应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

奇摄动拟线性系统的边界层和角层性质

林 宗 池

（福建师范大学数学系，1985年2月28日收到）

摘 要

本文利用微分不等式的方法研究二阶拟线性系统狄立克雷问题解的存在和当$\varepsilon\to0^+$时它们的渐近性质．根据退化解在(a,b)中是否有连续的一阶偏导数，研究了解的两种渐近形式，从而导出边界层和角层现象．

一、引 言

某些作者已对纯量边值问题

$$\varepsilon y''=f(t,y)y'+g(t,y)\qquad(a<t<b)\tag{1.1}$$

$$y(a,\varepsilon)=A,\ y(b,\varepsilon)=B\tag{1.2}$$

应用微分不等式的方法得到关于解的存在及其当$\varepsilon\to0^+$时渐近性质的相当一般的结果．但是奇异摄动的向量二阶方程

$$\varepsilon\mathbf{y}''=f(t,\mathbf{y})\mathbf{y}'+\mathbf{g}(t,\mathbf{y})\tag{1.3}$$

$$\mathbf{y}(a,\varepsilon)=\mathbf{A}(\varepsilon),\ \mathbf{y}(b,\varepsilon)=\mathbf{B}(\varepsilon)\tag{1.4}$$

的研究尚处于萌芽状态．对于向量问题的结果，尤其是与纯量理论相比较，是很不完善的，因为在纯量问题中我们早已注意到，(1.1)的纯量形式就已经是十分复杂了，而(1.3)的向量形式是更加复杂和困难的．研究系统(1.3)的主要困难起因于右边带有一阶导数．因此，我们必须在f稍加限定的条件下处理这个问题也许是不奇怪的．为了应用 O'Donnell[1] 的技巧，我们必须假设f是对角矩阵．也就是我们假定 (1.3) 是一个弱耦合的系统，在这个系统中第i个分量的导数仅仅出现在第i个方程中．在(1.3)、(1.4)中$\mathbf{y}=(y_1,\cdots,y_n)$，$\mathbf{y}'=(y_1',\cdots,y_n')$，$\mathbf{g}=(g_1,\cdots,g_n)$，$\mathbf{A}=(A_1,\cdots,A_n)$和$\mathbf{B}=(B_1,\cdots,B_n)$是$n$-维向量，$\varepsilon>0$是一个正的小参数．

我们的目的是要证明在适当的条件下，存在(1.3)的解，这个解对于一切充分小的ε呈现边界层和角层的性质．

我们假设对应的退化方程

$$\left.\begin{aligned}&f(t,\mathbf{u})\mathbf{u}+\mathbf{g}(t,\mathbf{u})=0\qquad(a<t<t_1\leqslant b)\\&\mathbf{u}(a)=\mathbf{A}\end{aligned}\right\}\tag{R_l}$$

或

$$\left.\begin{array}{ll} f(t,\mathbf{u})\mathbf{u}'+\mathbf{g}(t,\mathbf{u})=0 & (a\leqslant t_2<t<b) \\ \mathbf{u}(b)=\mathbf{B} & \end{array}\right\} \qquad (R_r)$$

至少有一个解$\mathbf{u}_l(t)=(u_{l1}(t),\cdots,u_{ln}(t))$或$\mathbf{u}_r(t)=(\mathbf{u}_{r1}(t),\cdots,u_{rn}(t))$。象在纯量中的情形一样，我们要求解$\mathbf{u}_l(t)$或$\mathbf{u}_r(t)$是Ⅰ$_q$-稳定、Ⅱ$_n$-稳定或Ⅲ-稳定。它们的定义将在第三节中给出。这种“依分量”的Ⅰ$_q$-稳定、Ⅱ$_n$-稳定或Ⅲ$_n$-稳定将使得我们能够对(1.3)、(1.4)的解$\mathbf{y}(t,\varepsilon)$的每个分量进行估计。

二、某些预备结果

为了读者方便起见，本节收集一些在证明我们的主要定理中要用到的结果。让我们研究两点边值问题

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{y}''=f(t,\mathbf{y})\mathbf{y}'+\mathbf{g}(t,\mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(0)=\mathbf{A},\ \mathbf{y}(1)=\mathbf{B} \end{array}\right\} \qquad (2.1)$$

其中$\mathbf{y}$、$\mathbf{g}$、$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$是n-维向量函数和$f(t,\mathbf{y})$是$n\times n$正的对角矩阵函数。

