

# 关于钱氏摄动法的高阶解的计算机求解和收敛性的研究

叶开沅 周又和

(兰州大学) (华中工学院)

(1985年9月11日收到)

## 摘 要

本文借助于中心受集中载荷圆板小挠度问题的积分方程, 获得了摄动参数为中心挠度的任意  $n$  阶摄动解的解析式. 于是, 任意次摄动解的所有待定系数能用计算机求解. 因此, 获得了相当高阶的摄动解. 在此基础上, 讨论了钱氏摄动法的渐近性和适用区.

## 一、引 言

自从钱伟长教授提出关于圆板大挠度问题取中心挠度为摄动参数的摄动解<sup>[1]</sup>以来, 许多研究者研究了圆板和环板在不同载荷作用下和不同边界条件下的大挠度问题<sup>[2~5]</sup>. 文[6]、[7]用此方法解决了椭圆板和矩形板的大挠度问题. 文[8]~[10]通过比较不同摄动解的结果, 指出仍以钱氏解为好. 文[11]用加权残余法研究了钱氏解的渐近性. 本文获得了中心受集中载荷作用的圆板大挠度问题的钱氏法任意  $n$  阶摄动解的解析式, 从而所有待定系数可由计算机求解. 这样可获得任意高阶摄动解. 在此基础上, 本文讨论了此问题钱氏摄动解的渐近性和适用域, 同时, 本文的工作也可推广到研究其它摄动解中.

## 二、问题的概述

由格林法, 我们可将中心承受集中载荷作用的圆板大挠度问题的无量纲化的卡门方程化为对应的积分方程:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(y) &= \int_0^1 -K(y, \xi) \frac{1}{\xi^2} \varphi(\xi) s(\xi) d\xi + py(\ln y - \lambda) \\ s(y) &= \frac{1}{2} \int_0^1 G(y, \xi) \frac{1}{\xi^2} \varphi^2(\xi) d\xi \quad y \in [0, 1] \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

这里, 核函数  $K(y, \xi)$  和  $G(y, \xi)$  为

$$K(y, \xi) = \begin{cases} [(\lambda-1)y+1]\xi & \xi \leq y \\ [(\lambda-1)\xi+1]y & \xi > y \end{cases} \quad (2.2)$$

和

$$G(y, \xi) = \begin{cases} [(\mu-1)y+1]\xi & \xi \leq y \\ [(\mu-1)\xi+1]y & \xi > y \end{cases} \quad (2.3)$$

其中无量纲化参量为:

$$y = \frac{r^2}{a^2}; \quad \varphi(y) = yW(y), \nu; \quad s(y) = y\bar{s}(y); \quad W(y) = \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{w(y)}{h}$$

$$\bar{s}(y) = 3(1-\nu^2) \frac{a^2 N_r}{Eh^3}; \quad p = (1-\nu^2) \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{a^2 P}{\pi E h^4} \frac{3}{4}, \quad (\cdot)_{,\nu} = \frac{d}{dy} (\cdot)$$

这里,  $r$  是径向坐标;  $a$  是板的半径;  $P$  是集中载荷;  $h$  是板厚;  $E$  为杨氏模量;  $\nu$  是泊松比;  $\lambda$  和  $\mu$  是与边界条件有关的常数, 如, 对固定夹紧边界,  $\lambda=0$ ,  $\mu=2/(1-\nu)$ ; 其它情况见文 [2],  $N_r$  是单位长度的径向薄膜应力,  $D$  是抗弯刚度,  $w$  是板的挠度。

由文 [2], 本问题的摄动解能写为:

$$\varphi(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(y) \varepsilon^{2n-1} \quad (2.4)$$

$$s(y) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(y) \varepsilon^{2n} \quad (2.5)$$

和

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varepsilon^{2n-1} \quad (2.6)$$

这里,  $\varphi_n(y)$ ,  $s_n(y)$  是待定函数,  $\alpha_n$  是待定常数,  $\varepsilon$  是摄动参数, 对于钱氏摄动解, 它被取为板的中心挠度  $W_m$ 。

