

复合材料离散加筋曲板在压剪联合 载荷作用下的屈曲分析

童贤鑫 B. 盖尔* K. 沃厄尔*

(航空工业部结构力学研究所) (西德宇航院结构力学研究所)

(薛大为推荐, 1985年5月9日收到)

摘 要

给出了一种复合材料加筋曲板压剪下的屈曲分析方法, 分析中采用“板条有限元素法”。文中针对复位移函数提出了一种改进方案, 使运算可在实数范围内进行; 还介绍了一种满足各类典型边界条件的简便处理方法。

计算了一些实例, 与现存的解符合较好。

符 号

A_{ij} 迭层板的拉压刚度($i, j=1, 2, 6$)	θ 板纵侧边转角
B_{ij} 迭层板的拉(压)一弯耦合刚度($i, j=1, 2, 6$)	λ 屈曲半波长
D_{ij} 迭层板的弯曲刚度($i, j=1, 2, 6$)	ν_{12}, ν_{21} 薄层的泊桑比
E_{11}, E_{22} 薄层沿纤维和垂直纤维方向弹性模量	b_0 曲板条展开宽度
G_{12} 薄层的剪切模量	脚 标
M_x, M_y, M_{xy} 迭层板弯(扭)合力矩	j 相应 α_j 的特征根的序号
N_x, N_y, N_{xy} 迭层板合力	$+$ 指沿 $y=+b_0/2$ 侧边的量
$\bar{N}_x, \bar{N}_y, \bar{N}_{xy}$ 作用外力, 以压为正	$-$ 指沿 $y=-b_0/2$ 侧边的量
Q_y 板的横向剪力	r 或上部带 $-$ 者指与实部相关的量
R 板参考面的曲率半径	m 或上部带 $=$ 者指与虚部相关的量
u, v, w 板参考面的屈曲位移	下标前带逗号“,”者, 表示对该下标的偏微分;
U_j, V_j, W_j 位移待定系数	s 指相对于板条元局部坐标系的量。
α_j, β 屈曲位移参数	

一、引 言

复合材料加筋板的屈曲分析是航宇结构设计中的重要课题。有不少文献采用‘板条有限元素法’, 分析此类问题^[2,3,4,6,7]文献[3]分析了加筋平板的轴压屈曲, 其后作者又将这一工作推广到加筋曲板在双轴压缩下的屈曲^[4], 以及压剪组合下光曲板的屈曲^[2]。在这种分析

* B. 盖尔为西德宇航院 (DFVLR) 结构力学所分析力学研究室主任, 博士; K. 沃厄尔也为该研究所博士。

方法中, 将结构划分成一系列板条, 沿其侧边的广义力和位移用解析法导出, 而结构稳定判别式是按有限元的处理方法建立的。这样, 解析法和有限元素法的优点都可以利用。

本文把文献[2]的工作推广到针对复合材料加筋曲板承受面内压剪组合作用情况, 并对所引用的复数型位移函数进行了化简, 提出了一个改进方案, 把复特征值问题转化成了实特征值问题, 使求解十分简便, 提高了解题效率。另外, 还给出了一种处理边界条件的简易办法, 简化了编程和计算。

一些数值例子的计算结果与现存的解符合得较好, 表明此法是有效的。

二、分析 方 法

2.1 一个典型板条元的分析

图1为一复合材料的曲迭层板条, 承受压剪面内载荷。分析中采用了如下假设和限制:

- 迭层板的每一薄层都处于平面应力状态, 沿纤维方向是正交各向异性的;

- 仅考虑对称和反对称铺层的迭层板;

- 对于采用所谓平衡设计的迭层板, 可认为

$$A_{10} = A_{20} = 0, \quad B_{10} = B_{20} = 0;$$

- 在推导应变-位移关系和平衡方程中, 采用 Donnell 简化假设。

运用前三条假设, 迭层板的弯扭与拉剪耦合刚度消失, 其 Donnell 型的平衡微分方程可写成:

$$\left. \begin{aligned} A_{11}u_{,xx} + A_{66}u_{,yy} + (A_{12} + A_{66})v_{,xy} - \frac{A_{12}}{R}w_{,x} &= 0 \\ A_{22}v_{,yy} + A_{66}v_{,xx} + (A_{12} + A_{66})u_{,xy} - \frac{A_{22}}{R}w_{,y} &= 0 \\ D_{11}w_{,xxxx} + 4D_{10}w_{,xxx} + 2(D_{12} + 2D_{66})w_{,xxyy} + 4D_{20}w_{,xyyy} \\ + D_{22}w_{,yyyy} - \frac{A_{12}}{R}u_{,x} - \frac{A_{22}}{R}v_{,y} + \frac{A_{22}}{R^2}w + \bar{N}_x w_{,xx} + \bar{N}_y w_{,yy} + 2\bar{N}_{xy} w_{,xy} &= 0 \end{aligned} \right\} (2.1)$$

