应用数学和力学，第7卷第5期(1986年5月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

适应性波束形成器的随机变界截尾算法*

朱允民

(中国科学院成都分院数理科学研究室，1985年6月25日收到)

摘要

本文对适应性波束形成器给出一种递推随机变界截尾算法，并在较简单的条件下，证明了算法几乎处处具有大范围收敛性.

一、引言

为了在水下测定目标的方位，用一定数量的敏感元件组成一个基阵，用 $\{x_t\}$ 表示在t时刻这些敏感元件的输出讯号，然后对些信号进行加权处理，使经过处理后的讯号 Wx_t 在平方意义下尽可能好地逼近目标讯号 $\{y_t\}$. 由于y_t并不知道，所以为了保持信号不失真，就要对加权阵W加上一个约束条件

$$W^\tau C=\Phi \tag{1.1}$$

以上，x_t为n维矢量，y_t为m维矢量，W，C，Φ分别为$n\times m$，$n\times l$，$m\times l$阵. 显然，为了存在W使(1.1)成立的充要条件是

$$\Phi C^+C=\Phi \tag{1.2}$$

这样，问题归结为在约束条件(1.1)下，求最优加权阵$W_{opt}(t)$，使

$$E(W^\tau_{opt}(t)x_t-y_t)(W^\tau_{opt}(t)x_t-y_t)^\tau=\min \tag{1.3}$$

这就是所谓波束形成器问题.

在信号$\{x_k\}$，$\{y_k\}$是不相关的平稳随机序列的假定下，一类适应性波束形成器算法的收敛性问题得到较好解决[1~5]. 由于实际上往往不能假定信号是不相关的平稳序列，[6]对[5]中提出的算法加以截尾，然后证明了修改后的算法在某种非平稳相关输入的情况下具有好的收敛性质. 但是[6]中截尾算法的截尾界却依赖于最优解的上界及与信号列协方差阵有关的某矩阵的性质，这就是说，需要知道所求问题的若干先验信息，才能构造求解的迭代算法，这无论在理论上还是在应用上都不够理想. 本文将给出一种随机变界截尾的适应性波束形成器算法，它不需要[6]中在确定截尾界时所需的那些先验信息，在更弱的信号条件下，仍能保证算法具有几乎处处收敛到最优解的性质. 关于对一种迭代算法作随机变界截尾的思想，最早可见我们的另一篇论文[7].

* 王志忠推荐

二、问题的提法

对非平稳的相关信号过程$\{x_t\}$及$\{y_t\}$，我们作下面的假定：

Ⅰ. 设

$$Ex_tx_t^\tau=m^2(t)R_1 \tag{2.1}$$

$$Ex_ty_t^\tau=m^2(t)R_2 \tag{2.2}$$

$$Ey_ty_t^\tau=m^2(t)R_3 \tag{2.3}$$

这里，R_1，R_2，R_3是未知的非负定矩阵，对数值函数$m^2(t)$我们没有给[6]中那样的上、下界限制，但在后面对它可能随t趋于无穷时趋于0或无穷大的速度有一定限制。放松对$m^2(t)$的要求，在实际应用中意味着即使被逼近的信号$\{y_t\}$随时间向零衰减，或向无穷大增强，我们的波束形成器都有适应能力。

不难证明，存在阵H，L，使得

$$R_1=HH^\tau,\ R_2=HL^\tau,\ R_3=LL^\tau \tag{2.4}$$

此外，我们还要求

$$E\|x_t^\tau y_t^\tau\|^4\leqslant r_t^2 \tag{2.5}$$

这里r_t^2也可以没有上、下界限制，也比以往要求弱。

Ⅱ. 在实际问题中，对于信号过程$\{x_t\}$，$\{y_t\}$往往不能把抽样看成彼此不相关的，我们这里给出信号抽样$\{x_k\}$、$\{y_k\}$应满足的相关性条件是

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x_kx_k^\tau-m^2(k)HH^\tau)\quad \text{a.e.收敛} \tag{2.6}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x_ky_k^\tau-m^2(k)HL^\tau)\quad \text{a.e.收敛} \tag{2.7}$$