下列引理是文[2]中定理1.13.1的特殊情形。

引理1 假定存在n个界定函数对$(\alpha_i(t),\ \beta_i(t))\in C^{(2)}[a,b]$，并且满足

$$\alpha_i(a)\leqslant A_i\leqslant\beta_i(a),\ \alpha_i(b)\leqslant B_i\leqslant\beta_i(b) \qquad (i=1,\cdots,n) \qquad (2.2a)$$

$$\alpha_i(t)\leqslant\beta_i(t) \qquad (t\in(a,b),\ i=1,\cdots,n) \qquad (2.2b)$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha''_i\geqslant f_i(t,y_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,y_n)\alpha'_i(t)+g_i(t,y_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,y_n) \\ \beta''_i\leqslant f_i(t,y_1,\cdots,\beta_i,\cdots,y_n)\beta'_i(t)+g_i(t,y_1,\cdots,\beta_i,\cdots,y_n) \end{array}\right\} \qquad (2.2c)$$

对所有$t\in(a,b)$，$\alpha_j(t)\leqslant y_j\leqslant\beta_j(t)$，$j\neq i$成立。再假设$f$和$\mathbf{g}$在区域$[a,b]\times\prod_{i=1}^{n}[\alpha_i,\beta_i]$中是连续的。

则问题(2.1)有一个$C^{(2)}[a,b]$类的解$\mathbf{y}(t)=(y_1(t),\cdots,y_n(t))$满足

$$\alpha_i(t)\leqslant y_i(t)\leqslant\beta_i(t) \qquad (t\in[a,b],\ i=1,\cdots,n)$$

下面引理1的推广[3]也是需要的。

引理2 研究问题(2.1)，并假定存在n个界定函数对(α_j,β_j) $(j=1,\cdots,n)$，它们在$[a,b]$上是逐段$C^{(2)}$类，即$[a,b]$有分点$\{t_i\}_{i=1}^{m}$，$a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b$，使得在每一个子区间$[t_{i-1},t_i]$ $(i=1,\cdots,m)$上(α_j,β_j) $(j=1,\cdots,n)$都是二次连续可微的，在分点t_{i-1}和t_i处，导数分别是右导数和左导数。假定(2.2a)、(2.2b)、(2.2c)在每一个子区间$[t_{i-1},t_i]$成立。最后，假定对$[a,b]$内每一点t，$D_L\alpha_i(t)\leqslant D_R\alpha_i(t)$和$D_L\beta_i(t)\geqslant D_R\beta_i(t)$，其中$D_L$，$D_R$分别表示左、右导数。

则(2.1)有一个$C^{(2)}[a,b]$类解$\mathbf{y}=(y_1(t),\cdots,y_n(t))$，且满足

$$\alpha_i(t)\leqslant y_i(t)\leqslant\beta_i(t)$$

其中$t\in[a,b]$ $(i=1,\ 2,\cdots,\ n)$。

三、边界层现象

现在让我们研究(1.3)～(1.4)的解，这个解在$t=a$或$t=b$呈现边界层性质。首先我们假

定退化问题(R_l)或(R_r)有一个$C^{(2)}[a,b]$类的解$\mathbf{u}_l(t)=(u_{l1}(t),\cdots,u_{ln}(t))$或$\mathbf{u}_r(t)=(u_{r1}(t),\cdots,u_{rn}(t))$。我们定义区域

$$D_i(u_{li})=\{y_i:|y_i-u_{li}(t)|\leqslant d_{li}(t)\}$$

和

$$D_i(u_{ri})=\{y_i:|y_i-u_{ri}(t)|\leqslant d_{ri}(t)\}\qquad(i=1,\cdots,n)$$

其中

$$d_{li}(t)=\begin{cases}|B_i-u_{li}(b)|+\delta & (\text{当}b-\delta\leqslant t\leqslant b)\\ \delta & (\text{当}a\leqslant t\leqslant b-\delta)\end{cases}$$

和

$$d_{ri}(t)=\begin{cases}|A_i-u_{ri}(a)|+\delta & (\text{当}a\leqslant t\leqslant a+\delta)\\ \delta & (\text{当}a+\delta\leqslant t\leqslant b)\end{cases}$$

这里的δ是一个正的小常数。

若$A_i\geqslant u_i(a)$和$B_i\geqslant u_i(b)$，则我们定义

$$\tilde{D}_i(u_i)=\{y_i:0\leqslant y_i-u_i\leqslant d_i(t)\}\qquad(t\in[a,b])$$

且若$A_i\leqslant u_i(a)$和$B_i\leqslant u_i(b)$，则我们定义

$$\tilde{\tilde{D}}_i(u_i)=\{y_i:-d_i(t)\leqslant y_i-u_i(t)\leqslant 0\}\qquad(t\in[a,b])$$