我们的目的是要确定所有的  $\varphi_n(y)$ ,  $s_n(y)$  和  $\alpha_n$  来研究解的渐近性和适用区。

### 三、摄动解函数级数的解析式

将摄动解 (2.4)~(2.6) 代入积分方程 (2.1) 中, 比较  $\varepsilon^i$  的同次幂系数, 得  $\varphi_n(y)$ ,  $s_n(y)$  和  $\alpha_n$  的递推关系:

$$\varphi_{n+1}(y) = - \sum_{j=1}^n \int_0^1 K(y, \xi) \frac{1}{\xi^2} \varphi_j(\xi) s_{n-j+1}(\xi) d\xi + \alpha_{n+1} y (\ln y - \lambda) \quad (3.1)$$

$$s_n(y) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_0^1 G(y, \xi) \frac{1}{\xi^2} \varphi_j(\xi) \varphi_{n-j+1}(\xi) d\xi \quad (3.2)$$

$$\text{这里, } n=1, 2, \dots; \quad \varphi_1(y) = \alpha_1 y (\ln y - \lambda) \quad (3.3)$$

由 (3.1)~(3.3) 式, 得:

$$s_1(y) = \frac{\alpha_1^2}{2} (a_1 y^2 \ln^2 y + a_2 y^2 \ln y + a_3 y^2 + a_4 y) \quad (3.4)$$

其中:  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $a_2 = \frac{3}{2} + \lambda$ ,  $a_3 = -\frac{1}{4} (7 + 6\lambda + 2\lambda^2)$ ,  $a_4 = \frac{\mu}{4} (1 + 2\lambda + 2\lambda^2) - a_3$  和  $\varphi_2(y)$ ,  $s_2(y)$

等. 于是有:

**结论 1** 待定函数  $\varphi_n(y)$  和  $s_n(y)$  的函数级数的解析式为:

$$\varphi_n(y) = \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{j=0}^i A_{ij}^{(n)} y^i \ln^j y \quad (3.5)$$

$$y \in [0, 1]$$

$$s_n(y) = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=0}^i B_{ij}^{(n)} y^i \ln^j y \quad (3.6)$$

其中  $A_{ij}^{(n)}$  和  $B_{ij}^{(n)}$  是与  $y$  无关的常数.

**证明** 当  $n=1$  时, 取

$$A_{10}^{(1)} = -\lambda \alpha_1, \quad A_{11}^{(1)} = \alpha_1, \quad B_{10}^{(1)} = \frac{\alpha_1^2}{2} a_4,$$

$$B_{11}^{(1)} = 0, \quad B_{20}^{(1)} = \frac{\alpha_1^2}{2} a_3, \quad B_{21}^{(1)} = \frac{\alpha_1^2}{2} a_2, \quad B_{22}^{(1)} = \frac{\alpha_1^2}{2} a_1$$

由(3.3)、(3.4)式, 有等式

$$\varphi_1(y) = \sum_{i=1}^1 \sum_{j=0}^i A_{ij}^{(1)} y^i \ln^j y, \quad s_1(y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^i B_{ij}^{(1)} y^i \ln^j y$$

成立, 即结论 1 对  $n=1$  成立.

现在假定结论 1 对  $n=2, 3, \dots, N$  成立, 即

$$\varphi_k(y) = \sum_{i=1}^{2k-1} \sum_{j=0}^i A_{ij}^{(k)} y^i \ln^j y, \quad s_k(y) = \sum_{i=1}^{2k} \sum_{j=0}^i B_{ij}^{(k)} y^i \ln^j y \quad k=1, 2, \dots, N \quad (3.7)$$