直接求解方程(2.1)非常困难, 一般可采用一种反算法, 即先假设一组恰当的屈曲位移函数。为考虑剪切屈曲, 往往采用复数型位移函数, 早在1930年, E. Seydel 提出了如下形式的位移函数(文献[1])

$$w = f(y) \exp\left[\frac{2ix}{b}x\right] \quad (i = \sqrt{-1})$$

求得了无限长板剪切屈曲的解析解。近来, A. V. Viswanathan, M. Tamekuni 和 L. L. Baker^[2,3,4]等把这种函数形式进一步引伸, 分析了复材曲板在压剪组合作用下的屈曲。

在这篇报告中, 我们采用的位移函数为

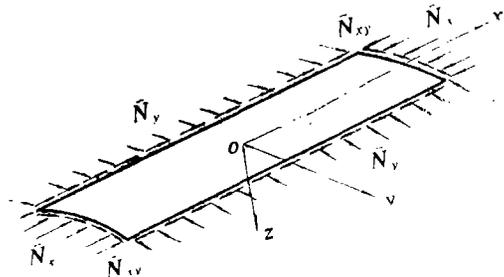


图1 长曲板条受面内组合载荷

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_{j=1}^8 W_j \exp[i\alpha_j y] \exp[i\beta x] \\ v &= \sum_{j=1}^8 V_j \exp[i\alpha_j y] \exp[i\beta x] \\ u &= \sum_{j=1}^8 iU_j \exp[i\alpha_j y] \exp[i\beta x] \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

其中, $i = \sqrt{-1}$, $\beta = \pi/\lambda$, λ 为沿 x 轴的屈曲半波长。

把 (2.2) 式代入 (2.1) 式, 可得到 α_j 的特征根方程, 求解 α_j , 则确定了满足曲板内部平衡条件的位移表达式。

按一般力学方法, 沿侧边的广义力和广义位移可写成

$$w_s = w + y_0 \theta, \quad \theta_s = \theta = w_{,y}, \quad v_s = v - z_0 \theta, \quad u_s = u - z_0 w_{,x} - y_0 v_{,x} \quad (2.3)$$

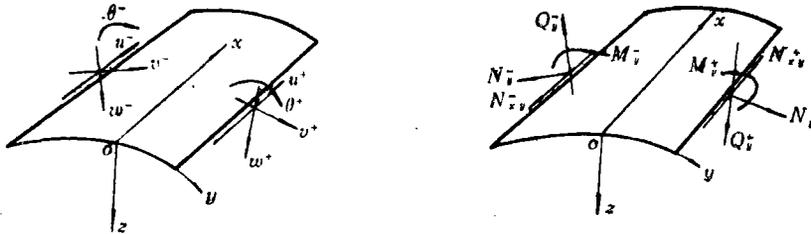


图 2 曲板侧边的广义力和位移

和

$$\left. \begin{aligned} Q_{ys} &= Q_y - z_0 N_{xy,x} - \bar{N}_{xy} w_{,x} - \bar{N}_y w_{,y} \\ M_{ys} &= M_y + y_0 Q_y - z_0 N_y \\ N_{ys} &= N_y - y_0 N_{xy,x} + \bar{N}_{xy} u_{,y} \\ N_{xys} &= N_{xy} - \bar{N}_y u_{,y} + \bar{N}_{xy} \left(v_{,y} - \frac{w}{R} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

这里 y_0, z_0 为侧边距公共交线的偏心, 带 s 者表示沿公共交线处的量 (图 3)。

再利用 $Q_y = M_{y,y} + 2M_{xy,x}$, 曲板中面上的力可写成为

$$\left. \begin{aligned} Q_y &= -2D_{16} w_{,xxx} - (D_{12} + 4D_{66}) w_{,xxy} - 4D_{26} w_{,xyy} - D_{22} w_{,yyy} \\ M_y &= -D_{12} w_{,xx} - D_{22} w_{,yy} - 2D_{26} w_{,xy} \\ N_y &= A_{12} u_{,x} + A_{22} \left(v_{,y} - \frac{w}{R} \right) \\ N_{xy} &= A_{66} (u_{,y} + v_{,x}) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