其中序列$\{a_k\}$应满足的条件将在下一节给出。满足(2.6)(2.7)的相关序列$\{x_kx_k^\tau-m^2(k)HH^\tau\}$和$\{x_ky_k^\tau-m^2(k)HL^\tau\}$的例子是相当多的，在[8]中p30～p37给出了若干例子，既包括这些序列有限相关，也包括某些无限相关的情况。在[7]中还说明了这些序列可以是某种ARMA序列或无穷项滑动平均序列。在[6]推论1中也表明了那里的类似相关序列是这里的特例。

不难验证（参看[5]）由(1.1)、(1.3)所确定的最优加权阵$W_{opt}(t)$在时刻t的表达式为

$$\begin{aligned}W_{opt}(t)&=C^{+\tau}\Phi^\tau+(Pm^2(t)R_1P)^+(m^2(t)R_2-m^2(t)R_1C^{+\tau}\Phi^\tau)\\&=C^{+\tau}\Phi^\tau+(PR_1P)^+(R_2-R_1C^{+\tau}\Phi^\tau)\\&=C^{+\tau}\Phi^\tau+(PHH^\tau P)^+(HL^\tau-HH^\tau C^{+\tau}\Phi^\tau)\end{aligned} \tag{2.8}$$

其中$P=I-CC^+$，且看出$W_{opt}(t)$实际上与t无关。

由于R_1、R_2是未知的，即使可以估计出来，但因阶数很大，求伪逆的计算量十分大，使得直接从(2.8)式得到W_{opt}不可能，所以希望根据量测x_k和$x_ky_k^\tau$来适时地修正W_{opt}的近似值W_k，要求$W_k\xrightarrow[k\to\infty]{}W_{opt}$。

三、递推算法及其收敛性

[5]给出了下面的递推算法：

$$W_{k+1}=C^{+\tau}\Phi^{\tau}+P[W_k+a_k(x_k y_k^{\tau}-x_k x_k^{\tau}W_k)] \tag{3.1}$$

$$W_0=C^{+\tau}\Phi^{\tau} \tag{3.2}$$

这里

$$a_k>0,\ \sum_{k=0}^{\infty}a_k=\infty,\ \ \sum_{k=0}^{\infty}a_k^2<\infty \tag{3.3}$$

[6]将[5]中关于$\{x_k\}$和$\{y_k\}$的条件放宽为某种非平稳的相关随机序列，但将算法(3.1)～(3.2)截尾：

$$W_{k+1}=\begin{cases}W_{k+1}^{*}\triangleq C^{+\tau}\Phi^{\tau}+P[W_k+a_k(x_k y_k^{\tau}-x_k x_k^{\tau}W_k)], & \text{当}\|PW_{k+1}^{*}\|<B\\ W_k, & \text{当}\|PW_{k+1}^{*}\|\geqslant B\end{cases} \tag{3.4}$$

$$W_0=C^{+\tau}\Phi^{\tau} \tag{3.5}$$

其中截尾界B依赖于$\|\lambda W_{opt}\|$的一个上界，λ为$PHH^{\tau}P$的迹与最小非零特征值之比，即

$$\lambda=\frac{\mathrm{tr}PHH^{\tau}P}{\min\limits_{\lambda_i\neq 0}\lambda_i(PHH^{\tau}P)}$$

$\lambda_i(PHH^{\tau}P)$是$PHH^{\tau}P$的特征值。

下面给出我们所提出的随机变界截尾适应性波束形成器算法。

给定一个无穷增大的正实数序列$\{B_i\}$，递推地定义一整数值随机变量序列$\sigma(n)$和对W_{opt}的逼近W_n如下：

$$\sigma(n)=\sum_{j=0}^{n-1}I_{[\|PW^{*}_{j+1}\|\geqslant B_{\sigma(j)}]},\ \ \sigma(0)=0 \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}W_{n+1}=&\{C^{+\tau}\Phi^{\tau}+P[W_n+a_n(x_n y_n^{\tau}-x_n x_n^{\tau}W_n)]\}I_{[\|PW^{*}_{n+1}\|<B_{\sigma(n)}]}\\&+W_0 I_{[\|PW^{*}_{n+1}\|\geqslant B_{\sigma(n)}]}\end{aligned} \tag{3.7}$$