成立, 而对  $n=N+1$ , 则由(3.1)和(3.7)式, 有

$$\begin{aligned} \varphi_{N+1}(y) &= - \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{2k-1} \sum_{j=0}^i \sum_{r=1}^{2N-2k+2} \sum_{s=0}^r A_{ij}^{(k)} B_{rs}^{(N-k+1)} (j+s)! \left\{ (-1)^{j+s} \left[ \frac{\lambda-1}{(i+r)^{j+s+1}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{(i+r-1)^{j+s+1}} \right] y + \sum_{t=0}^{j+s} \frac{(-1)^t}{(j+s-t)!} \left[ \frac{1}{(i+r)^{t+1}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{(i+r-1)^{t+1}} \right] y^{i+r} \ln^{j+s-t} y \right\} + \alpha_{N+1} y (\ln y - \lambda) \\ &= - \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{2k-1} \sum_{j=0}^i \sum_{r=1}^{2N-2k+2} \sum_{s=0}^r A_{ij}^{(k)} B_{rs}^{(N-k+1)} (j+s)! (-1)^{j+s} \left[ \frac{\lambda-1}{(i+r)^{j+s+1}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(i+r-1)^{j+s+1}} \right] y - \sum_{k=1}^N \sum_{i=2}^{2N+1} \sum_{j=0}^i \sum_{r=1}^{i-1} \sum_{t=j}^i \sum_{s=0}^t A_{i-r,t-s}^{(k)} B_{rs}^{(N-k+1)} \\ &\quad \cdot \frac{(-1)^{t-j} t!}{j!} \left[ \frac{1}{i^{t-j+1}} - \frac{1}{(i-1)^{t-j+1}} \right] y^i \ln^j y + \alpha_{N+1} y (\ln y - \lambda) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{2N+1} \sum_{j=0}^i A_{ij}^{(N+1)} y^i \ln^j y \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \text{其中: } A_{i0}^{(N+1)} = & - \sum_{k=1}^N \sum_{t=1}^{2k-1} \sum_{j=0}^i \sum_{r=1}^{2N-2k+2} \sum_{s=0}^r A_{ij}^{(k)} B_{rs}^{(N-k+1)} (j+s)! (-1)^{j+s} \\ & \cdot \left[ \frac{\lambda-1}{(i+r)^{j+s+1}} + \frac{1}{(i+r-1)^{j+s+1}} \right] - \alpha_{n+1} \lambda \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$A_{i1}^{(N+1)} = \alpha_{n+1} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} A_{ij}^{(N+1)} = & - \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^{i-1} \sum_{t=j}^i \sum_{s=0}^t A_{i-r,t-s}^{(k)} B_{rs}^{(N-k+1)} \cdot \frac{(-1)^{t-j+t_1}}{j!} \left[ \frac{1}{i^{t-j+1}} - \frac{1}{(i-1)^{t-j+1}} \right] \\ & i=2, 3, \dots, 2N+1; j=0, 1, \dots, i \end{aligned} \quad (3.11)$$

同样, 由(3.2), (3.7)~(3.11)式可得方程:

$$s_{N+1}(y) = \sum_{i=1}^{2(N+1)} \sum_{j=0}^i B_{ij}^{(N+1)} y^i \ln^j y \quad (3.12)$$

成立. 这里:

$$\begin{aligned} B_{i0}^{(N+1)} = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{t=1}^{2k-1} \sum_{j=0}^i \sum_{r=1}^{2(N-k+2)-1} \sum_{s=0}^r A_{ij}^{(k)} A_{rs}^{(N-k+2)} (j+s)! (-1)^{j+s} \\ & \cdot \left[ \frac{\mu-1}{(i+r)^{j+s+1}} + \frac{1}{(i+r-1)^{j+s+1}} \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$B_{i1}^{(N+1)} = 0 \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} B_{ij}^{(N+1)} = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{r=1}^{i-1} \sum_{t=j}^i \sum_{s=0}^t A_{i-r,t-s}^{(k)} A_{rs}^{(N-k+2)} \frac{(-1)^{t-j+t_1}}{j!} \\ & \cdot \left[ \frac{1}{i^{t-j+1}} - \frac{1}{(i-1)^{t-j+1}} \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$i=2, 3, \dots, 2N+2; j=0, 1, \dots, i$$