2.2 对位移函数的讨论及简化

(2.2) 式表明, 每一板条将含有 24 个复位移待定参数, 对于由多个板条组成的结构, 其稳定判别式的阶数将会很高, 而且是复数型的, 使求解十分复杂, 故作了如下化简:

因为待定系数是相互独立的, 故 $j=1 \sim 8$ 中任一组位移 w_j, v_j, u_j 都应满足平衡微分方程 (2.1), 据此, 可以导出 V_j 与 W_j, U_j 与 W_j 的相关系数, 把位移待定系数减少到 8 个。

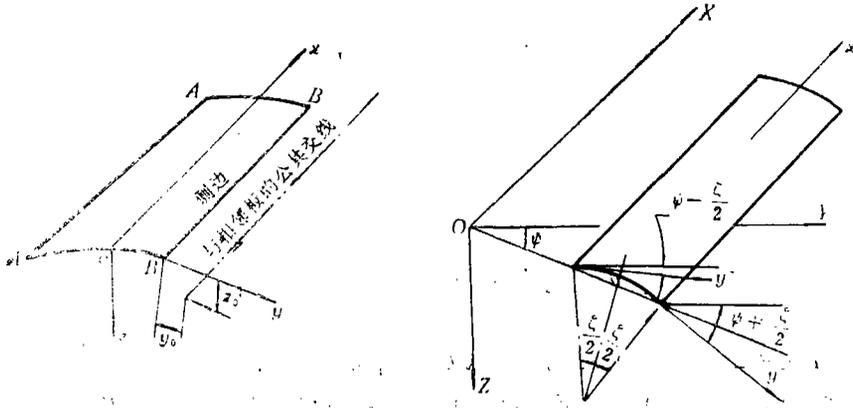


图 3 板的侧边偏心和偏角

· α_j 的特征方程为实系数的八次多项式, 因此 α_j 必然是实根或共轭复根, 据此, 可以进一步简化位移函数。找到了从实部到虚部的转化规律, 最终把刚度矩阵转化成了实数形式。

2.2.1 面内位移与横向位移的相关系数

把第 j 项的位移 w_j, v_j, u_j 代入平衡方程 (2.1) 的前两式

$$(A_{11}\beta^2 + A_{00}\alpha_j^2)U_{j,i} + (A_{12} + A_{00})\alpha_j\beta V_{j,i} + \frac{A_{12}}{R}\beta W_{j,i} = 0$$

$$(A_{12} + A_{00})\alpha_j\beta U_{j,i} + (A_{00}\beta^2 + A_{22}\alpha_j^2)V_{j,i} + \frac{A_{22}}{R}\alpha_j W_{j,i} = 0$$

可得

$$U_j = \frac{\Phi_j}{\Delta_j} W_j, \quad V_j = \frac{\Theta_j}{\Delta_j} W_j$$

这里, $W_j, U_j, V_j, \Phi_j, \Theta_j$ 和 Δ_j 均为复数。令 $\bar{W}_j, \bar{U}_j, \bar{V}_j, \bar{\Phi}_j, \bar{\Theta}_j$ 和 $\bar{\Delta}_j$ 为其实部, $\bar{W}_j, \bar{U}_j, \bar{V}_j, \bar{\Phi}_j, \bar{\Theta}_j$ 和 $\bar{\Delta}_j$ 为其虚部。

α_j, α_{j+1} 为共轭复根时, 以 r 和 m 分别表示根的实部和虚部。 U_j 和 V_j 可以 W_j 表示为:

$\alpha_j = r + mi$ 时

$$\bar{U}_j = a\bar{W}_j + b\bar{W}_j, \quad \bar{U}_j = -a\bar{W}_j + b\bar{W}_j, \quad \bar{V}_j = c\bar{W}_j - d\bar{W}_j, \quad \bar{V}_j = c\bar{W}_j + d\bar{W}_j \quad (2.6)$$

$\alpha_{j+1} = r - mi$ 时

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_{j+1} &= -a\bar{W}_{j+1} + b\bar{W}_{j+1}, & \bar{U}_{j+1} &= a\bar{W}_{j+1} + b\bar{W}_{j+1} \\ \bar{V}_{j+1} &= -c\bar{W}_{j+1} - d\bar{W}_{j+1}, & \bar{V}_{j+1} &= -c\bar{W}_{j+1} + d\bar{W}_{j+1} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