其中$u_i=u_{li}$或u_{ri}和$d_i=d_{li}$或d_{ri}。

第二个假设是$\mathbf{u}$在下列强的意义下附加满足退化的微分方程，即对于具有$y_j\in D_j$ $(j\neq i)$的一切$(t,\mathbf{y}_{u_i})=(t,y_1,\cdots,y_{i-1},u_i,y_{i+1},\cdots,y_n)$，

$$f_i(t,\mathbf{y}_{u_i})u_i'+g_i(t,\mathbf{y}_{u_i})=0\tag{3.1}$$

这个退化方程(3.1)的解就称为强的退化解，以便使它与退化系统(R_r)或(R_l)的退化解加以区别。第二个假定确切的限制是使我们能消除系统间的相互影响，从而把纯量理论应用于问题(1.3)、(1.4)。最后，我们要求$\mathbf{u}_l$或$\mathbf{u}_r$在下面意义下是稳定的。

定义1 退化问题(R_l)或(R_r)的强的退化解$\mathbf{u}_l(t)=(u_{l1}(t),\cdots,u_{ln}(t))$或$\mathbf{u}_r(t)=(u_{r1}(t),\cdots,u_{rn}(t))$称为是按分量Ⅰ$_q$-稳定、Ⅱ$_n$-稳定或Ⅲ$_n$-稳定，如果存在$n$个正的常数$m_1,\cdots,m_n$使得函数$f_i(t,\mathbf{y})u_i'(t)+g_i(t,\mathbf{y})$分别满足

(i) $$\frac{\partial^j f_i(t,\mathbf{y}_{u_i})}{\partial y_i^j}u_i'(t)+\frac{\partial^j g_i(t,\mathbf{y}_{u_i})}{\partial y_i^j}=0\qquad\begin{pmatrix}0\leqslant j\leqslant 2q,\ i=1,\cdots,n;\\ (t,y_j)\in[a,b]\times D_j;\ j\neq i\end{pmatrix}$$

和

$$\frac{\partial^{2q+1}f_i(t,\mathbf{y})}{\partial y_i^{2q+1}}u_i'(t)+\frac{\partial^{2q+1}g_i(t,\mathbf{y})}{\partial y_i^{2q+1}}\geqslant m_i>0$$

$$\left(i=1,\cdots,n;\ (t,\mathbf{y})\in[a,\ b]\times\prod_{i=1}^{n}D_i\right)\tag{3.2}$$

(ii) 若$u_i(a)\leqslant A_i$，$u_i(b)\leqslant B_i$且

$$\frac{\partial^j f_i(t,\mathbf{y}_{u_i})}{\partial y_i^j}u_i'(t)+\frac{\partial^{2q+1}g_i(t,\mathbf{y}_{u_i})}{\partial y_i^j}\geqslant 0$$

$$(1\leqslant j\leqslant n-1,\ i=1,\cdots,n;\ (t,y_j)\in[a,b]\times\tilde{D}_j;\ j\neq i)$$

和

$$\frac{\partial^n f_i(t,\mathbf{y})}{\partial y_i^n}u_i'(t)+\frac{\partial^n g_i(t,\mathbf{y})}{\partial y_i^n}\geqslant m_i>0$$

$$(i=1,\cdots,n;\ (t,\mathbf{y})\in[a,b]\times\prod_{i=1}^{n}\tilde{D}_i) \tag{3.3}$$

(iii) 若$u_i(a)\geqslant A_i$, $u_i(b)\geqslant B_i$

$$\frac{\partial^{j_o(j_e)}f_i(t,\mathbf{y}_{u_i})}{\partial y_i^{j_o(j_e)}}u_i'(t)+\frac{\partial^{j_o(j_e)}g_i(t,\mathbf{y}_{u_i})}{\partial y_i^{j_o(j_e)}}\geqslant 0\ (\leqslant 0)$$

$$(i=1,\cdots,\ n;\ 1\leqslant j_o,\ j_e\leqslant n-1;\ (t,y_j)\in[a,b]\times\tilde{\tilde{D}}_j;\ j\neq i)$$

其中$j_0(j_e)$表示奇（偶）整数，和

$$\frac{\partial^n f_i(t,\mathbf{y})}{\partial y_i^n}u_i'(t)+\frac{\partial^n g_i(t,\mathbf{y})}{\partial y_i^n}\leqslant -m_i<0\ (\geqslant m_i>0) \tag{3.4}$$

$(t,\mathbf{y})\in[a,b]\times\prod_{i=1}^{n}\tilde{\tilde{D}}_i$，若$n$是偶（奇）整数。

定义2 退化问题(R_l)或(R_r)的解$\mathbf{u}_l(t)=(u_{l1}(t),\cdots,\ u_{ln}(t))$或$\mathbf{u}_r(t)=(u_{r1}(t),\cdots,u_{rn}(t))$称为在$[a,b]$中是弱稳定的，如果在$D_i$、$\tilde{D}_i$或$\tilde{\tilde{D}}_i$中$f_i(t,\mathbf{y})\geqslant 0$或$f_i(t,\mathbf{y})\leqslant 0$。

