应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

圆环壳在一般荷载下的轴对称问题*

陈 山 林

(重庆建筑工程学院，1985年4月10日收到)

摘 要

本文推广Новожилов变换，对圆环壳在任意荷载作用下的轴对称问题进行了成功地简化，得到了问题的Новожилов型复变量方程．求得了方程的特解，结合钱伟长的齐次方程一般解，给出了环壳一般轴对称问题的一般解答．讨论了常见载荷和闭合环壳情形．

一、前 言

圆环薄壳理论长期以来一直引起研究者们的注意，一是因为环壳在承重和柔性结构中都有着重要应用；二是环壳方程本身的复杂和求解不易．H. Reissner(1912)[1]和E. Meissner(1915)[2]成功地把环壳一般轴对称问题简化为两个实变量的二阶常微分方程．E. Tölke(1938)[3]、R. A. Clark(1950)[4]和B. B. Новожилов(1951)[5]随后分别进行了复变量化的简化工作．他们得到的复变量方程在薄壳理论误差范围内是等价的[6]．对上述方程，许多作者[7-12]用诸如渐近积分、幂级数、差分解和摄动解等方法进行了求解，并将结果用于各种实际问题．近年来，钱伟长和郑思梁[6,13]得到了Новожилов方程齐次解的一般解．这个解答已经用来处理过一些实际问题[14-16]．

迄今轴对称环壳理论研究工作的重点是齐次方程的简化和求解．由于文[6]、[13]的工作，这个问题可认为已经解决．但非齐方程的简化工作尚未进行，因而荷载仅限于处理轴力和内压．近来文[17]得到了自重的结果．本文推广Новожилов变换，对任意荷载作用下轴对称环壳问题的非齐次方程进行了成功地简化，并用Fourier级数求得方程的特解．结合现有的齐次方程一般解，给出了一般轴对称问题的解答(精确解)．本文结果可用于处理若干有实际意义的环壳问题．

二、基本方程及简化

考虑在任意分布荷载p_r、p_φ作用下的弹性圆环薄壳，其坐标、位移和几何尺寸如图1所示．本文未加说明的符号同[18]．

根据W. Flügge[18]的结果，我们有

* 叶开沅推荐．

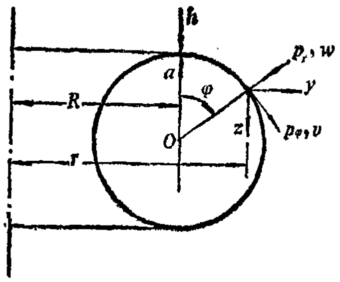


图1 环壳荷载，位移和尺寸

平衡方程

$$\left.\begin{aligned}&(rN_\varphi)^{\bullet}-aN_\theta\cos\varphi-rQ_\varphi=-arp_\varphi\\&(rQ_\varphi)^{\bullet}+aN_\theta\sin\varphi+rN_\varphi=arp_r\\&(rM_\varphi)^{\bullet}-aM_\theta\cos\varphi=arQ_\varphi\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

弹性定律

$$\left.\begin{aligned}&N_\varphi=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\dot v+w}{a}+\nu\frac{v\cos\varphi+w\sin\varphi}{r}\right)\\&N_\theta=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(-\frac{v\cos\varphi+w\sin\varphi}{r}+\nu\frac{\dot v+w}{a}\right)\\&M_\varphi=D\left(\frac{\dot x}{a}+\frac{x}{r}\nu\cos\varphi\right)\\&M_\theta=D\left(\frac{x}{r}\cos+\nu\frac{\dot x}{a}\right)\end{aligned}\right\}\tag{2.2a~d}$$

几何关系

$$x=\frac{1}{a}(\dot w-v)\tag{2.3}$$

式中，$D=Eh^3/[12(1-\nu^2)]$，$r=R(1+\alpha\sin\varphi)$，$\alpha=a/R$。(2.1)～(2.3) 式组成环壳一般轴对称问题的基本方程。