其中 a, b, c, d 可称位移相关系数。

$$a = \frac{\bar{\Phi}_j\bar{\Delta}_j - \Delta_j\bar{\Phi}_j}{\Delta_j^2 + \bar{\Delta}_j^2}, \quad b = \frac{\bar{\Phi}_j\Delta_j + \bar{\Delta}_j\bar{\Phi}_j}{\Delta_j^2 + \bar{\Delta}_j^2}$$

$$c = \frac{\bar{\Theta}_j\bar{\Delta}_j - \Delta_j\bar{\Theta}_j}{\Delta_j^2 + \bar{\Delta}_j^2}, \quad d = \frac{\bar{\Theta}_j\Delta_j + \bar{\Delta}_j\bar{\Theta}_j}{\Delta_j^2 + \bar{\Delta}_j^2}$$

当 $\alpha_j = r$ 实根时

$$\bar{U}_j = b_1\bar{W}_j, \quad \bar{U}_j = b_1\bar{W}_j, \quad \bar{V}_j = -d_1\bar{W}_j, \quad \bar{V}_j = d_1\bar{W}_j \quad (2.8)$$

其中位移相关系数为

$$b_1 = \frac{\bar{\Phi}_j}{\bar{A}_j}, \quad d_1 = \frac{\bar{\Theta}_j}{\bar{A}_j}$$

2.2.2 位移函数的化简

前已指出, α_j 只可能为实根和共轭复根, 针对这两种情况, 讨论位移函数的简化。

(1) 共轭复根情况

$$\alpha_j = r + mi, \quad \alpha_{j+1} = r - mi$$

(2.2) 式中对应 α_j 的第 j 项位移 w 可简化为:

$$\begin{aligned} w_j &= W_j \exp[i\alpha_j y] \exp[i\beta x] = W_j \exp[i(r+mi)y] \exp[i\beta x] \\ &= W_j \exp[-my] \exp[i(ry + \beta x)] \end{aligned}$$

令 $\varphi = ry + \beta x$, 并利用欧拉方程

$$\begin{aligned} w_j &= W_j \exp[-my] (\cos\varphi + i\sin\varphi) = (\bar{W}_j + i\bar{W}'_j) \exp[-my] (\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ w_j &= (\bar{W}_j \cos\varphi - \bar{W}'_j \sin\varphi) \exp[-my] + i(\bar{W}'_j \sin\varphi + \bar{W}_j \cos\varphi) \exp[-my] \end{aligned}$$

相似地

$$\begin{aligned} v_j &= (\bar{V}_j \cos\varphi - \bar{V}'_j \sin\varphi) \exp[-my] + i(\bar{V}'_j \sin\varphi + \bar{V}_j \cos\varphi) \exp[-my] \\ u_j &= -(\bar{U}_j \sin\varphi + \bar{U}'_j \cos\varphi) \exp[-my] + i(\bar{U}'_j \cos\varphi - \bar{U}_j \sin\varphi) \exp[-my] \end{aligned}$$

第 $j+1$ 项(对应 α_{j+1})的 w_{j+1} , v_{j+1} 和 u_{j+1} 中, 仅需以 $-m$ 代 m 。这两项的实部和可简化成

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_j + \bar{w}_{j+1} &= B_1(cc) + B_2(cs) + B_3(sc) + B_4(ss) \\ \bar{v}_j + \bar{v}_{j+1} &= -B_1(c(sc) + d(cs)) - B_2(c(ss) - d(cc)) - B_3(c(cc) + d(ss)) \\ &\quad - B_4(c(cs) - d(sc)) \\ \bar{u}_j + \bar{u}_{j+1} &= -B_1(a(sc) + b(cs)) - B_2(a(ss) - b(cc)) - B_3(a(cc) - b(ss)) \\ &\quad - B_4(a(cs) - b(sc)) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

虚部和可简化成

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_j + \bar{w}_{j+1} &= B_1(cs) - B_2(cc) + B_3(ss) - B_4(sc) \\ \bar{v}_j + \bar{v}_{j+1} &= -B_1(c(ss) - d(cc)) + B_2(c(sc) + d(cs)) \\ &\quad - B_3(c(cs) - d(sc)) + B_4(c(cc) + d(ss)) \\ \bar{u}_j + \bar{u}_{j+1} &= -B_1(a(ss) - b(cc)) + B_2(a(sc) + b(cs)) \\ &\quad - B_3(a(cs) - b(sc)) + B_4(a(cc) + b(ss)) \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

