应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

自共轭椭圆型偏微分方程奇异摄动问题的一致收敛差分解法

刘发旺　郑小苏

（福州大学）（福建师范大学）

（苏煜城推荐，1984年1月20日收到）

摘　要

本文在矩形域内考虑高阶导数项含有小参数的自共轭椭圆型第一边值问题。

本文，我们应用渐近分析方法建立了一种新的差分格式，比较了差分方程的解与微分方程的解的渐近性态，并证明了解的一致收敛性。

一、引　言

本文在矩形域$\bar{R}$：$(0\leqslant x\leqslant L;\ 0\leqslant y\leqslant T)$内讨论高阶导数项含有小参数的自共轭椭圆型偏微分方程第一边值问题

$$\left.\begin{aligned} L_\varepsilon u_\varepsilon(x,y)&\equiv -\varepsilon\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}-\varepsilon\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2}+b(x,y)u_\varepsilon=f(x,y) &&(1.1)\\ u_\varepsilon(x,y)|_{\partial R}&=0 &&(1.2)\end{aligned}\right\}$$

的差分解法，其中∂R为R的边界，$\varepsilon>0$是小参数，$b(x,y)>\beta>0$。

当$\varepsilon=0$时，方程(1.1)，(1.2)退化成：

$$L_0W(x,y)\equiv b(x,y)W(x,y)=f(x,y)$$

即

$$W(x,y)=f(x,y)/b(x,y) \tag{1.3}$$

对这样的问题，我们希望构造能适应边界层性质的差分格式，即对固定的网格步长，当$\varepsilon\to 0$时，差分方程的解的渐近性态与微分方程的解的渐近性态一致。尤其感兴趣的是，当网格步长$h\to 0$，$\tau\to 0$时，所构造的格式的解能关于ε一致地收敛于微分方程的解。近十几年来，不少人做了这方面的工作，如Doolan，Miller，Schilders[1]等人的工作，但这些工作大都针对小参数的常微分方程而言的。

本文根据微分方程问题的边界层性质，构造了相应的差分格式，分析了解的渐近性态，并证明了解的一致收敛性。

二、差分方程的建立

由渐近分析方法，我们看到，当$\varepsilon=0$时，在$x=0$，$x=L$，$y=0$，$y=T$这四条边上，

微分方程问题(1.1)，(1.2)失去了全部定解条件，此时，在边界层上摄动问题(1.1)，(1.2)的解$u_\varepsilon(x,y)$，当$\varepsilon\to 0$时，不能一致地逼近退化问题(1.3)的解$W(x,y)$，即摄动问题在边$x=0$，$x=L$，$y=0$，$y=T$的邻域内将产生边界层现象。所以，摄动问题(1.1)，(1.2)在∂R附近存在边界层函数：

$$\left.\begin{aligned}&V^{(1)}=\exp\left(-\sqrt{b(0,y)}\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \qquad V^{(2)}=\exp\left(-\sqrt{b(L,y)}(L-x)/\sqrt{\varepsilon}\right)\\ &V^{(3)}=\exp\left(-\sqrt{b(x,0)}\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \qquad V^{(4)}=\exp\left(-\sqrt{b(x,T)}(T-y)/\sqrt{\varepsilon}\right)\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

这都是些指数型函数。

由此，我们可构造差分格式：

$$-\gamma_1 u_{x\bar{x}}^{(h,\tau)}(x,y)-\gamma_2 u_{y\bar{y}}^{(h,\tau)}(x,y)+b(x,y)u^{(h,\tau)}(x,y)=f(x,y) \tag{2.2}$$

其中$u_{x\bar{x}}^{(h,\tau)}$、$u_{y\bar{y}}^{(h,\tau)}$分别表示关于x、y的二阶中心差商，h、τ分别表示x、y方向上的步长，且$nh=L$，$m\tau=T$，而γ_1，γ_2是待定系数。