引入变量

$$\Phi=\frac{R(1+\alpha\sin\varphi)}{\sin\varphi}Q_\varphi\tag{2.4}$$

由(3.1)～(2.3)式可以导得以 Φ 和 x 为未知量的 Reissner-Meissner 型方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1+\alpha\sin\varphi}{\sin\varphi}\ddot x+\alpha\,\mathrm{ctg}\,\varphi\dot x-\left[\frac{\alpha^2\cos^2\varphi}{(1+\alpha\sin\varphi)\sin\varphi}+\nu\alpha\right]x-\frac{\alpha a}{D}\Phi=0\\&\frac{1+\alpha\sin\varphi}{\sin\varphi}\ddot\Phi+\alpha\,\mathrm{ctg}\,\varphi\dot\Phi-\left[\frac{\alpha^2\cos^2\varphi}{(1+\alpha\sin\varphi)\sin\varphi}-\nu\alpha\right]\Phi+Eh\alpha ax\\&=\frac{(2+3\alpha\sin\varphi)\cos\varphi}{(1+\alpha\sin\varphi)\sin^4\varphi}P+\frac{a^2}{\alpha}\left[\frac{(1+\alpha\sin\varphi)^2}{\sin^2\varphi}p_r\right]^{\bullet}\\&\quad+\frac{a^2(1+\alpha\sin\varphi)}{\alpha\sin\varphi}\left(\frac{1+\alpha\sin\varphi}{\sin\varphi}+\alpha\nu\right)p_\varphi\end{aligned}\right\}\tag{2.5}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&P=RQ_0+Ra\int_0^\varphi(p_r\cos\varphi-p_\varphi\sin\varphi)(1+\alpha\sin\varphi)d\varphi\\&Q_0=Q_\varphi(0)\end{aligned}\right\}\tag{2.6}$$

以及

$$\left.\begin{aligned}&N_\varphi=-\frac{\Phi\cos\varphi}{R(1+\alpha\sin\varphi)}+\frac{P}{R(1+\alpha\sin\varphi)\sin\varphi}\\&N_\theta=-\frac{\dot\Phi}{a}-\frac{P}{a\sin^2\varphi}+\frac{\sin\varphi}{R(1+\alpha\sin\varphi)}p_r\end{aligned}\right\}\tag{2.7}$$

沿用文[6]的统一复变量化过程，我们可以将方程(2.5)复变量化，得到

$$\frac{1+\alpha\sin\varphi}{\sin\varphi}\ddot{S}+\alpha\mathrm{ctg}\varphi\dot{S}+\left(-\frac{\alpha^2\cos^2\varphi}{(1+\alpha\sin\varphi)\sin\varphi}+2\mu i\right)S$$

$$=\frac{2\mu i}{a}P\frac{(2+3\alpha\sin\varphi)\cos\varphi}{(1+\alpha\sin\varphi)\sin^4\varphi}+\frac{2\mu a i}{\alpha}\left[\frac{(1+\alpha\sin\varphi)^2}{\sin\varphi}p_r\right]^{\cdot}$$

$$+\frac{2\mu a i}{\alpha}\frac{1+\alpha\sin\varphi}{\sin\varphi}\left(\frac{1+\alpha\sin\varphi}{\sin\varphi}+\alpha\nu\right)p_\varphi \tag{2.8}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&S=\alpha Ehx+i\frac{2\mu}{a}\Phi\\&\mu=[3(1-\nu^2)]^{1/2}\frac{a^2}{Rh}\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

(2.8)和(2.9)式中，已经略去了小量$o(\alpha\nu/2\mu)$。为了简化方程(2.8)一次项系数，引入

$$F^*=(1+\alpha\sin\varphi)S \tag{2.10}$$

代入(2.8)，可得

$$(1+\alpha\sin\varphi)\ddot{F}^*-\alpha\cos\varphi\dot{F}^*+2\mu i\sin\varphi F^*$$

$$=\frac{2\mu i}{a}\frac{(2+3\alpha\sin\varphi)\cos\varphi}{\sin^3\varphi}P+\frac{2\mu a i}{\alpha}(1+\alpha\sin\varphi)^2$$

$$\cdot\left[\frac{1+\alpha\sin\varphi}{\sin\varphi}+\alpha\nu\right]p_\varphi+\frac{2\mu a i}{\alpha}\sin\varphi(1+\alpha\sin\varphi)\left[\frac{(1+\alpha\sin\varphi)^2}{\sin^2\varphi}p_r\right]^{\cdot} \tag{2.11}$$