因此, 我们得到式(3.5)和(3.6)对  $n=N+1$  成立. 依数学归纳法, 结论 1 对任意正整数  $n$  成立. 证毕

#### 四、摄动解的递推公式

在得到结论 1 后, 我们能得到关于摄动解中的待定函数和待定常数的递推公式. 由(3.1)~(3.6), 类似于(3.8)~(3.15), 有:

$$A_{i0}^{(1)} = -\lambda \alpha_i, \quad A_{i1}^{(1)} = \alpha_i \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned}
 B_{10}^{(n)} &= \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \sum_{i=1}^{2h-1} \sum_{j=0}^i \sum_{r=1}^{2n-2h+1} \sum_{s=0}^r A_{ij}^{(h)} A_{rs}^{(n-h+1)} (j+s)! (-1)^{j+s} \\
 &\quad \cdot \left[ \frac{\mu-1}{(i+r)^{j+s+1}} + \frac{1}{(i+r-1)^{j+s+1}} \right] \\
 B_{11}^{(n)} &= 0 \\
 B_{ij}^{(n)} &= -\frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \sum_{r=1}^{i-1} \sum_{t=j}^i \sum_{s=0}^t A_{i-r,t-s}^{(h)} A_{rs}^{(n-h+1)} \cdot \frac{(-1)^{t-j} \cdot t!}{j!} \\
 &\quad \cdot \left[ \frac{1}{i^{t-j+1}} - \frac{1}{(i-1)^{t-j+1}} \right] \\
 n &= 1, 2, \dots; \quad i = 2, 3, \dots, 2n; \quad j = 0, 1, \dots, i
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{和} \quad \bar{A}_{10}^{(n+1)} &= -\sum_{h=1}^n \sum_{i=1}^{2h-1} \sum_{j=0}^i \sum_{r=1}^{2n-2h+2} \sum_{s=0}^r A_{ij}^{(h)} B_{rs}^{(n-h+1)} (j+s)! (-1)^{j+s} \\
 &\quad \cdot \left[ \frac{\lambda-1}{(i+r)^{j+s+1}} + \frac{1}{(i+r-1)^{j+s+1}} \right] \\
 \bar{A}_{11}^{(n+1)} &= 0 \\
 \bar{A}_{ij}^{(n+1)} &= -\sum_{h=1}^n \sum_{r=1}^{i-1} \sum_{t=j}^i \sum_{s=0}^t A_{i-r,t-s}^{(h)} B_{rs}^{(n-h+1)} (j!)^{-1} t! (-1)^{t-j} \\
 &\quad \cdot \left[ \frac{1}{i^{t-j+1}} - \frac{1}{(i-1)^{t-j+1}} \right] \\
 n &= 1, 2, \dots; \quad i = 2, 3, \dots, 2n+1; \quad j = 0, 1, 2, \dots, i
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{且} \quad A_{10}^{(n+1)} &= \bar{A}_{10}^{(n+1)} - \alpha_{n+1} \lambda, \quad A_{11}^{(n+1)} = \bar{A}_{11}^{(n+1)} + \alpha_{n+1}, \quad A_{ij}^{(n+1)} = \bar{A}_{ij}^{(n+1)} \\
 n &= 1, 2, \dots; \quad i = 2, 3, \dots, 2n+1; \quad j = 0, 1, \dots, i
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

上述式子中,  $\lambda$ ,  $\mu$  和  $\nu$  是已知常数,  $\alpha_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) 则是依摄动参数的选取所确定的待定常数。

对于钱氏摄动解, 摄动参数  $\varepsilon$  取为中心挠度  $W_m$ , 即  $\varepsilon = W_m$ 。由于  $\varphi(y) = yW(y)$ , 于是有

$$W(y) = W_m + \int_0^y \frac{1}{\xi} \varphi(\xi) d\xi \tag{4.5}$$

由边界条件  $W(1) = 0$ , 得

$$W_m + \int_0^1 \frac{1}{\xi} \varphi(\xi) d\xi = 0 \tag{4.6}$$

将(2.4)代入(4.6)得:

$$W_m + \sum_{i=1}^{\infty} \left( \int_0^1 \frac{1}{\xi} \varphi_i(\xi) d\xi \right) \varepsilon^{2i-1} = 0 \tag{4.7}$$

当  $\varepsilon = W_m$  时, 则得:

$$1 + \int_0^1 \frac{1}{\xi} \varphi_1(\xi) d\xi = 0 \quad (4.8)$$

和 
$$\int_0^1 \frac{1}{\xi} \varphi_i(\xi) d\xi = 0 \quad (4.9)$$

将(3.3)代入(4.8)且将(3.5)、(4.3)和(4.4)代入(4.9)中, 则得 $\alpha_i$ 如下:

$$\alpha_1 = \frac{1}{1+\lambda} \quad (4.10)$$

和 
$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{1+\lambda} \sum_{i=1}^{2n+1} \sum_{j=0}^i \frac{(-1)^i \cdot j!}{i^{j+1}} A_{ij}^{(n+1)} \quad n=1, 2, \dots \quad (4.11)$$