定理1 假设退化问题(R_r)或(R_l)有一个$C^{(2)}[a,b]$类的按分量I_q-稳定的解$\mathbf{u}_r(t)=(u_{r1}(t),\ \cdots,\ u_{ri}(t),\cdots,u_{rn}(t))$或$\mathbf{u}_l(t)=(u_{l1}(t),\cdots,\ u_{li}(t),\cdots,\ u_{ln}(t))$，它也是弱稳定的，则存在一个$\varepsilon_0>0$使得对于$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，边值问题(1.3)、(1.4)有一个解$\mathbf{y}(t,\varepsilon)=(y_1(t,\varepsilon),\cdots,y_i(t,\varepsilon),\cdots,\ y_n(t,\varepsilon))$，满足

$$|y_i(t,\varepsilon)-u_{li}(t)|\leqslant W_R^i(t,\varepsilon)+\Gamma_i(\varepsilon)\qquad(t\in[a,b])$$

或

$$|y_i(t,\varepsilon)-u_{ri}(t)|\leqslant W_L^i(t,\varepsilon)+\Gamma_i(\varepsilon)\qquad(t\in[a,b])$$

其中

$$W_R^i(t,\varepsilon)=\begin{cases}|B_i-u_{li}(b)|\exp[-(m_i\varepsilon^{-1})^{1/2}(b-t)], & 若q=0\\ |B_i-u_{li}(b)|[1+\sigma_i|B_i-u_{li}(b)|^q\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(b-t)]^{-\frac{1}{q}}, & 若q\geqslant 1\end{cases}$$

$$W_L^i(t,\varepsilon)=\begin{cases}|A_i-u_{ri}(a)|\exp[-(m_i\varepsilon^{-1})^{1/2}(t-a)], & 若q=0\\ |A_i-u_{ri}(a)|[1+\sigma_i|A_i-u_{ri}(a)|^q\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t-a)]^{-\frac{1}{q}}, & 若q\geqslant 1\end{cases}$$

$$\sigma_i=m_i^{1/2}q[(q+1)(2q+1)!]^{-1/2}$$

$\Gamma_i(\varepsilon)=c_i\varepsilon^{1/(2q+1)}$，$c_i$是某一正的常数

证明 定理1可从引理1得出，如果我们能够构造出满足性质(2.2a)～(2.2c)的上、下函数对$\alpha_i(t,\varepsilon)$和$\beta_i(t,\varepsilon)$。自然，这里是用$\alpha_i(t,\varepsilon)$，$\beta_i(t,\varepsilon)$去代替引理中的$\alpha_i(t)$和$\beta_i(t)$，而用$\varepsilon^{-1}[f_i(t,\mathbf{y})u_i'(t)+g_i(t,\mathbf{y})]$去代替$f_i(t,\mathbf{y})u_i'(t)+g_i(t,\mathbf{y})$。

由假设(3.2)，我们一定有$f_i(t,\mathbf{y})u_i'(t)+g_i(t,\mathbf{y})\sim m_iy_i^{2q+1}$，而且自然引导我们去研究微分方程

$$\varepsilon Z_i''=\frac{m_i}{(2q+1)!}Z_i^{2q+1} \tag{3.5}$$

事实上，函数$W_L^i(t,\varepsilon)$是非负的，而且就是(3.5)满足始值条件

$$W_L^i(a,\varepsilon)=|A_i-u_i(a)|$$

和

$$W_L^{i\prime}(a,\varepsilon)=-\left(\frac{m_i}{\varepsilon(q+1)(2q+1)!}\right)^{1/2}|A_i-u_i(a)|^{q+1}$$

的始值问题解。这个解递减向右，类似地，函数$W_R^i(t,\varepsilon)\geqslant 0$是(3.5)满足始值条件

$$W_R^i(b,\varepsilon)=|B_i-u_i(b)|$$

$$W_R^{i\prime}(b,\varepsilon)=\left(\frac{m_i}{\varepsilon(q+1)(2q+1)!}\right)^{1/2}|B_i-u_i(b)|^{q+1}$$