这里的W_{n+1}^{*}定义如(3.4)，对序列$\{a_n\}$的要求如下：

$$a_n>0,\ \sum_{n=0}^{\infty}a_n m^2(n)=\infty,\ \sum_{n=0}^{\infty}a_n^2 r_n^2<\infty \tag{3.8}$$

由于[6]中对$m^2(k)$要求上下有界，r_k^2为常数，因此这里对$\{a_n\}$的要求并不较[6]为强。

记$S_k\equiv PW_k$，由于

$$S_k^{\tau}=W_k^{\tau}P=W_k^{\tau}-W_k^{\tau}CC^{+}=W_k^{\tau}-\Phi C^{+}$$

因此要讨论W_k的收敛性，只需讨论S_k的收敛性，由(3.7)得到

$$S_{k+1}=\begin{cases}S_k+a_kP[x_k y_k^{\tau}-x_k x_k^{\tau}(S_k+C^{+\tau}\Phi^{\tau})], & \text{当}\|S_{k+1}^{*}\|<B_{\sigma(k)}\\ S_0\equiv 0, & \text{当}\|S_{k+1}^{*}\|\geqslant B_{\sigma(k)}\end{cases} \tag{3.9}$$

S_{k+1}^{*}的定义类似(3.4)中W_{k+1}^{*}的定义。从(3.6)，(3.7)，(3.9)可以看出随机变界截尾算法的思想是很简单的，在第$k+1$步，当$\|S_{k+1}^{*}\|$比截尾界$B_{\sigma(k)}$小，则$S_{k+1}=S_{k+1}^{*}$，当$\|S_{k+1}^{*}\|$大于或等于$B_{\sigma(k)}$，则$S_{k+1}=0$，同时截尾界从$B_{\sigma(k)}$变为$B_{\sigma(k)+1}$。

由于$PH=0$的情况[5]中已说明为平凡情况，故往下设$PH\neq 0$。

为了证明算法的收敛性，我们先给出下面一些引理。

引理1 在条件Ⅰ、Ⅱ下，$\{S_n\}$由(3.6)～(3.9)定义，若S_{n_k}是S_n的一个收敛子列，则存在常数$c_1>0$，$\Delta>0$，对$\forall T\in[0,\Delta)$存在k_T，只要$k>k_T$，成立

$$\left\|\sum_{i=n_k}^{m+1} a_i P[x_i y_i^\tau - x_i x_i^\tau (S_i + C^{+\tau}\Phi^\tau)]\right\| \leqslant c_1 \qquad (\forall m:\ n_k \leqslant m \leqslant m(n_k, T)) \tag{3.10}$$

其中

$$m(n,T) \triangleq \max\left\{ m:\ \sum_{k=n}^{m} a_k m^2(k) \leqslant T \right\} \tag{3.11}$$

注：常数c_1及往后的其它常数可以依赖于ω。

证明 记 $Q_{k+1} \triangleq P[x_k y_k^\tau - x_k x_k^\tau (S_k + C^{+\tau}\Phi^\tau)]$

若$\sigma(k) \leqslant \sigma < \infty$，对充分大的$k$，有

$$\left\|\sum_{i=n_k}^{m+1} a_i Q_{i+1}\right\| = \|S_{m+2} - S_{n_k}\| \leqslant 2B_\sigma \tag{3.12}$$

现考虑$\sigma(k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$的情况。若引理不成立，取实数$c > \|\bar{S}\|$，$\bar{S} \triangleq \lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k}$，对$T = 2^{-l}$，将存在$k_l$和$m_l$，使得$n_{k_l} \leqslant m_l \leqslant m(n_{k_l}, 2^{-l})$，而且对$k \geqslant k_l$，

$$\|S_{n_k}\| \leqslant (c + \|\bar{S}\|)/2 \tag{3.13}$$

$$\left\|\sum_{i=n_{k_l}}^{m_l+1} a_i Q_{i+1}\right\| > \frac{c - \|\bar{S}\|}{2} \tag{3.14}$$