在(2.11)式中，已经略去了小量$o(\alpha/2\mu)$。

记p_{r0}为表面法向荷载的均匀内压部分，并记

$$\left.\begin{aligned}&p_{r1}=p_r-p_{r0}\\&P_0=Ra\int_0^\varphi p_{r0}\cos\varphi(1+\alpha\sin\varphi)d\varphi\end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

为了简化方程(2.11)的非齐次项，引入变换

$$V=F^*-\frac{2\mu i}{a}\mathrm{ctg}\,\varphi\cdot(P-P_0) \tag{2.13}$$

代入(2.11)式，计算后得到

$$(1+\alpha\sin\varphi)\ddot{V}-\alpha\cos\varphi\dot{V}+2\mu i\sin\varphi V$$

$$=\frac{4\mu^2}{\alpha}\left(Q_0+F-\frac{\alpha^2 i}{4\mu}ap_{r0}\right)\cos\varphi+\frac{2\mu a i}{\alpha}$$

$$\cdot(1+\alpha\sin\varphi)^2\{[(\alpha+\sin\varphi)p_{r1}+\cos\varphi p_\varphi]^{\cdot}+\alpha(1+\nu)p_\varphi\} \tag{2.14}$$

式中

$$F=a\int_0^\varphi(p_{r1}\cos\varphi-p_\varphi\sin\varphi)(1+\alpha\sin\varphi)d\varphi \tag{2.15}$$

当荷载$p_{r1}\equiv p_\varphi\equiv0$时，(2.13)和(2.14)式简化为

$$V=F^*-\frac{2\mu i}{\alpha}\operatorname{ctg}\varphi Q_0 \tag{2.16}$$

及

$$(1+\alpha\sin\varphi)\ddot{V}-\alpha\cos\varphi\dot{V}+2\mu i\sin\varphi V=\frac{4\mu^2}{\alpha}\left(Q_0-\frac{\alpha^2}{4\mu}iap_{r0}\right)\cos\varphi \tag{2.17}$$

(2.16) 和 (2.17) 式就是 Новожилов 采用的变换和所得到的环壳方程[5]。本文的 (2.13)和 (2.14)可以看做是Новожилов变换及方程在一般荷载情形的推广。

三、解 答

将基本方程简记为

$$\mathscr{L}(V)=f(\varphi) \tag{3.1}$$

式中

算子$\mathscr{L}(\ )=(1+\alpha\sin\varphi)(\ )^{\cdot\cdot}-\alpha\cos\varphi(\ )^{\cdot}+2\mu i\sin\varphi(\ )$

$$f(\varphi)=\frac{4\mu^2}{\alpha}\left(Q_0+F-\frac{\alpha^2 i}{4\mu}ap_{r0}\right)\cos\varphi+\frac{2\mu ai}{\alpha}(1+\alpha\sin\varphi)^2\cdot$$
$$\{[(\alpha+\sin\varphi)p_{r1}+\cos\varphi p_\varphi]^{\cdot}+\alpha(1+\nu)p_\varphi\} \tag{3.2}$$

我们首先考虑方程 (3.1) 的特解。设非齐次项可以表示为下述Fourier级数形式

$$f(\varphi)=f_0+\sum_{n=1}^{\infty}(f_n\cos n\varphi+f_n'\sin n\varphi \tag{3.3}$$