为了确定γ_1，γ_2，我们要求当$b(x,y)$为常数时，边界层函数$V^{(i)}(i=1,2,3,4)$满足常系数齐次差分方程

$$-\gamma_1 u_{x\bar{x}}^{(h,\tau)}-\gamma_2 u_{y\bar{y}}^{(h,\tau)}+b\,u^{(h,\tau)}=0 \tag{2.3}$$

令$u^{(h,\tau)}(x,y)=\exp\left(-\sqrt{b}\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$，或$u^{(h,\tau)}(x,y)=\exp\left(-\sqrt{b}\frac{L-x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$代入(2.3)得到

$$\gamma_1=\frac{1}{4}bh^2\,\mathrm{sh}^{-2}\left(\frac{\sqrt{b}\,h}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

同理，令$u^{(h,\tau)}(x,y)=\exp\left(-\sqrt{b}\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$，或$u^{(h,\tau)}(x,y)=\exp\left(-\sqrt{b}\frac{T-y}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$代入(2.3)可得

$$\gamma_2=\frac{1}{4}\tau^2\mathrm{sh}^{-2}\left(\frac{\sqrt{b}\,\tau}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

由此，对变系数非齐次方程(2.2)来说，我们自然取

$$\left.\begin{aligned}\gamma_1&=\frac{1}{4}b(x,y)h^2\,\mathrm{sh}^{-2}\left(\frac{\sqrt{b(x,y)}\,h}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)\\ \gamma_2&=\frac{1}{4}b(x,y)\tau^2\,\mathrm{sh}^{-2}\left(\frac{\sqrt{b(x,y)}\,\tau}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

于是，我们得到了相应于(1.1)，(1.2)的差分格式

$$\begin{aligned}L_\varepsilon^{(h,\tau)}u^{(h,\tau)}(x,y)\equiv&-\frac{1}{4}b(x,y)h^2\mathrm{sh}^{-2}\left(\frac{\sqrt{b(x,y)}\,h}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)u_{x\bar{x}}^{(h,\tau)}(x,y)\\ &-\frac{1}{4}b(x,y)\tau^2\mathrm{sh}^{-2}\left(\frac{\sqrt{b(x,y)}\,\tau}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)u_{y\bar{y}}^{(h,\tau)}(x,y)\\ &+b(x,y)u^{(h,\tau)}(x,y)=f(x,y)\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$u^{(h,\tau)}(0,y)=u^{(h,\tau)}(L,y)=u^{(h,\tau)}(x,0)=u^{(h,\tau)}(x,T)=0 \tag{2.6}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，它们退化成

$$L_0^{(h,\tau)}W^{(h,\tau)}(x,y)\equiv b(x,y)W^{(h,\tau)}(x,y)=f(x,y) \tag{2.7}$$

易知差分方程(2.5)与微分方程(1.1)是相容的，且其截断误差是$O(h^2+\tau^2)$。

三、渐近性态分析

在本节中，我们将证明：当 h，τ 固定，$\varepsilon\to 0$ 时，差分方程(2.5)、(2.6)的渐近性态与微分方程(1.1)，(1.2)的渐近性态一致。

方程(2.5)可改写成

$$-\gamma_{1,ij}u_{i-1,j}^{(h,\tau)}-\gamma_{2,ij}u_{i,j-1}^{(h,\tau)}+[2\gamma_{1,ij}+2\gamma_{2,ij}+b(x_i,y_j)]u_{ij}^{(h,\tau)}$$

$$-\gamma_{2,ij}u_{i,j+1}^{(h,\tau)}-\gamma_{1,ij}u_{i+1,j}^{(h,\tau)}=f_{ij} \tag{3.1}$$

其中

$$\gamma_{1,ij}=\frac{1}{4}b(x_i,y_j)h^2\mathrm{sh}^{-2}\left(\frac{\sqrt{b(x_i,y_j)}\,h}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

$$\gamma_{2,ij}=\frac{1}{4}b(x_i,y_j)\tau^2\mathrm{sh}^{2}\left(\frac{\sqrt{b(x_i,y_j)}\,\tau}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

