应用数学和力学，第7卷第4期（1986年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

消振器的数学原理*

金均　卢亭鹤　杭永珍

（上海师范大学数学系，1985年1月15日收到）

摘　要

在工程技术中往往采用消振器来消除自激振荡，使设备或机器不受损坏。本文给出了一个消振器的数学模式

$$\ddot{x}_1+\varphi(\dot{x}_1)+k_1(x_1-x_2)=0,\quad \ddot{x}_2+c\dot{x}_1+k_2(x_2-x_1)=0 \tag{*}$$

我们讨论了如何适当选取方程组（*）的参数c_1，k_1，k_2，使其零解是全局渐近稳定的，得到了方程组（*）的零解全局渐近稳定的若干定理。

一、引　言

在各种工程中往往要求消除自激振动，以使设备或机器不受损坏，人们的一般方法是构造一个消振器，使自激振动的振幅减小或完全消除，最简单的数学模型是

$$\ddot{x}_1+\varphi(\dot{x}_1)+k_1(x_1-x_2)=0,\quad \ddot{x}_2+c_1\dot{x}_1+k_2(x_2-x_1)=0 \tag{1.1}$$

系统(1.1)的实际意义是很明显的，在它的第一个方程中当$x_2=0$时，表示机器固有的自激振动，在第二个方程中当$x_1=0$时，表示耦合上去的消振机构。消振器效果的好坏，就看能否选取适当的参数k_1,k_2,c_1使当时间t趋于“无穷”时，x_2-x_1趋于零或趋近于人们规定的容许值范围内。从微分方程观点看，就是能否选择适当的参数k_1,k_2,c_1使系统(1.1)的解是稳定的，或是渐近稳定的，或是更理想的全局渐近稳定。现在，我们从理论上研究(1.1)的解的稳定性。为此，引进新变量

$$\dot{x}_1=x,\quad \dot{x}_2=y,\quad x_1-x_2=z$$

则方程组(1.1)变为

$$\dot{x}=-\varphi(x)-k_1z,\quad \dot{y}=-c_1y+k_2z,\quad \dot{z}=x-y \tag{1.2}$$

对方程组(1.2)作非奇异线性变换

$$x_1=x,\quad y_1=c_1x-k_1z,\quad z_1=k_2x+k_1y-c_1k_1z \tag{1.3}$$

得到新方程组

$$\frac{dx_1}{dt}=y_1-f(x_1),\qquad \frac{dy_1}{dt}=z_1-cx_1-df(x_1),\qquad \frac{dz_1}{dt}=-ax_1-bf(x_1) \tag{1.4}$$

其中　$f(x_1)=\varphi(x_1)+c_1x_1$，$a=c_1(k_1-k_2)$，$c=k_1+k_2-c_1^2$，$b=k_2$，$d=c_1$。下面我们主要研究方程组(1.4)，为了简化记号，变量仍用x,y,z表示

$$\frac{dx}{dt}=y-f(x),\qquad \frac{dy}{dt}=z-cx-df(x),\qquad \frac{dz}{dt}=-ax-bf(x) \tag{1.5}$$

* 周恒推荐。

由物理意义知 $b=k_2>0$, $d=c_1>0$, 方程组(1.5)的广义特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\frac{f(x)}{x}-\lambda & 1 & 0 \\ -c-d\frac{f(x)}{x} & -\lambda & 1 \\ -a-b\frac{f(x)}{x} & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=0$$

展开后得

$$\lambda^3+\frac{f(x)}{x}\lambda^2+\left(c+d\frac{f(x)}{x}\right)\lambda+\left(a+b\frac{f(x)}{x}\right)=0$$