的解。这个解自右递减向左。

现在我们在$[a,b]$内对t和$\varepsilon>0$定义上、下函数：

$$\beta_i(t,\varepsilon)=u_i(t)+W_L^i(t,\varepsilon)+\Gamma_i(\varepsilon)$$

$$\alpha_i(t,\varepsilon)=u_i(t)-W_L^i(t,\varepsilon)-\Gamma_i(\varepsilon)$$

其中

$$\Gamma_i(\varepsilon)=(\varepsilon r_i/m_i)^{1/(2q+1)}$$

这里，r_i是某个正的常数，它将在后面明确给出。

容易看出，函数α_i、β_i有下列的性质：$\alpha_i(t,\varepsilon)\leqslant\beta_i(t,\varepsilon)$，$\alpha_i(a,\varepsilon)\leqslant A_i\leqslant\beta_i(a,\varepsilon)$，$\alpha_i(b,\varepsilon)\leqslant B_i\leqslant\beta_i(b,\varepsilon)$对于某些适当选择的$r_i$，可以同样容易地证明在$(a,b)$中$\varepsilon\alpha_i''\geqslant f_i(t,\mathbf{y}_{\alpha_i})\alpha_i'(t)+g_i(t,\mathbf{y}_{\alpha_i})$和$\varepsilon\beta_i''\leqslant f_i(t,\mathbf{y}_{\beta_i})\cdot\beta_i'(t)+g_i(t,\mathbf{y}_{\beta_i})$，其中$\mathbf{y}_{\alpha_i}=(y_1,\cdots,y_{i-1},\alpha_i,y_{i+1},\cdots,y_n)$，$y_{\beta_i}=(y_1,\cdots,y_{i-1},\beta_i,y_{i+1},\cdots,y_n)$。我们现在研究$\beta_i(t,\varepsilon)$，(关于$\alpha_i(t,\varepsilon)$的验证可通过对称性得到)。由泰勒定理和假设$u_i(t)$是弱稳定和按分量$\mathrm{I}_q$-稳定，我们有

$$\begin{aligned}
&f_i(t,\mathbf{y}_{\beta_i})\beta_i'(t)+g_i(t,\mathbf{y}_{\beta_i})-\varepsilon\beta_i''\\
&=f_i(t,\mathbf{y}_{\beta_i})[u_i'(t)+W_L^{i\prime}(t,\varepsilon)]+g_i(t,\mathbf{y}_{\beta_i})-\varepsilon[u_i''(t)+W_L^{i\prime\prime}(t,\varepsilon)]\\
&=[f_i(t,\mathbf{y}_{\beta_i})-f_i(t,\mathbf{y}_{u_i})]u_i'(t)+g_i(t,\mathbf{y}_{\beta_i})-g_i(t,\mathbf{y}_{u_i})\\
&\quad+f_i(t,\mathbf{y}_{\beta_i})W_L^i(t,\varepsilon)-\varepsilon[u_i''(t)+W_L^{i\prime\prime}(t,\varepsilon)]\\
&=\sum_{j=0}^{2q}\frac{1}{j!}\left[\frac{\partial^j f_i(t,\mathbf{y}_{u_i})}{\partial y_i^j}u_i'(t)+\frac{\partial^j g_i(t,\mathbf{y}_{u_i})}{\partial y_i^j}\right](\beta_i-u_i)^j\\
&\quad+\frac{1}{(2q+1)!}\left[\frac{\partial^{2q+1}f_i(t,\mathbf{y}^*)}{\partial y_i^{2q+1}}u_i'(t)+\frac{\partial^{2q+1}g_i(t,\mathbf{y}^*)}{\partial y_i^{2q+1}}\right](\beta_i-u_i)^{2q+1}\\
&\quad+f_i(t,\mathbf{y}_{\beta_i})W_L^{i\prime}-\varepsilon u_i''-\varepsilon W_L^{i\prime\prime}\\
&\geqslant\frac{\varepsilon r_i}{(2q+1)!}-\varepsilon|u_i''|\geqslant 0
\end{aligned}$$

只要我们选择$r_i\geqslant|u_i''|(2q+1)!$即可。其中$(t,\mathbf{y}^*)$是$(t,\mathbf{y}_{\beta_i})$和$(t,\mathbf{y}_{u_i})$之间的某一内点。对于充分小的$\varepsilon$(譬如说，$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$)，这类点位于$D_i(u_i)$内。故由引理1可知定理1是正确的。