从而可将(2.5)，(2.6)写成矩阵形式

$$\mathfrak{A}U^{(h,\tau)}=F \tag{3.2}$$

显然，格式(2.5)，(2.6)是正型的，故极值原理成立。

引理1 设 $V^{(h,\tau)}(x,y)$是给定在$\bar{R}^{(h,\tau)}$上的一个网格函数，则

$$|V^{(h,\tau)}(x,y)|\leqslant M\{\max_{\partial R^{(h,\tau)}}|V^{(h,\tau)}(x,y)|+\max_{R^{(h,\tau)}}|L_\varepsilon^{(h,\tau)}V^{(h,\tau)}(x,y)|\}$$

成立（本文中M均表示一个与ε、x、y无关的常数）。

证明 设

$$m_1=\max_{\partial R^{(h,\tau)}}|V^{(h,\tau)}(x,y)|$$

$$m_2=\max_{R^{(h,\tau)}}|L_\varepsilon^{(h,\tau)}V^{(h,\tau)}(x,y)|$$

作辅助函数

$$Z^{(h,\tau)}(x,y)=m_1+m_2/\beta\pm V^{(h,\tau)}(x,y)$$

那么

$$L_\varepsilon^{(h,\tau)}Z^{(h,\tau)}(x,y)=b(x,y)m_1+b(x,y)m_2/\beta\pm L_\varepsilon^{(h,\tau)}V^{(h,\tau)}(x,y)\geqslant 0$$

又 $Z^{(h,\tau)}(x,y)|_{\partial R^{(h,\tau)}}=m_1+m_2/\beta\pm V^{(h,\tau)}(x,y)|_{\partial R^{(h,\tau)}}\geqslant m_2/\beta\geqslant 0$

故由极值原理，在$\bar{R}^{(h,\tau)}$上$Z^{(h,\tau)}(x,y)\geqslant 0$。

由引理1，不难得到

定理1 在$\bar{R}^{(h,\tau)}$内，对于固定的h，τ，当$\varepsilon\to 0$时，差分方程(2.5)，(2.6)的解$u^{(h,\tau)}(x,y)$逼近于退化方程(2.7)的解$W^{(h,\tau)}(x,y)$。

证明类似于文[2]。

从而可知，差分问题的解与微分问题的解的渐近性态是一致的。

四、渐近展开

引理2　（极值原理）设$V(x,y)$为光滑函数，满足$V(x,y)|_{\partial R}\geqslant 0$，及$L_\varepsilon V(x,y)\geqslant 0$，$(x,y)\in R$，则$V(x,y)\geqslant 0$，$(x,y)\in R$。

引入平滑函数　$\psi\left(\frac{\rho}{\eta}\right)$ $(\rho<\eta)$：

（1）　$\psi\left(\frac{\rho}{\eta}\right)$在$[0,\eta]$内关于$\rho$无限可微；

（2）　$\psi\left(\frac{\rho}{\eta}\right)=\begin{cases}1 & \left(\rho\leqslant\frac{\eta}{3}\right)\\ 0 & \left(\rho\geqslant\frac{2}{3}\eta\right)\end{cases}$；

（3）　$0\leqslant\psi\left(\frac{\rho}{\eta}\right)\leqslant 1$，　$\left(\frac{1}{3}\eta\leqslant\rho\leqslant\frac{2}{3}\eta\right)$。

现在，我们利用V-L的渐近方法，提出解的渐近展开：

$$\tilde{u}(x,y)=W_0(x,y)+\sum_{i=0}^{1}\varepsilon^{i/2}\left[\tilde{V}_i^{(1)}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}},y\right)+\tilde{V}_i^{(2)}\left(\frac{L-x}{\sqrt{\varepsilon}},y\right)\right.$$

$$\left.+\tilde{V}_i^{(3)}\left(x,\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\tilde{V}_i^{(4)}\left(x,\frac{T-y}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right]\qquad((x,y)\in\bar{G})\tag{4.1}$$