于是, 由(4.1)、(4.10)、(4.11)和(4.2)~(4.4)式, 可用计算机求得钱氏摄动解. 我们已求得了 $\nu=0.3$ 时固定夹紧边界的钱氏解, 其第21阶( $n=11$ )的摄动解的刚度关系为

$$\begin{aligned} p = & W_m + 0.162974W_m^3 - 3.241711 \times 10^{-3}W_m^5 + 2.1216930 \times 10^{-4}W_m^7 \\ & - 1.6433487 \times 10^{-5}W_m^9 + 1.4183063 \times 10^{-6}W_m^{11} - 1.3164805 \\ & \times 10^{-7}W_m^{13} + 1.3678259 \times 10^{-8}W_m^{15} - 1.3023130 \times 10^{-9}W_m^{17} \\ & + 9.1084078 \times 10^{-11}W_m^{19} - 7.1332792 \times 10^{-12}W_m^{21} \end{aligned} \quad (4.12)$$

## 五、摄动解的适用区和渐近性

根据级数展开的收敛准则, 我们可得到关于摄动解收敛的结论.

**结论 2** 摄动解(2.4)~(2.6)收敛的条件是当且仅当

$$\varepsilon < \bar{W} = \min\{W_1, W_2, W_3\} \quad (5.1)$$

其中: 
$$W_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (5.2)$$

$$W_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{0 < y < 1} \left| \frac{\varphi_n(y)}{\varphi_{n+1}(y)} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (5.3)$$

$$W_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{0 < y < 1} \left| \frac{s_n(y)}{s_{n+1}(y)} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (5.4)$$

显然, 从理论上给出 $\bar{W}$ 的精确值是很困难的. 然而, 当较高阶的解求得时, 可由计算机求出其近似值. 也即: 设

$$W_1^{(n)} = \left| \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (5.5)$$

$$W_2^{(n)} = \left| \frac{\varphi_n(y)}{\varphi_{n+1}(y)} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (5.6)$$

$$W_3^{(n)} = \left| \frac{s_n(y)}{s_{n+1}(y)} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (5.7)$$

由 $W_1^{(n)}$ ,  $W_2^{(n)}$ 和 $W_3^{(n)}$ 随 $n$ 增加的变化趋势可得到 $\bar{W}$ 的近似值. 对 $\nu=0.3$ 以及固定夹紧边界, 钱氏摄动解的 $W_1^{(n)}$ ,  $W_2^{(n)}$ 和 $W_3^{(n)}$ 的计算值已列成表格(见表1, 表2和表3).

表 1

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$W_{n1}$	2.4770846	7.0904207	3.9086218	3.5930076	3.4040670	3.2622964	3.1023571	3.2408409	3.7812593	3.5739588

表 2

$n$	$W_{n2}$									
$\nu$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.05	12.588816	2.7580373	3.2914302	3.3102267	3.2548866	3.1914361	3.0860230	3.0648367	3.173441	2.5149090
0.15	8.6429529	4.7566853	4.4602165	4.2039061	4.0274129	3.9815943	4.4836464	7.2996202	11.360310	0.96529573
0.25	7.9274846	4.1315756	3.7709093	3.5430315	3.3945034	3.2954938	3.2229574	3.2360063	3.3024933	17.631744
0.35	8.6190805	3.8703146	3.5342648	3.3847101	3.2882454	3.2160687	3.1496982	3.1560161	3.1767986	3.5668168
0.45	10.606461	3.6205946	3.3116059	3.2634509	3.2146358	3.1617308	3.1027195	3.1122496	3.0854204	2.7950618
0.55	17.486624	2.6048152	3.0045211	3.1339781	3.1429799	3.1078815	3.0545762	3.0729127	2.9808161	2.3062608
0.65	18.559412	3.4937367	2.4516664	2.9676702	3.0602655	3.0448551	2.9872174	3.0220439	2.8592999	1.9159906
0.75	10.320645	3.7395297	0.51138371	2.7204165	2.9535148	2.9657450	2.8605912	2.9447594	2.7817059	1.6811995
0.85	7.8928794	8.9669161	3.9851274	2.2666560	2.7853518	2.8821983	2.5493581	2.6680031	3.2471080	1.241320
0.95	6.619337	7.8020234	2.2453743	0.71935850	2.4664938	3.3670754	1.9422070	2.1547594	4.2675042	1.9439174