假定 (3.1) 的特解 V^* 可以展为

$$V^*=B_0+\sum_{n=1}^{\infty}(B_n\cos n\varphi+B_n'\sin n\varphi) \tag{3.4}$$

将(3.4)代入(3.1)式左端，经计算后，可得下述方程组

$$\left.\begin{aligned}
&(\mu i-\alpha)B_1'=f_0\\
&(\mu i-3\alpha)B_2'-B_1=f_1\\
&-B_1'+2\mu iB_0+(3\alpha-\mu i)B_2=f_1'\\
&-B_nn^2+\left[\mu i-\frac{\alpha}{2}(n+2)(n+1)\right]B_{n+1}'\\
&\quad+\left[\frac{\alpha}{2}(n-2)(n-1)-\mu i\right]B_{n-1}'=f_n\quad(n\geqslant 2)\\
&-B_n'n^2+\left[\frac{\alpha}{2}(n+2)(n+1)-\mu i\right]B_{n+1}\\
&\quad+\left[\mu i-\frac{\alpha}{2}(n-2)(n-1)\right]B_{n-1}=f_n'\qquad(n\geqslant 2)
\end{aligned}\right\} \tag{3.5a~e}$$

由(3.5a)式可确定 B_1'；其余方程可分为彼此独立的两组：第一组，由 (3.5b)，(3.5d) n 取奇数的方程和 (3.5e) n 取偶数的方程组成，可以解出系数 $B_1, B_3, B_5,\cdots$ 和 $B_2', B_4', B_6',\cdots$；第二组，由 (3.5c)，(3.5d) n 取偶数的方程和 (3.5e) n 取奇数的方程组成，可以解出系数

$B_0,B_2,B_4,\cdots$ 和 $B_3',B_5',B_7'\cdots$。这样，特解(3.4)的系数可全部确定。这两组方程有带状结构，容易由普通的代数方程解法求解。

当 $f_1=4\mu^2(Q_0-\alpha^2 i\alpha p_{r0}/(4\mu))/\alpha$，其余系数 f_n、f_n' 全为零时，第二组方程有零解，第一组方程可以写成递推关系。如果将 $B_1,B_2',-B_3,-B_4',\cdots$ 顺次记为 $A_1,A_2,A_3,A_4\cdots$，在此关系可以写成

$$A_1=f_1/[-1+(\mu i-3\alpha)A_2/A_1]$$

$$\frac{A_n}{A_{n-1}}=\frac{\mu i-\alpha(n-2)(n-1)/2}{n^2-[\mu i-\alpha(n+2)(n+1)/2]A_{n+1}/A_n}\quad(n\geqslant 2)\tag{3.6}$$

此即文[5]得到的方程(2.17)的特解。

Новожилов 方程的齐次解已由文[13]得到，它的两个线性无关解可以写做

$$\left.\begin{aligned}V_1&=\exp[(\beta+i\gamma)(\varphi-\pi/2)]\cdot(k_1+ik_2)\\V_2&=\exp[(\beta+i\gamma)(\varphi-\pi/2)]\cdot(g_1+ig_2)\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

式中，特征指数 $\lambda=\beta+i\gamma$ 与 α、μ 取值有关，文[13]已用表格给出其值。函数

$$\left.\begin{aligned}k_1&=1+\sum_{n=1}^{\infty}(p_n\cos n\varphi-q_n'\sin n\varphi)\\k_2&=\sum_{n=1}^{\infty}(p_n'\sin n\varphi+q_n\cos n\varphi)\\g_1&=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(p_n\cos n\varphi+q_n'\sin n\varphi)\\g_2&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(-p_n'\sin n\varphi+q_n\cos n\varphi)\end{aligned}\right\}\tag{3.8}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&p_n=(a_n+a_{-n})/2,\quad q_n=(b_n+b_{-n})/2\\&p_n'=(a_n-a_{-n})/2,\quad q_n'=(b_n-b_{-n})/2\end{aligned}\right\}\tag{3.9}$$

