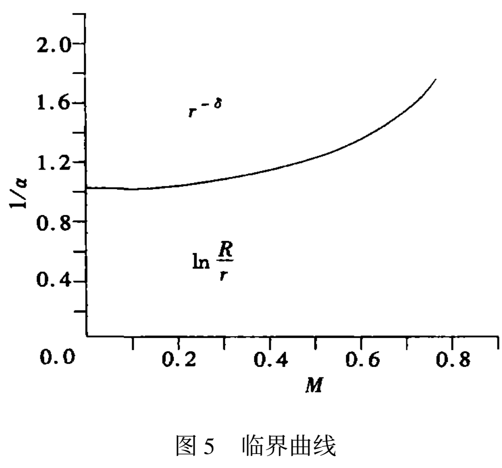


图 5 临界曲线

$$\begin{cases}S'+\dfrac{\alpha(\cos^2\phi-M^2\sin^2\theta)}{\sin\theta(1-M^2\sin^2\theta)}S=0,\\[2ex]\phi'-1-\dfrac{\alpha\sin\phi\cos\phi}{\sin\theta(1-M^2\sin^2\theta)}=0.\end{cases} \tag{45}$$

进一步, 我们考虑 $\lambda\gg 1$的情况且令 $\lambda=S$, 则方程(27) 将与方程(45) 具有相同的形式.

因而, 对数奇异性($\lambda \to \infty$) 与幂奇异性($\delta \to \infty$) 具有相同的极限•

6 结 论

1) 对于弹性_粘塑性材料, 反平面剪切动态扩展裂纹尖端场由粘性所控制• 当粘性系数 η_0 较小时, 解具有数奇异性• 当粘性系数 η_0 较大, 解具有幂奇异性• 对于临界情况, 两种动态解相同•

2) 本文结果显示, 当考虑粘性时, 动态解与弹_塑性解具有本质的区别•

[参 考 文 献]

[1] Chitaley A D, McClitock F A. Elastic_plastic methanics of steady crack growth under anti_plane shear [J]. J Mech Phys Solids, 1971, **19**(3): 163—174.

[2] Gao Y C. Elastic plastic field at the tip of a crack growing stearily in perfect plastic medium[J]. Acta Mech Sinica, 1980, **12**(1): 48—56.

[3] Gao Y C, Nemat Nasser S. Dynamic fields near a crack_tip growing in an elastic_perfectly_plastic solid [J]. Mech Mater, 1983, **2**: 47—60.

[4] Gao Y C. Asymptotic dynmaic solution of mode Ⅰ propagating crack_tip field[J]. Internat J Fract, 1985, **29**(4): 171—180.

[5] Gao Y C, Nemat Nasser S. Mode Ⅱ dynamic fields near a crack tip growing in an elastic_perfectly_plastic solid[J]. J Mech Phys Solids, 1984, **32**(1): 1—19.

[6] Gao Y C. Uniparameter plastic field near a dynamic crack tip[J]. Mechanics Research Communication, 1988, **15**(5): 307—313.

[7] Gao Y C. Further study on strain singularity behavior of moving crack in elastic_viscoplastic materials [J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 1990, **14**(3): 233—242.

[8] LI Fan_chun. The influence of a rate sensitive effect of material for a propagating crack_tip field[J]. Acta Mech Solids, 1992, **5**(2): 184—192.

[9] LI Fan_chun. Investigation on the asymptotic solution for the mode Ⅲ moving crack_tip field[J]. Acta Mech Sinica, 1993, **25**(6): 732—737.

[10] 李范春, 齐辉. 弹性_应变软化粘塑性材料反平面剪切动态扩展裂纹尖端的渐近解[J]. 应用数学和力学, 1997, **18**(2): 161—168.

Elastic_Viscoplastic Fieds Near The Tip of a Propagating Crack Under Anti_Plane Shear

LI Fan_chun[1], ZHAO Wen_sheng[2], TANG Long_sheng[2]
(1. Marine Engineering College, Dalian Maritime University, Dalian 116026, P. R. China;
2. The 31th Institute of CASIC, Beijing 100071, P. R. China)

Abstract: The elastic_viscoplastic model proposed by Bingham was used to alalyse the stress and strain surrounding the tip of a propagating crack under antiplane shear. The proper displacement pattern was given; the asymptotic equations were derived and solved numerically. The analysis and calculation show that for smaller viscosity the crack_tip possesses logarthmic singularity, and for larger viscosity it possesses power_law singularity. In critical case, the two kinds of singularity are consistent with each other. The result revealed the important role of viscosity for crack_tip field.

Key words: crack_tip field; dynamic propagating; viscoplastic