不失一般性，可设

$$m_l = \inf\left\{m: \left\|\sum_{i=n_{k_l}}^{m+1} a_i Q_{i+1}\right\| > (c - \|S\|)/2\right\} \tag{3.15}$$

则对任m：$n_{k_l} \leqslant m \leqslant m_l$，有

$$\left\|S_{n_{k_l}} + \sum_{i=n_{k_l}}^{m} a_i Q_{i+1}\right\| \leqslant c \tag{3.16}$$

从$\sigma(n_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$，对充分大的$l$，$B_{\sigma(n_{k_l})} \geqslant c$，由(3.16)

$$\left\|S_{n_{k_l}} + \sum_{i=n_{k_l}}^{m} a_i Q_{i+1}\right\| \leqslant B_{\sigma(n_{k_l})} \qquad (\forall m: n_{k_l} \leqslant m \leqslant m_l) \tag{3.17}$$

因此由算法的定义，我们得到

$$S_{m+1} = S_m + a_m Q_{m+1} \qquad (\forall m: n_{k_l} \leqslant m \leqslant m_l) \tag{3.18}$$

从(3.16)(3.17) (3.18)，对$\forall m: n_{k_l} \leqslant m \leqslant m_l + 1$，

$$\|S_m\| \leqslant c \tag{3.19}$$

于是由(2.6)

$$\mathrm{tr} \sum_{i=n_{k_l}}^{m_l} a_i (x_i x_i^\tau - m^2(k) HH^\tau) = \sum_{i=n_{k_l}}^{m_l} a_i (\|x_i\|^2 - m^2(k)\|H\|^2) \xrightarrow[l\to\infty]{} 0,\ \text{a.e.} \tag{3.20}$$

故 $$\sum_{i=n_{k_l}}^{m_l} a_i\|x_i\|^2 \leqslant K2^{-l}\|H\|^2 \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$$

进而由(3.19) $$\left\| \sum_{i=n_{k_l}}^{m_l} a_i P x_i x_i^\tau S_i \right\| \leqslant \sum_{i=n_{k_l}}^{m_l} a_i \|P\| \|x_i\|^2 \|S_i\| \xrightarrow[l\to\infty]{} 0 \tag{3.21}$$

因此由(2.7)(3.21)得

$$\|S_{m_l+1} - S_{n_{k_l}}\| = \left\| \sum_{i=n_{k_l}}^{m_l} a_i Q_{i+1} \right\| \xrightarrow[l\to\infty]{} 0 \tag{3.22}$$

$$a_{m_l+1} Q_{m_l+2} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0 \tag{3.23}$$

因而 $$\|S_{m_l+1} - S_{n_{k_l}} + a_{m_l+1} Q_{m_l+2}\| \xrightarrow[l\to\infty]{} 0 \tag{3.24}$$

另一方面，由(3.15)

$$\|S_{m_l+1} - S_{n_{k_l}} + a_{m_l+1} Q_{m_l+2}\| = \left\| \sum_{i=n_{k_l}}^{m_{l+1}} a_i Q_{i+1} \right\| > \frac{c - \|\bar{S}\|}{2} \tag{3.25}$$

由(3.24)和(3.25)矛盾，故引理得证。

引理2 在引理 1 的条件下，存在常数 $c_2>0$，$\Delta>0$，对 $\forall T\in[0, \Delta)$ 存在 k_T，只要$k>k_T$，成立

$$\|S_m - S_{n_k}\| \leqslant c_2 T \qquad (\forall m: n_k \leqslant m \leqslant m(n_k, T)+1) \tag{3.26}$$