其中 (cc), (cs), (ss), (sc) 分别代表 $\text{chmy} \cos ry$, $\text{chmy} \sin ry$, $\text{shmy} \sin ry$, $\text{shmy} \cos ry$ 。

$B_1 \sim B_4$ 为综合的位移待定系数

$$\begin{aligned} B_1 &= (\bar{W}_j + \bar{W}_{j+1}) \cos \beta x - (\bar{W}'_j + \bar{W}'_{j+1}) \sin \beta x \\ B_2 &= -(\bar{W}_j + \bar{W}_{j+1}) \sin \beta x - (\bar{W}'_j + \bar{W}'_{j+1}) \cos \beta x \\ B_3 &= -(\bar{W}_j - \bar{W}_{j+1}) \cos \beta x - (\bar{W}'_j - \bar{W}'_{j+1}) \sin \beta x \\ B_4 &= (\bar{W}_j - \bar{W}_{j+1}) \sin \beta x + (\bar{W}'_j - \bar{W}'_{j+1}) \cos \beta x \end{aligned}$$

(2) 实根情况

$$\alpha_j = r$$

其对应项的位移可简化成

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_j &= B_{10} \cos ry + B_{20} \sin ry, \quad \bar{u}_j = (-B_{10} \sin ry + B_{20} \cos ry) b_1 \\ \bar{v}_j &= (-B_{10} \sin ry + B_{20} \cos ry) d_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_j &= B_{10} \sin ry - B_{20} \cos ry, \quad \bar{u}_j = (B_{10} \cos ry + B_{20} \sin ry) b_1 \\ \bar{v}_j &= (B_{10} \cos ry + B_{20} \sin ry) d_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

综合的位移待定系数为

$$B_{10} = \bar{W}_j \cos \beta x - \bar{W}_j \sin \beta x, \quad B_{20} = -\bar{W}_j \sin \beta x - \bar{W}_j \cos \beta x$$

可以看出, 无论是实根和共轭复根情况, 从实部到虚部时, $\cos ry$ 和 $\sin ry$ 分别变成了 $\sin ry$ 和 $-\cos ry$.

2.2.3 曲板元的刚度矩阵

把前面简化了的位移表达式代入(2.3)~(2.5)式, 沿板的侧边的广义位移和广义力可以矩阵形式简写成.

$$\{d\} = [X_0] \{W\}, \quad \{f\} = [Y_0] \{W\} \quad (2.13)$$

其中

$$\{d\} = (d_r^- \quad d_m^- \quad d_r^+ \quad d_m^+)^T, \quad \{f\} = (f_r^- \quad f_m^- \quad f_r^+ \quad f_m^+)^T$$

上标‘+’和‘-’分别指沿 $y = +b_0/2$ 和 $y = -b_0/2$ 边的量, ‘r’和‘m’分别表示实部和虚部. 即

$$\begin{aligned} \{d\} &= [d_r^- \quad d_m^- \quad d_r^+ \quad d_m^+]^T \\ &= [\bar{w}^- \quad \bar{\theta}^- \quad \bar{v}^- \quad \bar{u}^- \quad \bar{w}^- \quad \bar{\theta}^- \quad \bar{v}^- \quad \bar{u}^- \quad \bar{w}^+ \quad \bar{\theta}^+ \quad \bar{v}^+ \quad \bar{u}^+ \quad \bar{w}^+ \quad \bar{\theta}^+ \quad \bar{v}^+ \quad \bar{u}^+]^T \\ \{f\} &= [f_r^- \quad f_m^- \quad f_r^+ \quad f_m^+]^T \\ &= [\bar{Q}^- \quad \bar{M}^- \quad \bar{N}^- \quad \bar{N}_z^-, \quad \bar{Q}^- \quad \bar{M}^- \quad \bar{N}^- \quad \bar{N}_z^-, \quad \bar{Q}^+ \quad \bar{M}^+ \quad \bar{N}^+ \quad \bar{N}_z^+, \quad \bar{Q}^+ \quad \bar{M}^+ \quad \bar{N}^+ \quad \bar{N}_z^+]^T \end{aligned}$$

$\{W\}$ 为综合位移待定系数

$$\{W\} = [B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad \dots \quad B_{16}]^T$$

$[X_0]$, $[Y_0]$ 可按 α_j 根的类型, 由前述相应公式导出.

为分析一个结构, 还必须统一坐标系.