其中$\bar{G}$表示R除去$(0,0)$，$(0,T)$，$(L,0)$，(L,T)四点的邻域，即$\bar{G}=R-V_{00}-V_{L0}-V_{0T}-V_{LT}$。令

$$t_1=x/\sqrt{\varepsilon},\quad t_2=(L-x)/\sqrt{\varepsilon},\quad s_1=y/\sqrt{\varepsilon},\quad s_2=(T-y)/\sqrt{\varepsilon}$$

而$W_0(x,y)$，$\tilde{V}_i^{(j)}$ $(j=1,2,3,4;\ i=0,1)$由下列方程确定

$$W_0(x,y)=f(x,y)/b(x,y)\tag{4.2}$$

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\partial^2 V_0^{(1)}}{\partial t_1^2}+b(0,y)V_0^{(1)}=0\\&\lim_{t_1\to\infty}V_0^{(1)}=0,\quad V_0^{(1)}(0,y)+W_0(0,y)=0\end{aligned}\right\}\tag{4.3}$$

解得
$$V_0^{(1)}(t_1,y)=-\frac{f(0,y)}{b(0,y)}\exp\left(-\sqrt{b(0,y)}\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

$$\tilde{V}_0^{(1)}(t_1,y)=\psi\left(\frac{x}{\delta}\right)V_0^{(1)}(t_1,y)$$

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\partial^2 V_0^{(2)}}{\partial t_2^2}+b(L,y)V_0^{(2)}=0\\&\lim_{t_2\to\infty}V_0^{(2)}=0,\quad V_0^{(2)}(0,y)+W_0(L,y)=0\end{aligned}\right\}\tag{4.4}$$

解得
$$V_0^{(2)}(t_2,y)=-\frac{f(L,y)}{b(L,y)}\exp\left(-\sqrt{b(L,y)}\frac{L-x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

$$\widetilde{V}_0^{(2)}(t_2,y)=\psi\left(\frac{L-x}{\delta}\right)V_0^{(2)}(t_2,y)$$

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\partial^2 V_0^{(3)}}{\partial s_1^2}+b(x,0)\,V_0^{(3)}=0, \qquad \lim_{s_1\to\infty}V_0=0\\ &V_0^{(3)}(x,0)=-W_0(x,0)-\widetilde{V}_0^{(1)}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}},0\right)-\widetilde{V}_0^{(2)}\left(\frac{L-x}{\sqrt{\varepsilon}},0\right)\overset{\text{记}}{=}Q_1(x)\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

解得 $V_0^{(3)}(x,s_1)=Q_1(x)\exp\left(-\sqrt{b(x,0)}\,y/\sqrt{\varepsilon}\right)$

$$\widetilde{V}_0^{(3)}(x,s_1)=\psi\left(\frac{y}{\delta}\right)V_0^{(3)}(x,s_1)$$

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\partial^2 V_0^{(4)}}{\partial s_2^2}+b(x,T)V_0^{(4)}=0, \qquad \lim_{s_2\to\infty}V_0^{(4)}=0\\ &V_0^{(4)}(x,0)=-W_0(x,0)-\widetilde{V}_0^{(1)}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}},\ T\right)-\widetilde{V}_0^{(2)}\left(\frac{L-x}{\sqrt{\varepsilon}},T\right)\\ &\qquad -\widetilde{V}_0^{(3)}\left(x,\frac{T}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\overset{\text{记}}{=}Q_2(x)\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

解得 $V_0^{(4)}(x,s_2)=Q_2(x)\exp\left(-\sqrt{b(x,T)}\,(T-y)/\sqrt{\varepsilon}\right)$

$$\widetilde{V}_0^{(4)}(x,\ s_2)=\psi\left(\frac{L-y}{\delta}\right)_0^{(4)}(x,\ s_2)$$