定理2 假设退化问题(R_l)或(R_r)有一个$C^{(2)}[a,b]$类的弱稳定的解$\mathbf{u}_l(t)=(u_{l1}(t),\cdots,u_{li}(t),\cdots,u_{ln}(t))$或$\mathbf{u}_r(t)=(u_{r1}(t),\cdots,u_{ri}(t),\cdots,u_{rn}(t))$，这个解在$[a,b]$中也是依分量$\mathrm{II}_n$-稳定的。又设在$(a,b)$中$u_{li}''\geqslant 0$和$u_{li}(b)\leqslant B_i$或在$(a,b)$中$u_{ri}''\geqslant 0$和$u_{ri}(a)\leqslant A_i$。那么存在$\varepsilon_0>0$使得对于$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，问题(1.3)、(1.4)在$[a,b]$中有一个解$\mathbf{y}(t,\varepsilon)$，满足

$$0\leqslant y_i(t,\varepsilon)-u_{li}(t)\leqslant W_R^i(t,\varepsilon)+\Gamma_i(\varepsilon)$$

或

$$0\leqslant y_i(t,\varepsilon)-u_{ri}(t)\leqslant W_L^i(t,\varepsilon)+\Gamma_i(\varepsilon)$$

其中

$$\Gamma_i(\varepsilon)=c_i\varepsilon^{\frac{1}{n}}$$

$$W_L^i(t,\varepsilon)=(A_i-u_{ri}(a))\{1+\sigma_i[A_i-u_{ri}(a)]^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t-a)\}^{\frac{-2}{n-1}}$$

$$W_R^i(t,\varepsilon)=(B_i-u_{li}(b))\{1+\sigma_i[B_i-u_{li}(b)]^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(b-t)\}^{-\frac{2}{n-1}}$$

这里

$$\sigma_i=(n-1)\left(\frac{m_i}{2(n+1)!}\right)^{1/2}$$

而c_i是某个正的常数。

证明 让我们只考虑$u_{ri}(t)$的情形。通过定义

$$\alpha_i(t,\varepsilon)=u_{ri}(t)$$

$$\beta_i(t,\varepsilon)=u_{ri}(t)+W_L^i(t,\varepsilon)+(\varepsilon r_i m_i^{-1})^{\frac{1}{n}}$$

我们能够证明这种情形，其证明程序如同定理1。

定理3 假设退化问题(R_l)或(R_r)有一个$C^{(2)}[a,b]$类的弱稳定的解$\mathbf{u}_l(t)=(u_{l1}(t),\cdots,u_{li}(t),\cdots,u_{ln}(t))$或$\mathbf{u}_r(t)=(u_{r1}(t),\cdots,u_{ri}(t),\cdots,u_{rn}(t))$，它也是依分量$\mathrm{III}_n$-稳定的。又设在$(a,b)$中$u''_{li}\leqslant0$和$u_{li}(b)\geqslant B_i$或在$(a,b)$中$u''_{ri}\leqslant0$和$u_{ri}(a)\geqslant A_i$。那么存在$\varepsilon_0>0$使得对于$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$问题(1.3)、(1.4)在$[a,b]$中有一个解$\mathbf{y}(t,\varepsilon)$，满足

$$-W_R^i(t,\varepsilon)-\Gamma_i(\varepsilon)\leqslant y_i(t,\varepsilon)-u_{li}(t)\leqslant0$$

或

$$-W_L^i(t,\varepsilon)-\Gamma_i(\varepsilon)\leqslant y_i(t,\varepsilon)-u_{ri}(t)\leqslant0$$

其中

$$W_L^i(t,\varepsilon)=(A_i-u_{ri}(a))\{1+\sigma_i[A_i-u_{ri}(a)]^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t-a)\}^{\frac{-2}{n-1}}$$

$$W_R^i(t,\varepsilon)=(B_i-u_{li}(b))\{1+\sigma_i[B_i-u_{li}(b)]^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(b-t)\}^{\frac{-2}{n-1}}$$

$$\Gamma_i(\varepsilon)=c_i\varepsilon^{\frac{1}{n}}$$

这里

$$\sigma_i=(n-1)\left(\frac{m_i}{2(n+1)!}\right)^{\frac{1}{2}}$$

而c_i是某个正的常数。

证明 简单地令$\mathbf{y}\to-\mathbf{y}$且应用定理2。

四、角 层 现 象

我们现在转去研究下面情况：假设退化问题(R_l)有一个解$\mathbf{u}_l(t)=(u_{l1}(t),\cdots,u_{ln}(t))$，它们在$(a,b)$中的内点$t_0$相交但斜率不相等，即$\mathbf{u}_l(t_0)=\mathbf{u}_r(t_0)$和$\mathbf{u}'_l(t_0)\neq\mathbf{u}'_r(t_0)$，那么我们有退化轨道

$$\mathbf{u}_0(t)=\begin{cases}\mathbf{u}_l(t) & (a\leqslant t\leqslant t_0)\\ \mathbf{u}_r(t) & (t_0\leqslant t\leqslant b)\end{cases}\qquad(R_0)$$