以及

$$C_n/C_0=(a_n+ib_n)/2,\quad C_{-n}/C_0=(a_{-n}+ib_{-n})/2\tag{3.10}$$

而 C_n 和 C_{-n} 由下述递推关系确定

$$\left.\begin{aligned}&\text{当 } n>0 \text{ 时}\\&\frac{C_n}{C_{n-1}}=\frac{\mu-\alpha i[\lambda+i(n-1)][\lambda+i(n-2)]}{-(\lambda+in)^2+\{\mu-\alpha i[\lambda+i(n+1)][\lambda+i(n+2)]/2\}C_{n+1}/C_n}\\&\text{当 } n<0 \text{ 时，}\\&\frac{C_n}{C_{n+1}}=\frac{\mu-\alpha i[\lambda+i(n+1)][\lambda+i(n+2)]}{(\lambda+in)^2+\{\mu-\alpha i[\lambda+i(n-1)][\lambda+i(n-2)]/2\}C_{n-1}/C_n}\\&\text{当 } n=0 \text{ 时}\\&\left[\mu-\frac{\alpha}{2}i(\lambda-i)(\lambda-2i)\right]\frac{C_{-1}}{C_0}-\left[\mu-\frac{\alpha}{2}i(\lambda+i)(\lambda+2i)\right]\frac{C_1}{C_0}+\lambda^2=0\end{aligned}\right\}\tag{3.11}$$

如果直接用文[13]的 λ 值，则 $n=0$ 的关系式自动满足。

于是，方程(3.1)的全解为

$$V=C_1'V_1+C_2'V_2+V^* \tag{3,12}$$

式中 C_1'，C_2' 为待定复常数，应由边界条件决定。对全圆环壳情形，$C_1'=C_2'=0$，解答即为特解。式中 V_1，V_2 及 V^* 分别在(3.7)、(3.4)中给出。

四、内力和位移

由(2.9a)、(2.10)和(2.13)式，并注意到(2.15)式的

$$F=\frac{\alpha}{a}(P-P_0)-Q_0$$

我们得到

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{1}{\alpha Eh}\frac{\mathrm{Re}V}{(1+\alpha\sin\varphi)}\\ \Phi&=\frac{a}{2\mu}\frac{\mathrm{Im}V}{(1+\alpha\sin\varphi)}+\frac{R\mathrm{ctg}\varphi}{1+\alpha\sin\varphi}(Q_0+F)\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

代入 (2.2c、d) 和 (2.4)、(2.7) 式，可得

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi&=-\frac{\alpha}{2\mu}\frac{\cos\varphi\mathrm{Im}V}{(1+\alpha\sin\varphi)^2}+\frac{\alpha+\sin\varphi}{(1+\alpha\sin\varphi)^2}(Q_0+F)\\ &\quad+\frac{2+\alpha\sin\varphi}{2(1+\alpha\sin\varphi)}\cdot ap_{r0}\\ N_\theta&=-\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\mathrm{Im}V}{1+\alpha\sin\varphi}\right)^{\bullet}-\frac{\alpha+\sin\varphi}{(1+\alpha\sin\varphi)^2}(Q_0+F)+\frac{a}{2}p_{r0}\\ &\quad+\frac{a}{\alpha}[(\alpha+\sin\varphi)p_{r1}+\cos\varphi p_\varphi]\\ M_\varphi&=\frac{\alpha a}{4\mu^2}\left\{\left[\frac{\mathrm{Re}V}{1+\alpha\sin\varphi}\right)^{\bullet}+\frac{\alpha\nu\cos\varphi}{(1+\alpha\sin\varphi)^2}\mathrm{Re}V\right\}\\ M_\theta&=\frac{\alpha a}{4\mu^2}\left\{\nu\left(\frac{\mathrm{Re}V}{1+\alpha\sin\varphi}\right)^{\bullet}+\frac{\alpha\cos\varphi}{(1+\alpha\sin\varphi)^2}\mathrm{Re}V\right.\\ Q_\varphi&=\frac{\alpha}{2\mu}\frac{\sin\varphi\,\mathrm{Im}V}{(1+\alpha\sin\varphi)^2}+\frac{\cos\varphi}{(1+\alpha\sin\varphi)^2}(Q_0+F)\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

由图 1，位移

$$\left.\begin{aligned} y&=v\cos\varphi+w\sin\varphi\\ z&=v\sin\varphi-w\cos\varphi\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