类似地可写出关于 $\widetilde{V}_1^{(j)}$ $(j=1,2,3,4)$所满足的方程。

由此可知：

(1) $\dfrac{\partial^2 W_0}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 W_0}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 \widetilde{V}_i^{(j)}}{\partial y^2}$ $(i=0,1;\ j=1,2)$关于 ε 是一致有界的

(2) 除去宽度为$O(\sqrt{\varepsilon})$的点$(0,0)$和点$(L,0)$的邻域，V_{00}，V_{L0}外，有

$$\frac{\partial^2 \widetilde{V}_i^{(3)}}{\partial x^2}=O(1) \qquad (i=0,1)$$

(3) 除去宽度为 $O(\sqrt{\varepsilon})$的点 $(0,0)$，$(L,0)$，$(0,T)$，(L,T) 的邻域V_{00}，V_{L0}，V_{0T}，V_{LT}外，有

$$\frac{\partial^2 \widetilde{V}_i^{(4)}}{\partial x^2}=O(1) \qquad (i=0,1)$$

定理 2 设$u_\varepsilon(x,y)$是(1.1)，(1.2)的解，$\tilde{u}(x,y)$是渐近解(4.1)，若$b(x,y)$，$f(x,y)$充分光滑，则

$$|u_\varepsilon(x,y)-\tilde{u}(x,y)|\leqslant M\varepsilon \qquad ((x,y)\in\overline{G})$$

证明 注意到平滑函数，性质，以及

$P_n(t)\exp(-t)\leqslant M\exp(-t/2)$，对任意的$t\geqslant 0$，其中$P_n(t)$是关于 t 的 n 次多项式。

我们有

$$L_\varepsilon[u_\varepsilon(x,y)-\tilde{u}(x,y)]$$

$$
\begin{aligned}
&=\varepsilon\left\{\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \tilde{V}_0^{(1)}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \tilde{V}_0^{(2)}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \tilde{V}_0^{(3)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \tilde{V}_0^{(4)}}{\partial x^2}\right.\\
&\quad-\frac{1}{2}t_1^2\frac{\partial^2 b(\xi_1,y)}{\partial x^2}\tilde{V}_0^{(1)}+\frac{1}{2}t_2^2\frac{\partial^2 b(\xi_2,y)}{\partial x^2}\tilde{V}_0^{(2)}-\frac{1}{2}s_1^2\frac{\partial^2 b(x,\eta_1)}{\partial y^2}\tilde{V}_0^{(3)}\\
&\quad+\frac{1}{2}s_2^2\frac{\partial^2 b(x,\eta_2)}{\partial y^2}\tilde{V}_0^{(4)}-t_1\frac{\partial b(\xi_3,y)}{\partial x}\tilde{V}_1^{(1)}+t_2\frac{\partial b(\xi_4,y)}{\partial x}\tilde{V}_1^{(2)}\\
&\quad\left.-s_1\frac{\partial b(x,\eta_3)}{\partial y}\tilde{V}_1^{(3)}+s_2\frac{\partial b(x,\eta_4)}{\partial y}\tilde{V}_1^{(4)}\right\}\\
&\quad+\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\left\{\frac{\partial^2\tilde{V}_1^{(1)}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\tilde{V}_1^{(2)}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\tilde{V}_1^{(3)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde{V}_1^{(4)}}{\partial x^2}\right\}
\end{aligned}
$$

所以,

$$
\begin{aligned}
&|L_\varepsilon[u_\varepsilon(x,y)-\tilde{u}(x,y)]|\\
&\quad\leqslant M\left\{\varepsilon+\varepsilon\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{b(0,y)}\,t_1\right)+\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{b(L,y)}\,t_2\right)\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{b(x,0)}\,s_1\right)+\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{b(x,T)}\,s_2\right)\right]\right\}\qquad ((x,y)\in\bar{G})
\end{aligned}
$$