其中$\mathbf{u}'_0(t_0^-)\neq\mathbf{u}'_0(t_0^+)$。于是，这种情况的实质是退化解$\mathbf{u}_0(t)$在$(a,b)$内不具有连续的一阶导

数，但在内点处有角层。

在对退化解$\mathbf{u}_0(t)$的适当的稳定性的假设下，我们希望去得到类似于定理1 的结果。我们有下面的结果：

定理4 假定退化轨道 (R_0) 在$[a,b]$中是$C^{(2)}$类的弱稳定和依分量 Ⅰ$_q$-稳定的，且$|u''_{0i}(t_0)|<\infty$，那么存在$\varepsilon_0>0$，使得$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，问题(1.3)，(1.4)，对于$t$在$[a, b]$中，有一个解$\mathbf{y}(t,\varepsilon)$，满足

$$|y_i(t,\varepsilon)-u_{0i}(t)|\leqslant V_1^i(t,\varepsilon)+c_i\varepsilon^{\frac{1}{2q+1}}$$

其中c_i是某个正的常数，

$$V_1^i(t,\varepsilon)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\varepsilon}{m_i}\right)^{1/2}|u'_{ri}(t_0)-u'_{li}(t_0)|\exp\left[-\left(\dfrac{\varepsilon}{m_i}\right)^{1/2}|t-t_0|\right], & 若q=0\\[2ex] \dfrac{1}{2}\sigma_i\left\{1+q\left[\dfrac{\varepsilon(2q+2)!}{2m_i}\right]^{-\frac{1}{2}}\sigma_i^q|t-t_0|\right\}^{-\frac{1}{q}}, & 若q\geqslant 1\end{cases}$$

这里

$$\sigma_i^{q+1}=|u'_{ri}(t_0)-u'_{li}(t_0)|\left[\frac{\varepsilon(2q+2)!}{2m_i}\right]^{\frac{1}{2}}$$

证明 我们假设$\mathbf{u}'_l(t_0)<\mathbf{u}'_r(t_0)$和对于$a\leqslant t\leqslant b$以及$\varepsilon>0$时我们定义

$$\alpha_i(t,\varepsilon)=u_{0i}(t)-(c_ir_im_i^{-1})^{\frac{1}{(2q+1)}}$$

$$\beta_i(t,\varepsilon)=u_{0i}(t)+V_1^i(t,\varepsilon)+(c_ir_im_i^{-1})^{\frac{1}{2q+1}}$$

其中$r_i\geqslant|u''_{0i}|(2q+1)!$

我们注意到α_i在$t=t_0$点是不可导的，事实上，$\alpha'_i(t_0^-)<\alpha'_i(t_0^+)$，尽管如此，借助于$r_i$的选择和弱稳定以及依分量Ⅰ$_q$-稳定的假设，我们能够证明

$$\varepsilon\alpha''_i\geqslant f_i(t,\mathbf{y}_{\alpha_i})\alpha'_i(t)+g_i(t,\mathbf{y}_{\alpha_i})\qquad(在(a,b)\backslash\{t_0\}中)$$

即α_i是一个下解。

关于β_i，我们看到，借助于V_1^i的选择，β_i在$t=t_0$点是可微的，再次通过r_i的选择和弱稳定以及依分量Ⅰ$_q$-稳定的假设，我们有

$$\varepsilon\beta''_i\leqslant f_i(t,\mathbf{y}_{\beta_i})\beta'_i(t)+g_i(t,\mathbf{y}_{\beta_i})\qquad(在(a,b)\backslash\{t_0\}中)$$

于是定理 4 可由引理 2 得出。

如果某些函数$u_{li}(t)$和$u_{ri}(t)$的导数满足不等式$u'_{li}(t_0)>u'_{ri}(t_0)$，亦可得到类似定理 4 的结果，只要做一个简单的变换$y_i\to y_i$，然后将定理4用到变换后的问题上即可。

定理5 假设退化轨道(R_0)是$C^{(2)}$类的弱稳定的且是依分量Ⅱ$_n$-稳定的，此外，假设$u''_{li}\geqslant 0$，$u''_{ri}\geqslant 0$和$u'_{li}(t_0)<u'_{ri}(t_0)$，那么，存在$\varepsilon_0>0$，使得对于$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，问题(1.3)，(1.4)在$[a,b]$中有一个解$\mathbf{y}(t,\varepsilon)$满足

$$0\leqslant y_i(t,\varepsilon)-u_{0i}(t)\leqslant V_2^i(t,\varepsilon)+c_i\varepsilon^{\frac{1}{n}}$$