由 (2.2a,b) 和上式可得

$$y=\frac{R}{Eh}(N_\theta-\nu N_\varphi)(1+\alpha\sin\varphi) \tag{4.4}$$

微分 (4.3) 式

$$\dot{z}=(v\cos\varphi+w\sin\varphi)+\dot{v}\sin\varphi-\dot{w}\cos\varphi$$

利用 (2.2a、b) 和 (2.3) 消去 $\dot{w}$ 和 $\dot{v}$，可得

$$z=z_0+\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{R}{Eh}\left[\alpha(N_\varphi-\nu N_\theta)\sin\varphi-\frac{\cos\varphi\mathrm{Re}V}{1+\alpha\sin\varphi}\right]d\varphi \tag{4.5a}$$

假定 $\mathrm{Im}V$，$\mathrm{Im}\dot{V}$ 与 $\mathrm{Re}V$ 具有相同量级，则可以证明，(4.5a) 第一部分具有 $o\left(\frac{\alpha\nu}{2\mu}\right)$ 或 $o\left(\frac{\alpha^2}{2\mu}\right)$ 量级，此时(4.5a)可以简化为

$$z=z_0-\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{R\cos\varphi\mathrm{Re}V}{Eh(1+\alpha\sin\varphi)}d\varphi \tag{4.5b}$$

常数 z_0 由位移零位置规定决定。

设环壳具有边界 $\varphi=\varphi_0$ 和 $\varphi=\varphi_1$。边界条件可提为

$$\left.\begin{array}{lll} N_\varphi(\varphi_0)=\bar{N}_0 & \text{或} & y(\varphi_0)=\bar{y}_0 \\ M_\varphi(\varphi_0)=\bar{M}_0 & \text{或} & x(\varphi_0)=\bar{x}_0 \\ N_\varphi(\varphi_1)=\bar{N}_1 & \text{或} & y(\varphi_1)=\bar{y}_1 \\ M_\varphi(\varphi_1)=\bar{M}_1 & \text{或} & x(\varphi_1)=\bar{x}_1 \end{array}\right\} \tag{4.6}$$

或其它混合形式。式中右端各量为已知边界值。两个边界四个条件，可确定(3.12)中两个复待定常数。

在前述方程和内力中的常数 Q_0，系 $\varphi=0$ 处的剪力值。当边界之一给定力的边界条件时，Q_0 不难由整体平衡条件确定。在一般情况下，包括全圆环壳情形，则应由位移的补充条件来决定 Q_0 值。例如，当 $z_0=z_1=0$ 时，补充条件为

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{\cos\varphi\mathrm{Re}V}{1+\alpha\sin\varphi}d\varphi=0 \tag{4.7}$$

我们采用的(4.5b)式计算 z。

五、几种常见荷载及闭合环壳

内压 p_{r0} 作用情形已在(2.16)、(2.17)和 (3.6) 式中讨论过，现在我们讨论一些常见荷载及闭合环壳。

1、自重 (图2(a))

此时，$p_{r0}=0$，$p_{r1}=-q\cos\varphi$，$p_\varphi=q\sin\varphi$；由(2.15)式得

$$F=-aq(\varphi-\alpha\cos\varphi+\alpha) \tag{5.1}$$

方程(2.14)为

$$\mathscr{L}(V)=\frac{4\mu^2}{\alpha}[Q_0\cos\varphi-aq(\varphi-\alpha\cos\varphi+\alpha)\cos\varphi$$

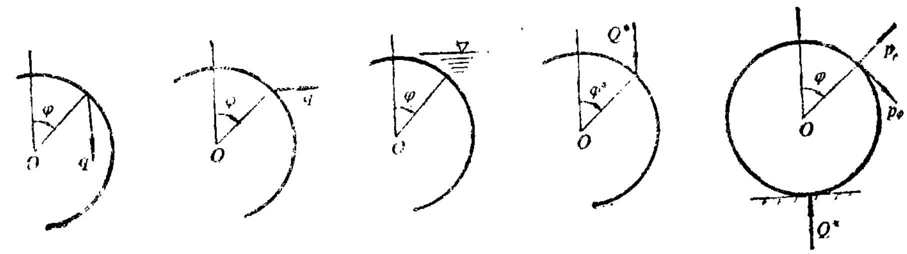
$$+\frac{\alpha}{2\mu}aq(2+\nu)i\sin\varphi(1+\alpha\sin\varphi)^2]$$