利用引理1，特别参考其中(3.20)，(3.21)的推理，容易得到引理2的证明。

引理3 对满足(3.8)的 $\{a_k\}$ 及$\forall S = \lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k}$，都有

$$\sum_{i=n}^{m} a_i[P(x_i y_i^\tau - x_i x_i^\tau (S + C^{+\tau}\Phi^\tau)) - m^2(i) PHH^\tau P(D-S)] \xrightarrow[\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}]{} 0, \text{ a.e.} \tag{3.27}$$

$$D \triangleq (PHH^\tau P)^+ (HL^\tau - HH^\tau C^{+\tau}\Phi^\tau) \tag{3.28}$$

证明 由于（参看[5]）

$$PHH^\tau P(PHH^\tau P)^+ H = PH, \quad PS = S \ (\forall k) \tag{3.29}$$

我们得到 $$PHH^\tau P(PHH^\tau P)^+ HH^\tau S = PHH^\tau PS \tag{3.30}$$

于是由(2.6)、(2.7)、(3.28)、(3.30)

$$\sum_{i=n}^{m} a_i[P(x_i y_i^\tau - x_i x_i^\tau (S + C^{+\tau}\Phi^\tau)) - m^2(i) PHH^\tau P(D-S)]$$

$$= \sum_{i=n}^{m} a_i[P(x_i y_i^\tau - x_i x_i^\tau (S + C^{+\tau}\Phi^\tau)) - m^2(i) P(HL^\tau - HH^\tau (S + C^{+\tau}\Phi))$$

$$+ m^2(i) P(HL^\tau - HH^\tau (S + C^{+\tau}\Phi^\tau)) - m^2(i) PHH^\tau P(D-S)]$$

$$= \sum_{i=n}^{m} a_i[P(x_i y_i^\tau - x_i x_i^\tau (S + C^{+\tau}\Phi^\tau)) - m^2(i) P(HL^\tau - HH^\tau (S + C^{+\tau}\Phi^\tau))] \xrightarrow[\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}]{} 0, \text{ a.e.}$$

(3.31)

引理4 在引理1的条件下，对几乎所有的ω，S_k是一致有界的，也即当k充分大，算法的截尾不再进行。

证明 若不然，由算法的定义可知，$\|S_k-D\|^2$将无穷多次从左边穿越某区间$[\delta_1, \delta_2]$，其中$\delta_1>\|D\|^2$。注意到当$\|S_k-D\|^2<\delta_1$时，S_k也一定有界，故类似引理1中(3.23)式的推理，在限制k：$\|S_k-D\|^2<\delta_1$之下，

$$\|a_k Q_{k+1}\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \tag{3.32}$$

进而可从$\{S_n\}$中选子列$\{S_{n_k}\}$和$\{S_{m_k}\}$，满足条件

(i) $n_k<m_k$，$\|S_{n_k}\|\leqslant M \quad (\forall k)$

(ii) $\|S_{m_k-1}-D\|^2<\delta_1$，$\delta_1\leqslant\|S_n-D\|^2\leqslant\delta_2$，$n_k\leqslant n\leqslant m_k-1$

(iii) $\|S_{m_k}-D\|^2>\delta_2$

显然

$$S_{n_k}=S_{n_k-1}+a_{n_k-1}Q_{n_k} \tag{3.33}$$

因此由(i)，(3.33)(3.32)

$$\begin{aligned}\|S_{n_k}-D\|^2-\|S_{n_k-1}-D\|^2&=\operatorname{tr}(S_{n_k}+S_{n_k-1}-2D)^\tau(S_{n_k}-S_{n_k-1})\\&=\operatorname{tr}(S_{n_k}+S_{n_k-1}-2D)^\tau a_{n_k-1}Q_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{}0\end{aligned} \tag{3.34}$$