其中$V_2^i(t,\varepsilon)$是用$\dfrac{n-1}{2}$代替q的$V_1^i(t,\varepsilon)$。

证明 这个结果可以象前个定理的证明中的论证一样得到。假如对于$a\leqslant t\leqslant b$和$\varepsilon>0$，我们定义

$$\alpha_i(t,\varepsilon)=u_{0i}(t)$$

$$\beta_i(t,\varepsilon)=u_{0i}(t)+V_2^i(t,\varepsilon)+(c_i r_i m_i^{-1})^{\frac{1}{n}}$$

其中 $r_i \geqslant |u''_{0i}|n!$，$c_i$为某个正的常数，

$$V_2^i(t,\varepsilon)=\frac{1}{2}\sigma_i\left\{1+\frac{1}{2}(n-1)[\varepsilon(n+1)!/2m_i]^{-\frac{1}{2}}\sigma_i^{\frac{n-1}{2}}|t-t_0|\right\}^{-\frac{2}{n-1}}$$

$$\sigma_i^{n+1}=\varepsilon(n+1)!|u'_{ri}(t_0)-u'_{li}(t_0)|^2/2m_i$$

若退化轨道 (R_0) 是弱稳定和依分量Ⅲ$_n$-稳定，那么类似于定理 5 的结果有效，只要在$(a,t_0)\cup(t_0,b)$中 $u''_{0i}\leqslant 0$ 和 $u'_{li}(t_0)>u'_{ri}(t_0)$。我们略去详情。

上述结果能够推广到三个分支的退化轨道：

$$\tilde{\mathbf{u}}_0(t)=\begin{cases}\mathbf{u}_l(t) & (a\leqslant t\leqslant t_1)\\ \mathbf{u}(t) & (t_1\leqslant t\leqslant t_2)\\ \mathbf{u}_r(t) & (t_2\leqslant t\leqslant b)\end{cases}$$

其中解$\mathbf{u}_l$，$\mathbf{u}_r$和退化方程(R):$f(t,\mathbf{u})\mathbf{u}'(t)+\mathbf{g}(t,\mathbf{u})=0$的中间解$\mathbf{u}$相交，使得$\mathbf{u}_l(t_1)=\mathbf{u}(t_1)$，$\mathbf{u}'_l(t_1)\neq\mathbf{u}(t_1)$，$\mathbf{u}(t_2)=\mathbf{u}_r(t_2)$和$\mathbf{u}'(t_2)\neq\mathbf{u}'_r(t_2)$。若$t_1=t_2$，这就变成了以上的退化轨道$\mathbf{u}_0(t)$。

定理6 假设退化轨道 $\tilde{\mathbf{u}}_0(t)$ 在$[a,b]$中是 $C^{(2)}$ 类的弱稳定和依分量Ⅰ$_q$-稳定的，那么存在ε_0使得对于$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，问题(1.3)、(1.4)在$[a,b]$中有解$\mathbf{y}(t,\varepsilon)$满足

$$|y_i(t,\varepsilon)-\tilde{u}_{0i}(t)|\leqslant V_3^i(t,\varepsilon)+V_4^i(t,\varepsilon)+c_i\varepsilon^{-\frac{1}{2q+2}}$$

其中$V_3^i(t,\varepsilon)$是分别用t_1和$|u'_{ri}(t)-u'_{li}(t)|$代替t_0和$|u'_{ri}(t_0)-u'_{li}(t_0)|$的$V_1^i(t,\varepsilon)$，而$V_4^i(t,\varepsilon)$是分别以$t_2$和$|u'_{ri}(t_2)-u'_{li}(t_2)|$代替$t_0$和$|u'_{ri}(t_0)-u'_{li}(t_0)|$的$V_2^i(t,\varepsilon)$。

参 考 文 献

[1] O'Donnell, M. A., Boundary and conrer layer behavior in semilinear systems of boundary value problems, *SIAM J, Math. Anal.*, 2 (1984).

[2] Bernfeld, S. and V. Lakshmikantham, *An Introduction to Non-linear Boundary Value Problems*, Academic Press, New York (1974).

[3] Hebets, P. and M. Laloy, E'tude de problemes aux limites par la méthod des sur-et sous-solutions, Lecture Notes, Catholic University of Louvain (1974).

Boundary and Angular Layer Behavior in Singular Perturbed Quasilinear Systems

Lin Zong-chi

(Department of mathematics, Fujian Normal University, Fuzhou)

Abstract

In this paper, using the method of differential inequalities, we study the existence of solutions and their asymptotic behavior, as $\varepsilon\to 0^+$ of Dirichlet problem for a second order quasilinear systems. Depending on whether the reduced solution $\mathbf{u}(t)$ has or does not have a continuous first-derivative in (a,b), we study two types of asymptotic behavior, thus leading to the phenomena of boundary and angular layers.