略去小量 $o\left(\frac{\alpha}{2\mu}\right)$，得到

$$\mathscr{L}(V)=\frac{4\mu^2}{\alpha}[Q_0-aq(\varphi-\alpha\cos\varphi+\alpha)]\cos\varphi \tag{5.2}$$

(5.2)式正是文[17]的结果。

2、离心力 (图2(b))



(a) (b) (c) (d) (e)

图2 常见荷载和闭合环壳

此时，$p_{r0}=0$

$$p_{r1}=q(1+\alpha\sin\varphi)\sin\varphi$$

$$p_\varphi=q(1+\alpha\sin\varphi)\cos\varphi$$

式中，$q=R\omega^2\rho h$，ω 为角速度，ρ 为密度．代入(2.14)、(2.15)式，得

$$F=0 \tag{5.3}$$

和

$$\mathscr{L}(V)=\frac{4\mu^2}{\alpha}Q_0\cos\varphi+2\mu\alpha qi(3+\nu)(1+\alpha\sin\varphi)^3\cos\varphi \tag{5.4}$$

当 $\alpha\ll1$ 时，(5.4)式简化为

$$\mathscr{L}(V)=\frac{4\mu^2}{\alpha}\left[Q_0+\frac{\alpha}{2\mu}(3+\nu)\alpha qi\right]\cos\varphi \tag{5.5}$$

与(2.17)式相似．因此，在细环壳时，离心力解可由内压解得到．

3、静水压（图2(c)）

此时，$p_\varphi=0$，$p_{r0}=0$，$p_{r1}=-\alpha q(1-\cos\varphi)$；$q$ 为液体比重．代入(2.14)、(2.15)式得

$$F=\alpha^2q\left(\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{4}\sin2\varphi-\sin\varphi-\frac{\alpha}{3}\cos^3\varphi+\frac{\alpha}{3}-\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi\right) \tag{5.6}$$

和

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(V)=&\frac{4\mu^2}{\alpha}Q_0\cos\varphi+\frac{\mu^2}{3\alpha}\alpha^2q[6\varphi+3\sin2\varphi-12\sin\varphi\\&-4\alpha\cos^3\varphi+4\alpha-6\alpha\sin^2\varphi]\cos\varphi\\&+\frac{2\mu}{\alpha}i\alpha^2q(1+\alpha\sin\varphi)^2[\cos^2\varphi-\cos\varphi-\alpha\sin\varphi]\end{aligned} \tag{5.7}$$

4、线布载荷（图2(d)）

本文方程(2.14)也可用于处理线布集中载荷情形．此时，$p_{r0}=p_{r1}=p_\varphi=0$，但注意到(2.14)中$F$实际上是竖向荷载合力，只需将其改写为

$$F^*=-Q^*(1+\alpha\sin\varphi^*)\{\varphi-\varphi^*\}^0 \tag{5.8}$$

于是基本方程(2.14)为

$$\mathscr{L}(V)=\frac{4\mu^2}{\alpha}[Q_0-Q^*(1+\alpha\sin\varphi^*)\{\varphi-\varphi^*\}^0]\cos\varphi \tag{5.9}$$

式中，$\{\varphi-\varphi^*\}^0$ 是Heaviside函数，定义是

$$\{\varphi-\varphi^*\}^0=\begin{cases}1 & (\varphi\geqslant\varphi^*)\\0 & (\varphi<\varphi^*)\end{cases} \tag{5.10}$$

5、闭合环壳（图2(e)）

在方程(5.2)、(5.7)的右端，都有项 $\varphi\cos\varphi$ 存在，在闭合环壳情形，这是非周期项。这是因为对应的荷载自身并不构成平衡力系。因此，必须考虑由外部约束提供的约束反力。