因此方程组(1.5)的广义Routh-Hurwitz条件为

$$f(0)=0 \tag{1.6}$$

$$\frac{f(x)}{x}>0 \qquad (x\neq 0) \tag{1.7}$$

$$a+b\frac{f(x)}{x}>0 \qquad (x\neq 0) \tag{1.8}$$

$$d\frac{f^2(x)}{x^2}+(c-b)\frac{f(x)}{x}-a>0 \qquad (x\neq 0) \tag{1.9}$$

(1.9) 式是关于 $w=f(x)/x$的二次不等式，为了求解，我们引进二次方程

$$dw^2+(c-b)w-a=0 \tag{1.10}$$

为了研究的方便，我们控制参数变量k_1,k_2,c_1使二次方程(1.10)的判别式 $\Delta=(c-b)^2+4ab>0$，此时方程(1.10)有二个不等的实根A,B:

$$A=\frac{-(c-d)+\sqrt{(c-b)^2+4ad}}{2d}, \qquad B=\frac{-(c-d)-\sqrt{(c-b)^2+4ad}}{2d}$$

当$d>0$时，我们有 $A\geqslant B$，且假定$A\geqslant -a/b$，则由 (1.7)、(1.8)、(1.9) 三个不等式所组成的不等式组的解为

Ⅰ. $d>0$, $b>0$, $B>-a/b>0$, $-a/b<f(x)/x<B \quad (x\neq 0)$;

Ⅱ. $d>0$, $b>0$, $A>\max\{0, -b/a\}$, $f(x)/x>A \quad (x\neq 0)$;

Ⅲ. $d>0$, $b>0$, $A=-a/b=0$, $f(x)/x>A \quad (x\neq 0)$;

Ⅳ. $d>0$, $b>0$, $A=-a/b>0$, $f(x)/x>A \quad (x\neq 0)$;

我们对上述四种情况进行详细的研究，得到了方程组(1.5)的零解全局渐近稳定的充分条件。

二、引　　理

为了顺利地研究，我们需要如下的Плисс所建立的引理。考虑线性系统

$$\frac{dx_1}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j+Fx_k, \quad \frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \qquad (i=2,3,\cdots,n) \tag{2.1}$$

与非线性系统

$$\frac{dx_1}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j+f(x_k),\quad f(0)=0;\quad \frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\qquad (i=2,3,\cdots,n)\tag{2.2}$$

引理1 如果二次型

$$v=w(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\frac{\mu}{2}Fx_k^2\tag{2.3}$$

对任何$F\in(r,\delta)$是定正的，其中F,r,δ为常数，w的系数与F无关，那么函数

$$v_1=w(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\mu\int_0^{x_k}f(x)dx\tag{2.4}$$

对任何满足条件

$$f(0)=0,\ r<\frac{f(x)}{x}<\delta\qquad (x\neq 0)\tag{2.5}$$

的连续函数$f(x)$也是定正的。

引理2 设二次型$w(x_1,x_2,\cdots,x_n)$只与方程组(2.1),(2.2)的系数a_{ij}有关，用$\dot v$，$\dot v_1$分别表示函数v，v_1各自沿着方程组(2.1),(2.2)的轨线对时间的导数。如果对于任何$F\in(r,\delta)$，有$\dot v\leqslant 0$，则对于满足条件(2.5)的任何连续函数$f(x)$也有$\dot v_1\leqslant 0$。

引理3 一阶微分方程组

$$\frac{dx_s}{dt}=X_s(x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad (s=1,2,\cdots,n)\tag{2.6}$$

($X_s(x_1,x_2,\cdots,x_n)$连续，满足存在唯一性定理条件，且$x_s(0,0,\cdots,0)=0$)的零解是全局渐近稳定的必要与充分条件是

1. 点$(0,0,\cdots,0)$是唯一的平衡状态；
2. 平衡状态$(0,0,\cdots,0)$是在 Ляпунов定义下稳定的；
3. 存在超平面L：$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$使得