如图 3 所示, XYZ 为结构总体坐标系, xyz 为板的局部坐标系, 从 Y 到 y 的交角 ψ 以顺时针方向为正, 坐标转换矩阵为

$$\begin{aligned} [T] &= \begin{bmatrix} t^- & & & \\ & t^- & & \\ & & t^+ & \\ & & & t^+ \end{bmatrix}, \quad [t^-] = \begin{bmatrix} \cos \phi^- & 0 & \sin \phi^- & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \phi^- & 0 & \cos \phi^- & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [t^+] &= \begin{bmatrix} \cos \phi^+ & 0 & \sin \phi^+ & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \phi^+ & 0 & \cos \phi^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$[t^-]$ 为 $y = -b_0/2$ 边的转换矩阵, $\phi^- = \psi - \xi/2$, $[t^+]$ 为 $y = b_0/2$ 边的转换矩阵, $\phi^+ = \psi + \xi/2$.

转换到总体坐标系里的广义位移和广义力可写成

$$\{D\} = [T] \{d\} = [T][X_0] \{W\} = [X] \{W\}, \quad \{F\} = [T] \{f\} = [T][Y_0] \{W\} = [Y] \{W\} \quad (2.14)$$

从而可得

$$\{F\} = [S] \{D\} \quad (2.15)$$

其中 $[S] = [Y][X]^{-1}$ 可称曲板元的刚度矩阵.

为以后分析便利, (2.15) 式可改写成如下形式

$$\begin{aligned} \text{令} \quad \{D\} &= (d^- \quad d^+)^T, \quad \{F\} = (f^- \quad f^+)^T, \quad [S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \\ \text{则} \quad \{f^-\} &= [S_{11}] \{d^-\} + [S_{12}] \{d^+\}, \quad \{f^+\} = [S_{21}] \{d^-\} + [S_{22}] \{d^+\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

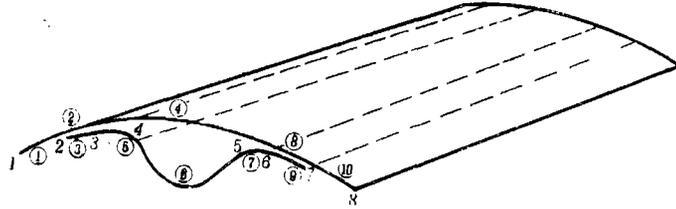


图 4 复材加筋曲板(例)

(2.17)式中 $\{D_j\}$ ($j=1\sim 10$)表示每个板条左右边的广义位移, 而(2.18)式中 $\{d_k\}$ ($k=1\sim 8$)表示每个公共交线处的广义位移。

屈曲时, $\{d_k\}$ 的非零解条件要求(2.18)式(即 $[\text{Det}]\{d_k\}=0$)前面的矩阵行列式的值为零(即 $|\text{Det}|=0$), 故可称为稳定判别式。

2.3.2 对各种边界条件的处理

(2.18)式前面的矩阵中, 带‘*’的 S_{ij} 表示处于结构边界的板条刚度系数, 应该考虑支持条件加以修正。对于几种典型的边界条件的处理方法如下。

(1) 简支边

$$w=u=M_y=N_y=0$$

沿侧边的力和位移可写成

$$\{F\}^*=(Q_y M_y N_y N_{xy})^T, \{D\}^*=(w \theta v u)^T$$

因 $M_y=N_y=0$, 则需保持 S_{ij}^* 中相应的第二、三行, 而 $w=u=0$, 要求置相应 w, u 的行、列处的元素为1, 其余第一、四行中元素为零。结果, 以消去 S_{ij}^* 中第一、四行和列的方法, 即可满足上述简支条件。

(2) 固支边

一般有两种固支方法:

$$(a) w=\theta=u=N_y=0, \quad (b) w=\theta=v=N_{xy}=0$$

对于(a)情况, 应消去 S_{ij}^* 中第一、二、四行列; 对于(b)情况, 应消去 S_{ij}^* 中第一、二、三行和列。

(3) 自由边

$$Q_y=M_y=N_y=N_{xy}=0$$

则应保持 S_{ij}^* 中全部行和列。

经过上述边界条件处理后, 结构的稳定判别式可写成

$$|\text{Det}|=0$$

2.3.3 解法

稳定判别式中的元素是作用外载和屈曲半波长的超越函数, 故不能按典型特征值问题求解, 一般采用逐步渐近法。即假设一组屈曲半波长, 求出每个屈曲半波长下的临界载荷, 选取其中最小值作为该结构的屈曲载荷。