于是由(ii)，

$$\|S_{n_k}-D\|^2\xrightarrow[k\to\infty]{}\delta_1 \tag{3.35}$$

显然

$$Q\triangleq\{S:\delta_1\leqslant\|S-D\|^2\leqslant\delta_2\}$$

是有界闭集，设$S_{n_k'}$是S_{n_k}的一个收敛子列，

$$S_{n_k'}\xrightarrow[k'\to\infty]{}\bar{S} \tag{3.36}$$

则 $\bar{S}\in Q$，$\|\bar{S}-D\|^2=\delta_1$。

为简化记号，仍记n_k'为n_k。

由引理2，只要$k\geqslant k_T$

$$\begin{aligned}&\|S_{m(n_k,T)+1}-D\|^2-\|S_{n_k}-D\|^2\\&=\operatorname{tr}(S_{m(n_k,T)+1}+S_{n_k}-2D)^\tau(S_{m(n_k,T)+1}-S_{n_k})\\&=2\operatorname{tr}(\xi-D)^\tau(S_{m(n_k,T)+1}-S_{n_k})\end{aligned} \tag{3.37}$$

其中

$$\xi=\frac{1}{2}(S_{m(n_k,T)+1}+S_{n_k})\in\{S:\|S-S_{n_k}\|\leqslant c_2T\}$$

因而

$$\|S_{m(n_k,T)+1}-D\|^2-\|S_{n_k}-D\|^2$$

$$=2\operatorname{tr}(\xi-\bar{S})^\tau\sum_{i=n_k}^{m(n_k,T)}a_iQ_{i+1}+2\operatorname{tr}(\bar{S}-D)^\tau\sum_{i=n_k}^{m(n_k,T)}a_iQ_{i+1}$$

$$\leqslant K_2 T^2+2\mathrm{tr}\,(\bar{S}-D)^\tau \sum_{i=n_k}^{m(n_k,T)} a_i P(x_i y_i^\tau - x_i x_i^\tau (S_i-\bar{S}+\bar{S}+C^{+\tau}\Phi^\tau))$$

$$=2\mathrm{tr}\,(\bar{S}-D)^\tau \sum_{i=n_k}^{m(n_k,T)} a_i P(x_i y_i^\tau - x_i x_i^\tau (\bar{S}+C^{+\tau}\Phi^\tau))+K_2T^2$$

$$+2\mathrm{tr}\,(\bar{S}-D)^\tau \sum_{i=n_k}^{m(n_k,T)} a_i P x_i x_i^\tau (S_i-\bar{S}) \tag{3.38}$$

由引理3，只要k足够大，

$$\mathrm{tr}\,(\bar{S}-D)^\tau \sum_{i=n_k}^{m(n_k,T)} a_i P(x_i y_i^\tau - x_i x_i^\tau (\bar{S}+C^{+\tau}\Phi^\tau))$$

$$=\mathrm{tr}\,(\bar{S}-D)^\tau \sum_{i=n_k}^{m(n_k,T)} a_i[P(x_i y_i^\tau - x_i x_i^\tau (\bar{S}+C^{+\tau}\Phi^\tau))-m^2(i)PHH^\tau P(D-\bar{S})]$$

$$+\mathrm{tr}\,(\bar{S}-D)^\tau \sum_{i=n_k}^{m(n_k,T)} a_i m^2(i) PHH^\tau P(D-\bar{S})\leqslant -\alpha T \quad (\alpha>0) \tag{3.39}$$

对(3.38)右边第三项，由引理2及(3.20)～(3.23)的推理

$$2\mathrm{tr}\,(\bar{S}-D) \sum_{i=n_k}^{m(n_k,T)} a_i P x_i x_i^\tau (S_i-\bar{S})$$

$$\leqslant K_3 T \max_{n_k\leqslant i\leqslant m(n_k,T)} \|S_i-\bar{S}\|,$$

而由引理2和(3.36)易证

$$\max_{n_k\leqslant i\leqslant m(n_k,T)} \|S_i-\bar{S}\| \xrightarrow[k\to\infty]{T\to 0} 0 \tag{3.40}$$

于是只要T足够小，由(3.38)～(3.40)

$$\lim_{k\to\infty} \|S_{m(n_k,T)+1}-D\|^2\leqslant \delta_1-\frac{1}{2}\alpha T \tag{3.41}$$