1° 设$\varphi(p,t)$是$t=0$时经过点p的方程组(2.6)的任一轨线，如果存在时刻$T>0$，使得当$t>T$时，此轨线$\varphi(p,t)$不与超平面L相交，那么当$t\to+\infty$时，沿此轨线有$x_s\to 0$。

2° 存在仅在超平面L上定义的连续函数$v(x_1,x_2,\cdots,x_n)$而且满足下列条件：

(1) $v(0,0,\cdots,0)=0$；

(2) $v(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$当$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in L$且$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq(0,0,\cdots,0)$；

(3) $v(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to\infty$当$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in L$，且$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\to+\infty$。

3° 如果方程组(2.6)的轨线$\varphi(p,t)$与超平面L有二个公共点$\varphi(p,t_1)$，$\varphi(p,t_2)$，则当$t_1<t_2$时有$v(\varphi(p,t_1))>v(\varphi(p,t_2))$。

注 所谓轨线$\varphi(p,t)$与超平面L在$t=t_1$时相交指的是存在这样的时刻$t_0<t_1\leqslant t_2<t_3$，在轨线$\varphi(p,t)$上满足

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0\qquad 当t\in[t_1,t_2]$$
$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\neq 0\qquad 当t\in[t_0,t_1)及t\in(t_2,t_3]$$

而且在区间$[t_0,t_1)$和$(t_2,t_3]$上$a_1x_1+\cdots+a_nx_n$异号，即轨线是从一端进入另一端，而且轨线在某一区间（当$t_1<t_2$时）停留在超平面L上，也可以只有一个公共点（当$t_1=t_2$时），交点记为$\varphi(p,t_1)$。

引理4 在情况Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ下方程组(1.5)的正半轨线如果整个地落在半空间$\{x\geqslant 0\}$或$\{x\leqslant 0\}$内，则当$t\to+\infty$时，此正半轨线趋于坐标原点。

引理1～4的证明见文[1]。

三、结　论

定理1 如果$d>0$，$b>0$，$B>-a/b>0$，则当$f(x)$满足广义R-H条件：$-a/b<f(x)/x<B$ $(x\neq0)$时，方程组(1.5)的零解是全局渐近稳定的。

证明 引进新的函数

$$r(x)=f(x)-Bx \tag{3.1}$$

和数$k^2=c+dB$。对方程组(1.5)作线性变换：

$$x_1=B^2x-By+z,\ \ y_1=z-k^2x,\ \ z_1=ky \tag{3.2}$$

其中 $x=\dfrac{x_1-y_1+Bz_1/k}{B^2+k^2}\quad(k>0)$

得方程组

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx_1}{dt}=-Bx_1-(B^2-dB+b)r(x),\quad \frac{dy_1}{dt}=-kz_1+(k^2-b)r(x)\\&\frac{dz_1}{dt}=ky_1-dkr(x)\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

其中$r(x)$满足条件：

$$-\frac{a}{b}-B<\frac{r(x)}{x}<0\qquad(x\neq0) \tag{3.4}$$

再考虑常系数线性方程组

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx_1}{dt}=-Bx_1-(B^2-dB+b)\Gamma x,\quad \frac{dy_1}{dt}=-kz_1+(k^2-b)\Gamma x\\&\frac{dz_1}{dt}=ky_1-dk\Gamma x\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

其中 $\Gamma\in(-a/b-B,\ 0)$，取

$$v=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}\lambda y_1^2+\frac{1}{2}\lambda z_1^2+\frac{1}{2}\mu\Gamma x^2 \tag{3.6}$$

其中 $$\mu=\lambda\ (bB-Bk^2+dk^2),\ \ \lambda=\frac{B^2-dB+b}{b-k^2} \tag{3.7}$$

函数v沿着方程组(3.5)关于时间t的导数为：

$$\dot v=-Bx_1^2-2(B^2-dB+b)\Gamma x_1x+\lambda k^2(b-k^2-dB)\Gamma x^2-\lambda(Bb-Bk^2+dk^2)\Gamma^2x^2 \tag{3.8}$$