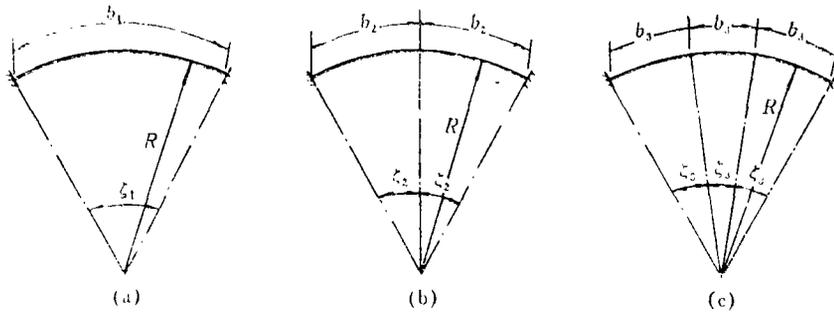
三、算 例

到目前为止, 还未见到关于复合材料加筋曲板在压剪组合载荷作用下屈曲分析的资料, 以及公开发表的试验数据, 因此, 只能用一些简单的有现存解的算例考核这种分析方法。

3.1 在轴向压缩、横向压缩和剪切载荷组合作用下的复合材料曲板

此例取自文献[2],如图5所示,侧边为固支($w=\theta=u=N_y=0$),对称铺层 $[0^\circ/90^\circ/+45^\circ/-45^\circ]$,薄层厚0.014cm,碳/环氧材料,性能为 $E_{11}=20.69 \times 10^9 \text{N/cm}^2$, $E_{22}=1.860 \times 10^9 \text{N/cm}^2$, $G_{12}=0.480 \times 10^9 \text{N/cm}^2$, $\nu_{12}=0.21$, $\nu_{21}=0.0189$ 。几何尺寸示于图5(a)。

分别计算了轴压 \bar{N}_x ,剪切 \bar{N}_{xy} ,压剪组合 $\bar{N}_x+\bar{N}_{xy}$,以及 $\bar{N}_x+\bar{N}_y+\bar{N}_{xy}$ 等载荷情况。采用本文方法的计算结果和文献[2]的数据均列于表1,可以看出都比较接近。



$b_1=25.60\text{cm}$, $R=58.53\text{cm}$
 $\zeta_1=25.06^\circ$, $\bar{r}=0.112\text{cm}$

(理想化为两个板条元)
 $b_2=17.80\text{cm}$, $R=58.53\text{cm}$
 $\zeta_2=12.53^\circ$, $\bar{r}=0.112\text{cm}$

(理想化为三个板条元)
 $b_3=8.53\text{cm}$, $R=58.53\text{cm}$
 $\zeta_3=8.35^\circ$, $\bar{r}=0.112\text{cm}$

图5 曲迭层板剖面尺寸

3.2 由两个、三个板条组成的复合材料曲板受压剪组合载荷

将前面算例的曲板划分成两个和三个板条元。(图5(b)和(c))计算结果列于表2,可以看出,也与文献[2]的数据比较接近。

表1 例3.1的计算结果与比较

载荷情况与屈曲半波长	N_x		N_{xy}		N_x+N_{xy}		$N_x+N_y+N_{xy}$	
	\bar{N}_x	λ	\bar{N}_{xy}	λ	$\bar{N}_x=\bar{N}_{xy}$	λ	$\bar{N}_x=\bar{N}_y=\bar{N}_{xy}$	λ
本分析方法	951.0	7.0	350.2	20.0	295.0	20.0	45.2	500
文献[2]数据	971.5	7.68	394.3	24.0	319.4	18.4	56.2	507

* 单位: 载荷——N/cm; 波长——cm

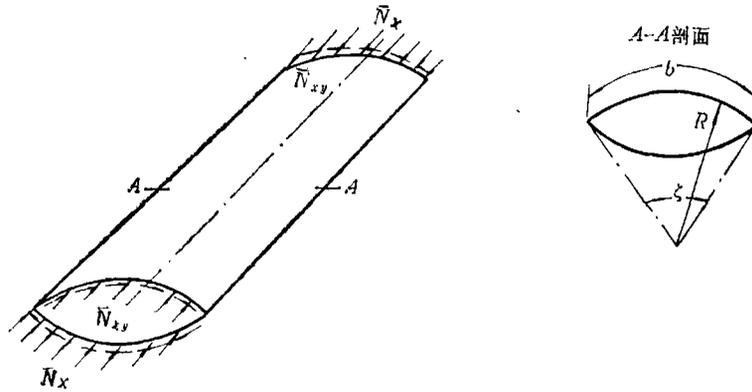
表2 例3.2的计算结果与比较

载荷情况	\bar{N}_x	\bar{N}_{xy}	$\bar{N}_x=\bar{N}_{xy}$
用两板元计算	950.6	360.3	288.3
用三板元计算	966.9	352.8	280.2
文献[2]数据	971.5	394.3	319.4