另一方面，由于$S_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{}\bar{S}$和引理2及(3.37)

$$\max_{n_k\leqslant m\leqslant m(n_k,T)+1} \|S_m-D\|^2-\|S_{n_k}-D\|^2 \xrightarrow[T\to 0]{} 0 \tag{3.42}$$

一致于$k\geqslant k_T$。

由此并注意$\|S_{n_k}-D\|^2\xrightarrow[k\to\infty]{}\delta_1$和$\delta_1<\delta_2$，于是只要$T$足够小，则对$\forall m: n_k\leqslant m\leqslant m(n_k,T)+1$，

$$\|S_m-D\|^2<\delta_2 \tag{3.43}$$

再由S_{n_k}的选法知

$$\|S_{m(n_k,T)+1}-D\|^2\in[\delta_1,\delta_2] \tag{3.44}$$

从(3.44)和(3.41)矛盾得引理成立。

引理5　设数列$\{V_n\}$满足下列条件：

(i) $0\leqslant V_n<K_4<\infty$;

(ii) $|V_{n+1}-V_n|\leqslant a_n m^2(n)K_6$;

这里K_4，K_6是给定常数，a_n满足(3.8)．那么不可能对任何收敛子列$V_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{}\eta>0$，都存在$\varepsilon(\eta)>0$，$\Delta>0$，使得

$$\lim_{k\to\infty} V_{m(n_k,t)+1}\leqslant\eta-T\varepsilon(\eta)\qquad(\forall T<\Delta)\tag{3.45}$$

此即[6]中引理4，故不予证明。

下面我们给出收敛性定理。

定理 在条件Ⅰ、Ⅱ下，$\{S_n\}$由(3.6)～(3.9)定义，则

$$\lim_{n\to\infty} S_n=D,\ \text{a.e.}\tag{3.46}$$

证明 由引理4，S_na.e.有界，而有界序列的收敛性等价于任意收敛子列$S_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{}D$。现假定$S_{n_k}\longrightarrow\bar{S}\neq D$，则有$\|\bar{S}-D\|^2>0$，于是类似引理4，可同样得(3.41)式。

此外易验证$\|S_n-D\|^2$满足引理5的条件(i)

由于

$$\begin{aligned}|\|S_{n+1}-D\|^2-\|S_n-D\|^2|&=|\mathrm{tr}(S_{n+1}+S_n-2D)^\tau a_nQ_{n+1}|\\&\leqslant a_nm^2(n)K_6\end{aligned}$$

故数列$\|S_n-D\|^2$满足引理5中对V_n的全部要求，但(3.41)与引理5矛盾，故定理得证。

最后，作者对陈翰馥教授在本文写作过程中所提的宝贵意见表示衷心感谢。

参 考 文 献

[1] Chang, J. H. and F.B. Tuteur, *LAS*A49 (1971), 636—649.

[2] Widrow, B., P. E. Mantey, L. J. Griffiths, and B. B. Goode, *Proc. IEEE*, 55 (1967), 2143—2158.

[3] Frost, O. L., III, *Proc. IEEE*, **60**,8 (1972),926—935

[4] 狄昂照，自适应波束形成算法的收敛性，应用数学学报，**5**，2 (1982)，136—144.

[5] 陈翰馥，自适应波束形成器中的递推算法，科学通报，6 (1981)，326—328.

[6] 狄昂照，具有非平稳相关输入的自适应阵算法，系统科学与数学，**3**，1 (1983)，28—40.

[7] 陈翰馥、朱允民，随机截尾的随机逼近算法，（待发表）.

[8] Kushner, H. J. and D. S. Clark, *Stochastic Approximation Methods for Constrained and Unconstrained Systems*, Springer (1978).

An Algorithm with Randomly Varying Truncation for Adaptive Beam-Formers

Zhu Yun-min

(*Institute of Mathematical Sciences, Chengdu Branch of Academia Sinica, Chengdu*)

Abstract

A recursive algorithm with randomly varying truncation for adaptive Bram-Formers is proposed. Simple conditions are obtained to guarantee for this algorithm the global convergence almost everywhere.