引入闸函数

$$
\begin{aligned}
\Phi(x,y)&=\left(L+T-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\right)\varepsilon r_0+\varepsilon r_1\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\beta}\,t_1\right)\\
&\quad+\varepsilon r_2\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\beta}\,t_2\right)+\varepsilon r_3\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\beta}\,s_1\right)\\
&\quad+\varepsilon r_4\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\beta}\,s_2\right)\pm(u_\varepsilon-\tilde{u})
\end{aligned}
$$

其中r_i $(i=0,1,2,3,4)$是正常数，适当选取r_i $(i=0,1,2,3,4)$可使得

$$\Phi(0,y)\geqslant 0,\ \Phi(L,y)\geqslant 0,\ \Phi(x,0)\geqslant 0,\ \Phi(x,T)\geqslant 0$$

及

$$
\begin{aligned}
L_\varepsilon\Phi(x,y)&\geqslant\frac{1}{2}\varepsilon\beta(T+L)r_0+\frac{3}{4}\varepsilon\beta\left[r_1\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\beta}\,t_1\right)\right.\\
&\quad\left.+r_2\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\beta}\,t_2\right)+r_3\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\beta}\,s_1\right)+r_4\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\beta}\,s_2\right)\right]\\
&\quad-M\left\{\varepsilon+\varepsilon\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{b(0,y)}\,t_1\right)+\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{b(L,y)}\,t_2\right)\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{b(x,0)}\,s_1\right)+\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{b(x,T)}\,s_2\right)\right]\right\}\geqslant 0
\end{aligned}
$$

由引理 2 知，对于所有$(x,y)\in\bar{G}$，有

$$\Phi(x,y)\geqslant 0$$

即

$$|u_\varepsilon(x,y)-\tilde{u}(x,y)|$$

$$\leqslant\left(L+T-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\right)\varepsilon r_0+\varepsilon r_1\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\beta}t_1\right)$$

$$+\varepsilon r_2\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\beta}t_2\right)+\varepsilon r_3\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\beta}s_1\right)$$

$$+\varepsilon r_4\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\beta}s_2\right)\leqslant M\varepsilon \qquad ((x,y)\in\bar{G})$$

五、一 致 收 敛 性

本节，我们就$b(x,y)\equiv b$(常数)进行讨论。此时，差分格式(2.5)，(2.6)可写成

$$L_\varepsilon^{(h,\tau)}u_{ij}^{(h,\tau)}\equiv-\frac{1}{4}bh^2\,\mathrm{sh}^{-2}\left(\frac{\sqrt{b}\,h}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)\cdot\frac{u_{i+1,j}^{(h,\tau)}-2u_{ij}^{(h,\tau)}+u_{i-1,j}^{(h,\tau)}}{h^2}$$

$$-\frac{1}{4}b\tau^2\,\mathrm{sh}^{-2}\left(\frac{\sqrt{b}\,\tau}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)\cdot\frac{u_{i,j+1}^{(h,\tau)}-2u_{ij}^{(h,\tau)}+u_{i,j-1}^{(h,\tau)}}{\tau^2}$$

$$+bu_{ij}^{(h,\tau)}=f_{ij}\qquad(1\leqslant i\leqslant n-1,\ 1\leqslant j\leqslant m-1)\tag{5.1}$$

$$u_{i0}^{(h,\tau)}=u_{im}^{(h,\tau)}=u_{0j}^{(h,\tau)}=u_{nj}^{(h,\tau)}=0\qquad(0\leqslant i\leqslant n,\ 0\leqslant j\leqslant m)\tag{5.2}$$

定理 3 设$u_\varepsilon(x,y)$是(1.1)，(1.2)的解，$u^{(h,\tau)}(x,y)$是(5.1)，(5.2)的解，则对于固定的$\varepsilon>0$，有估计式

$$|u^{(h,\tau)}(x,y)-u_\varepsilon(x,y)|\leqslant M(h^2+\tau^2)\varepsilon^{-1}((x,y)\in\bar{G})\tag{5.3}$$