3.3 由两个曲板组成的一闭剖面壳

其横剖面示于图6,每个曲板为反对称铺层 $[+45^\circ/-45^\circ/+45^\circ/-45^\circ]$,薄层厚度和

材料性能均同于例一，几何尺寸示于图 6。计算结果列于表 3，与之比较的数据是将两侧边看成简支得到的。



$$b=25.52\text{cm}, R=76.2\text{cm}, \zeta=19.19^\circ, \bar{t}=0.056\text{cm}$$

图 6 复合材料组合迭层壳

表 3 例 3.3 的计算结果与比较

载荷情况	\bar{N}_x	\bar{N}_{xy}	$\bar{N}_x = \bar{N}_{xy}$
本分析方法	70.0	20.1	18.0
文献[2]数据	80.6	22.9	19.8

四、小 结

本文采用有限条法，给出了复合材料加筋曲板在压剪组合载荷作用下的屈曲分析方法。在目前公开发表的文献中，文献[4]只考虑了双向压缩载荷，文献[2]只考虑了一个光曲板受压剪组合载荷的情况。

针对复位移函数，提出了一种改进方案，导出了面内位移和横向位移间的相关系数，对位移表达式进行了化简，找到了实部和虚部的转换规律，把稳定判别式转化成实数形式，使求解在实数范围内进行。物理意义明确，计算收敛快。

对各种典型的边界条件，给出了十分简便的处理方法，大大简化了计算和编程工作。

编制了一个小型通用程序，适于求解各种薄壁剖面加筋的曲板在压剪载荷下的屈曲问题。通过几个算例的考核，表明这种分析方法是可行的。

由于缺乏其它现存的解法和试验数据的比较，使得对各类复杂结构的考核工作十分困难。尚需在工程实践中进一步验证。

本文是作者在西德宇航院工作的小结。

参 考 文 献

- [1] Seydel, E., Beitrag zur Frags des Ausbeulens von Versteiften Platten bei Schubbeanspruchung, *DVL-Bericht*, Luftfahrtforschung, 8, 3 (1930). (Лехницкий С. Г., *Анизотропные Пластинки*, §104)
- [2] Viswanathan, A. V., M. Tamkuni and L. L. Baker, Elastic stability of laminated, flat and curved, long rectangular plates subjected to combined inplane loads, NASA CR-2330, June (1974).
- [3] Viswanathan, A. V., Soong Tsai-chen and R. E. Miller, Jr., Buckling analysis for axially compressed flat plates, structural sections, and stiffened plates reinforced with laminated composites, NASA CR-1887, Nov. (1971).
- [4] Viswanathan, A. V. and M. Tamekuni, Elastic buckling analysis for composite stiffened panels and other structures subjected to biaxial inplane loads, NASA CR-2216, Sep. (1973).
- [5] Geier, B., Introduction to the mechanics of composite laminates, IB 131-82/12 (DFVLR).
- [6] Fan, S. F., B. Geier, K. Rohwer and D. C. Liu, Stability of layered anisotropic cylindrical shells under combined loading, IB 131-83 (DFVLR).
- [7] 童贤鑫, 复合材料加筋迭层板的轴压稳定性分析, HJB84016, 中国航空科技文献.

Buckling Analysis of Discretely Stiffened Composite Curved Panels under Compression and Shear

X. X. Tong

(*Institute for Structural Mechanics of CAE, Beijing*)

B. Geier K. Rohwer

(*Institute for Structural Mechanics of DFVLR, West Germany*)

Abstract

An analytical method for the buckling of discretely thin-wall stiffened composite curved panels under compression and shear is presented by use of finite strip-element method.

In the report a simplified scheme for complex displacement functions is developed. It enables that computation to be performed in real number algebra easily. And a Simple and easy way to satisfy the boundary conditions is introduced.

Numerical results are given and are in good agreement with available data.