表 3

$n$	$W_{n3}$									
$\nu$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.05	11.196807	4.1317830	3.7255809	3.4899395	3.3428649	3.2423782	3.1164117	3.1151047	3.2905803	2.7531109
0.15	10.567150	3.6593668	3.4765306	3.3589680	3.2689791	3.1949704	3.0801604	3.0702708	3.2165544	2.4951956
0.25	12.464025	3.232795	3.2757923	3.2565689	3.1815009	3.1541963	3.0375490	3.0272984	3.1825371	2.2708921
0.35	18.978077	2.4069722	3.0400500	3.1546869	3.1245904	3.1149860	2.9869123	2.9765530	3.1685314	2.0553145
0.45	26.934549	2.0907247	2.6970904	3.0385749	3.0622256	3.0738859	2.9173279	2.9100873	3.1837392	1.8466836
0.55	13.167807	6.2457867	2.0904241	2.8935437	2.9894769	3.0288467	2.8176353	2.8165958	3.2637179	1.6430010
0.65	9.8683853	29.305273	0.70216674	2.6954052	2.9484682	2.9792867	2.6608560	2.6781008	3.5156761	1.4331312
0.75	8.2147627	9.6755562	3.2418216	2.3920007	2.8499107	2.9378943	2.3836641	2.4804187	4.3815522	1.1645281
0.85	7.1822371	8.2040491	6.6517510	1.8262035	2.7186887	2.9692390	1.8810771	2.1730933	12.347130	0.51815259
0.95	6.4582825	7.6995339	15.598764	1.1286905	2.9710536	2.3354842	1.0529003	1.8937147	2.8689780	13.434687

## 六、结果分析

由钱氏摄动解(2.4)~(2.6)和(4.5)以及表1,2,3的结果,有:

1. 由表1~3,我们能发现:大多数 $W_1^{(n)}$ ,  $W_2^{(n)}$ 和 $W_3^{(n)}$ 的值位于3.0附近,只有少数值发生跳跃.因此,中心承受集中载荷的固定夹紧圆薄板大挠度问题的钱氏摄动解的适用域可能是 $W_m \leq 3.0$ .

2. 当 $W_m \leq 2.7$ 时,可得摄动解收敛;而 $W_m \geq 3.6$ ,可得到关于无量纲载荷 $p$ 的两个子序列,其中,一个沿正向单调增,另一个沿负向单调增.因此,摄动解在此域内不收敛.在 $2.8 \leq W_m \leq 3.5$ 内,需要求解高于21阶( $n=11$ )的解,才能判定摄动法的收敛性.

3. 当 $W_m \geq 3.6$ 时,由图1显然可见:第21阶摄动解出现下凹现象.因此,这种现象对于中心承受集中载荷圆薄板大挠度的卡门方程是不存在的.这在于对此种情形,解不收敛.

4. 依刚度关系(4.12)或刚度曲线(见图1),可得对 $W_m \leq 0.5$ ,线性解(1阶摄动解)代替问题的精确解产生的相对误差小于4.1%.

5. 由刚度关系(4.12),可见 $\alpha_n (n \geq 3)$ 比 $\alpha_1, \alpha_2$ 小得多.因此,3阶( $n=2$ )摄动解代替问题的精确解在 $W_m \leq 2.0$ 内是可行的.因为其相对误差小于3%,在 $2.0 < W_m \leq 2.7$ 内,随