考虑图2(e)的一般情形。不失一般性，假定在 $\varphi=\pi$ 处支撑反力为 Q^*，与(5.8)相似，我们将 F 改写为

$$F^*=Q^*\{\varphi-\pi\}^o+a\int_0^{\varphi}(p_{r1}\cos\varphi-p_\varphi\sin\varphi)(1+\alpha\sin\varphi)d\varphi \tag{5.11}$$

并且，F^* 应当在 $\varphi=0$ 和 $\varphi=2\pi$ 时连续，于是得

$$Q^*=-a\int_0^{2\pi}(p_{r1}\cos\varphi-p_\varphi\sin\varphi)(1+\alpha\sin\varphi)d\varphi \tag{5.12}$$

故闭合环壳的基本方程为

$$\mathcal{L}(V)=\frac{4\mu^2}{\alpha}\left(Q_0+Q^*\{\varphi-\pi\}^o+F-\frac{\alpha^2 i}{4\mu}ap_{r0}\right)\cos\varphi$$

$$+\frac{2\mu a i}{\alpha}(1+\alpha\sin\varphi)^2\{[(\alpha+\sin\varphi)p_{r1}+\cos\varphi\, p_\varphi]^{\bullet}+\alpha(1+\nu)p_\varphi\} \tag{5.13}$$

(5.13)式是(2.14)在闭合环壳问题的推广。当表面分布载荷自成平衡力系时，如内压和离心力，$Q^*=0$，方程(5.13)和(2.14)相同。(5.13)式可用于研究各种闭合环壳问题。

六、结　　语

本文得到了环壳一般轴对称问题（包括线布载荷和闭合环壳）的简化复变量方程和一般解。这个解答是简便和准确的。本文结果可用于研究若干有实际意义的环壳问题。本文结果适用于 $\alpha<1$ 的环壳。

参 考 文 献

[1] Reissner, H., *Müller-Breslau-Festschrift*, Leipzig (1912), 181.
[2] Meissner, E., *Physik. Zeits*, **14** (1913), 343.
[3] Tölke, F., *Ingenieur Archiv*, **9** (1938), 282 (以上引自[6]).
[4] Clark, R. A., *J. Math. and Physics*, **29** (1950), 146-178.
[5] Новожилов В. В., «薄壳理论», 科学出版社, 北京 (1959).
[6] 钱伟长、郑思梁, 清华大学学报, **19** (1979), 27-47.
[7] 张维, 清华大学理科报告, 5A (1949), 289-349.
[8] Clark, R. A., *Quart. of Appl. Math.*, **16** (1958), 47-60.
[9] Clark, R. A., Trans. ASME, *J. Appl. Mech. Ser. E*, **37** (1970), 61-69.
[10] Turner, C. E. and H. Ford, *Proc. Inst. Mech. Engng.*, **15** (1957), 526-550.
[11] Андреева Л. Е., и др., Сильфоны, расчет и проек., *М.*, *Машин.* (1975).
[12] Hamada, M. and S. Takezono, *Bull. JSME*, **9** (1966), 502-523.
[13] 钱伟长、郑思梁, 应用数学和力学, **1** (1980), 287-299.
[14] 钱伟长、郑思梁, 应用数学和力学, **2** (1981), 97-111.
[15] 钱伟长, 清华大学学报, **19** (1979), 84-99.
[16] 陈山林, 成都科技大学学报, 3 (1982), 49-58.

[17] 王玳瑜、陈山林、吴国平, *Proc. of Inter. Cong. IASS-85*, Moscow.
[18] Flegge, W., *Stresses in Shells*, 2ed., New York (1973).

Axisymmetry Problems of Ring Shells under Arbitrary Distributed Loads

Chen Shan-lin

(*Chongqing Institute of Architecture and Engineering, Chongqing*)

Abstract

Extending Novozhilov's transformation, this paper simplifies successfully the axisymmetry problems of ring shells under arbitrary distributed loads, and the equation of the problems in complex form which is similar to Novozhilov's is obtained. The particular solution is given. Combining with Chien's general solution of homogeneous equation, this paper gives the general solution for the general symmetry problems of ring shells. Various examples of useful loads and closed ring shells are discussed, respectively.