证明 令$\rho(x,y)=u^{(h,\tau)}(x,y)-u_\varepsilon(x,y)$

则

$$L_\varepsilon^{(h,\tau)}\rho(x,y)=-\varepsilon\left(\frac{\partial^2u_\varepsilon}{\partial x^2}-u_{\varepsilon,x\bar{x}}\right)-\varepsilon\left(\frac{\partial^2u_\varepsilon}{\partial y}-u_{\varepsilon,y\bar{y}}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{4}bh^2\,\mathrm{sh}^{-2}\left(\frac{\sqrt{b}\,h}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)-\varepsilon\right)u_{\varepsilon,x\bar{x}}+\left(\frac{1}{4}b\tau^2\,\mathrm{sh}^{-2}\left(\frac{\sqrt{b}\,\tau}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)-\varepsilon\right)u_{\varepsilon,y\bar{y}}$$

利用不等式[1]：

$$\left|\frac{1}{4}bh^2\,\mathrm{sh}^{-2}\frac{\sqrt{b}\,h}{2\sqrt{\varepsilon}}-\varepsilon\right|\leqslant Mh^2\tag{5.4}$$

我们有

$$|L_\varepsilon^{(h,\tau)}\rho(x,y)|\leqslant M(\varepsilon X_4h^2+\varepsilon Y_4\tau^2+X_2h^2+Y_2\tau^2)$$

其中

$$X_i=\max\left|\frac{\partial^iu_\varepsilon}{\partial x^i}\right|,\qquad Y_i=\max\left|\frac{\partial^iu_\varepsilon}{\partial y^i}\right|$$

由于

$$\left|\frac{\partial^{i+j}u_\varepsilon(x,y)}{\partial x^i\partial y^i}\right|\leqslant M\varepsilon^{-\frac{i+j}{2}}$$

我们有

$$|L_\varepsilon^{(h,\tau)}\rho(x,y)|\leqslant M(h^2+\tau^2)/\varepsilon$$

又在$\partial R^{(h,\tau)}$上$\rho(x,y)=0$，故由引理1，即得结论。

定理 4　设$u^{(h,\tau)}(x,y)$是差分方程(5.1)，(5.2)的解，$\tilde{u}(x,y)$是渐近解，则成立估计式

$$|\tilde{u}(x,y)-u^{(h,\tau)}(x,y)|\leqslant M(\varepsilon+h^2+\tau^2)\qquad((x,y)\in\bar{G})\tag{5.5}$$

证明　令$e(x,y)=\tilde{u}(x,y)-u^{(h,\tau)}(x,y)$

$$L_\varepsilon^{(h,\tau)}e(x,y)=L_\varepsilon^{(h,\tau)}\tilde{u}(x,y)-L_\varepsilon^{(h,\tau)}u^{(h,\tau)}(x,y)$$

$$\overset{记}{=}F_0+F_1+F_2+F_3+F_4$$

其中

$$F_0=-\frac{1}{4}bh^2\,\mathrm{sh}^{-2}\left(\frac{\sqrt{b}\,h}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)W_{0,x\bar{x}}-\frac{1}{4}b\tau^2\,\mathrm{sh}^{-2}\left(\frac{\sqrt{b}\,\tau}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)W_{0,y\bar{y}}$$

$$F_i=-\frac{1}{4}bh^2\,\mathrm{sh}^{-2}\left(\frac{\sqrt{b}\,h}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)[\widetilde{V}_0^{(i)}+\sqrt{\varepsilon}\,\widetilde{V}_1^{(i)}]_{x\bar{x}}$$

$$-\frac{1}{4}b\tau^2\,\mathrm{sh}^{-2}\left(\frac{\sqrt{b}\,\tau}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)[\widetilde{V}_0^{(i)}+\sqrt{\varepsilon}\,\widetilde{V}_1^{(i)}]_{y\bar{y}}+b[\widetilde{V}_0^{(i)}+\sqrt{\varepsilon}\,\widetilde{V}_1^{(i)}]$$

$$(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

由于

$$F_0=-\varepsilon W_{0,x\bar{x}}-\varepsilon W_{0,y\bar{y}}+\left[\varepsilon-\frac{1}{4}bh^2\,\mathrm{sh}^{-2}\left(\frac{\sqrt{b}\,h}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)\right]W_{0,x\bar{x}}$$

$$+\left[\varepsilon-\frac{1}{4}b\tau^2\,\mathrm{sh}^{-2}\left(\frac{\sqrt{b}\,\tau}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)\right]W_{0,y\bar{y}}$$