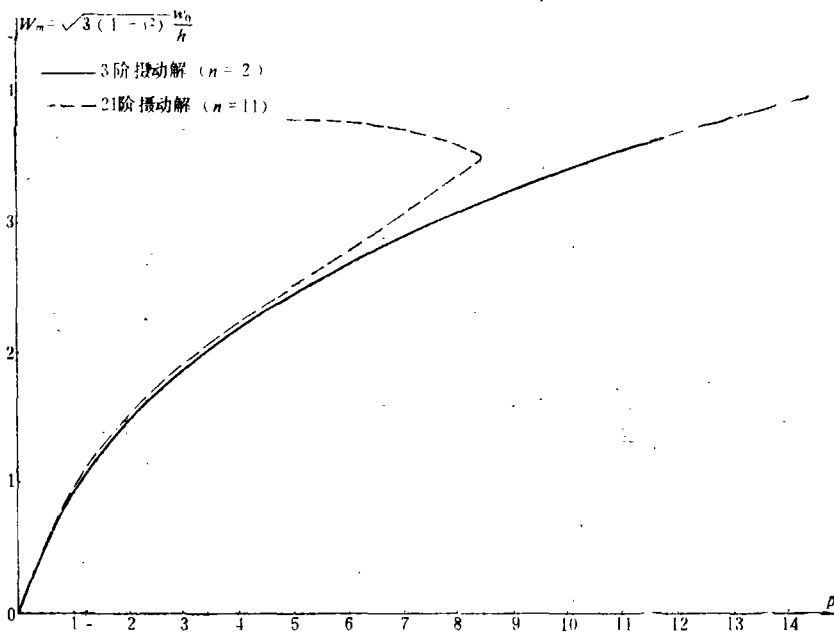


图 1

着 $W_m$ 的增大,必须求解更高阶的解(高于 $n=2$ ).这在于用3阶解代替时,其相对误差已达6%.



## 参 考 文 献

- [ 1 ] Chien Wei-zang, Large deflection of a circular clamped plate under uniform pressure, *Chinese J. Phys.*, 7 (1947), 102—113.
- [ 2 ] 钱伟长、叶开沅, 圆板大挠度问题, 物理学报, 10, 3 (1954), 209—238.
- [ 3 ] 黄择言, 弹性圆薄板在均布边缘力矩作用下的弯曲, 物理学报, 12, 6 (1956), 597—606.
- [ 4 ] 叶开沅, 边缘载荷下环形板的大挠度问题, 物理学报, 9, 2 (1953), 110—129.
- [ 5 ] 钱伟长、林鸿荪、胡海昌、叶开沅, 《弹性圆薄板大挠度问题》, 科学出版社 (1954), 49—55.
- [ 6 ] Nash, W. A. and I. D. Cooly, Large deflection of a clamped elliptical plate subjected to uniform pressure, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 26, 2 (1959), 291—293.
- [ 7 ] Chien Wei-zang and Yeh Kai-yuan, Large deflection of a rectangular plate under uniform pressure, *Proc. Math. Intern. Congr. Appl. Mech.*, Brussels, 6 (1967), 403—409.
- [ 8 ] Schmidt, R. and D. A. DaDeppo, A new approach to the analysis of shells, plates and membranes with finite deflection, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 9, 5 (1974), 409—419.
- [ 9 ] DaDeppo, D. A. and R. Schmidt, Moderately large deflections of a loosing clamped circular plate under a uniformly distributed load, *Indus. Math.*, 25, 1 (1975), 17—28.
- [ 10 ] 陈山林、光积昌, 圆薄板大挠度问题的摄动参数, 应用数学和力学, 2, 1 (1981), 131—144.
- [ 11 ] 陈山林, 圆板大挠度的钱伟长解及其渐近特性, 应用数学和力学, 3, 4 (1982), 513.

## On Solving High-Order Solutions of Chien's Perturbation Method to Study Convergence by Computer

Yeh Kai-yuan

(Lanzhou University, Lanzhou)

Zhou You-he

(Huazhong University of Science and Technology, Wuhan)

### Abstract

In this paper, we have obtained the analytical formula of arbitrary  $n$ -th order perturbation solution whose perturbation parameter is central deflection for circular thin plate under a concentrated load by means of its integral equation. All unknown constants of every perturbation solution can be determined by computer. Hence higher order perturbation solution is obtained. Based on the solution of higher order perturbation, asymptotical property and suitable interval of Chien's perturbation method are also discussed.