利用不等式(5.4)，我们有

$$|F_0|\leqslant M(h^2+\tau^2+\varepsilon)\tag{5.6}$$

又当b是常数时，$\widetilde{V}_1^{(i)}=0$，$(i=1,2,3,4)$。

由(4.3)～(4.6)及不等式(5.4)可以证明

$$|F_i|\leqslant M(\varepsilon+h^2+\tau^2)\tag{5.7}$$

从而

$$|L_\varepsilon^{(h,\tau)}e(x,y)|\leqslant\sum_{i=0}^{4}|F_i|\leqslant M(\varepsilon+h^2+\tau^2)\tag{5.8}$$

又在$\partial R^{(h,\tau)}$上，$e(x,y)=0$　　　　(5.9)

故由引理1，我们有

$$|e(x,y)|\leqslant M(\varepsilon+h^2+\tau^2)\tag{5.10}$$

定理 5　设$u_\varepsilon(x,y)$是摄动问题(1.1)，(1.2)的解，$u^{(h,\tau)}(x,y)$是差分方程(5.1)，(5.2)的解，则有估计式

$$|u_\varepsilon(x,y)-u^{(h,\tau)}(x,y)|\leqslant M(\varepsilon+h^2+\tau^2)((x,y)\in\bar{G})$$

成立。

证明　由定理2及定理4，即得

$$|u_\varepsilon(x,y)-u^{(h,\tau)}(x,y)|\leqslant|u_\varepsilon(x,y)-\tilde{u}(x,y)|+|\tilde{u}(x,y)-u^{(h,\tau)}(x,y)|$$

$$\leqslant M(h^2+\tau^2+\varepsilon)\tag{5.11}$$

综合定理3和定理5，我们有

定理 6 设$u_\varepsilon(x,y)$是摄动问题(1.1)，(1.2)的解，同时$u_\varepsilon(x,y)\in C_4(\bar{R})$，$u^{(h,\tau)}(x,y)$是差分方程(5.1)，(5.2)的解，则对所有$\varepsilon>0$,

$$|u_\varepsilon(x,y)-u^{(h,\tau)}(x,y)|\leqslant M(h+\tau) \tag{5.12}$$

在$\bar{G}$内成立。

南京大学苏煜城付教授，以及我们的导师林鹏程付教授，对本文给予热情的指导，并提出了宝贵的意见，作者向他们表示深切的感谢。

参 考 文 献

[1] Doolan, E. P., J. J. H. Miller and W. H. A. Schilders, *Uniform Numerical Method for Problems with Initial and Boundary Layer*, (1980).

[2] 苏煜城、吴启光，椭圆-抛物偏微分方程奇异摄动问题的差分解法，应用数学和力学，1，2 (1980).

[3] 苏煜城，奇异摄动中的边界层校正法，上海科学技术出版社 (1983).

A Uniformly Convergent Difference Scheme for the Singular Perturbation of a Self-adjoint Elliptic Partial Differential Equation

Liu Fa-wang

(*Fuzhou University, Fuzhou*)

Zheng Xiao-su

(*Fujian Teachers' University, Fuzhou*)

Abstract

In this paper, we consider a self-adjoint elliptic first boundary value problem with a small parameter affecting the highest derivative.

In the paper, we set up a new scheme by the asymptotic analysis method, compare asymptotic behavior between the solution of the difference equation and the solution of the differential equation, and show uniform convergence of the new scheme.