由于$B>-a/b>0$，可得$dB^2+cB=bB+a>0$，所以$k^2>0$，又

$$b-k^2-dB=b-c-2dB=\sqrt{(c-b)^2+4ad}\geqslant0 \tag{3.9}$$

从而

$$b-k^2\geqslant dB>0,\ \ B^2-dB+b\geqslant B^2+k^2>0 \tag{3.10}$$

$\dot v$的表达式(3.8)可以看作为x_1,x的二次型，因此$\dot v$常负的充要条件是

$$-\lambda Bk^2(b-k^2-dB)\Gamma+B\lambda(Bb-Bk^2+dk^2)\Gamma^2\geqslant(B^2-dB+b)^2\Gamma^2 \tag{3.11}$$

(1) 设$(c-b)^2+4ad>0$，则$b-k^2-dB>0$，因此(3.11)式对于绝对值充分小的$\Gamma<0$成立，现取$\Gamma=-a/b-B=-(a+bB)/b=-(Bc+dB^2)/b=-Bk^2/b$，则(3.11)变为

$$\lambda(b-k^2)(B^2-dB+b)\geqslant(B^2-dB+b)^2 \tag{3.12}$$

由于(3.7)和(3.12)成立，因此不等式(3.11)对一切$\Gamma\in(-a/b-B,0)$皆成立，因此对这区

间中的Γ，$\dot{v}$是常负的，而且$\dot{v}=0$可推出$x_1=x=0$。取

$$v_1=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}\frac{B^2-dB+b}{b-k^2}(y_1^2+z_1^2)+(bB-Bk^2+dk^2)\frac{B^2-dB+b}{b-k^2}\int_0^x r(x)\,dx \qquad (3.13)$$

现证明v_1是定正的。假定在相空间某点$p\neq(0,0,0)$处$v_1(p)\leqslant 0$，则$x(p)\neq 0$，因此$\dot{v}_1(p)<0$，因此对所有$t>0$，轨线$\varphi(p,t)$上的一切点均有$v_1<0$，因此轨线$\varphi(p,t)$不能与平面$x=0$相交(因为在平面$x=0$，$v_1\geqslant 0$)。此外$\varphi(p,t)$不可能趋向坐标原点（因为$v_1(0,0,0)=0$)。但这与引理4矛盾。由于v_1定正，$\dot{v}_1$常负，因此方程组(1.5)的唯一平衡点(0,0,0)是稳定的。

现取$x=0$为超平面L，在L上取v函数为

$$v_1^*=v_1(0,y,z)=\frac{1}{2}(z-By)^2+\frac{k^2(B^2-dB+b)}{2(b-k^2)}y^2+\frac{B^2-dB+b}{2(b-k^2)}z^2 \qquad (3.14)$$

则它满足引理3中的条件2°、3°，又由引理4知条件1°也成立，因此方程组(1.5)的零解是全局渐近稳定的。

(2) 设$(c-b)^2+4ad=0$，则从(3.9)式推得$b-k^2-dB=0$，而不等式(3.11)变为$\lambda(k^2-b)+(B^2-dB+b)\leqslant 0$，由$\lambda$的定义式(3.7)知它是成立的。因此(3.13)式所表示的v_1仍可取作方程组(1.5)的Ляпунов函数，而

$$\dot{v}_1=-Bx_1^2-2(B^2-dB+b)x_1r(x)-(bB-Bk^2+dk^2)\frac{B^2-dB+b}{b-k^2}r^2(x) \qquad (3.15)$$

由于$k^2=b-dB$，所以$bB-Bk^2+dk^2=bB+(d-B)(b-dB)=d(B^2-dB+b)$，代入(3.15)式得

$$\begin{aligned}\dot{v}_1&=-Bx_1^2-2(B^2-dB+b)\,x_1r(x)-\frac{d(B^2-dB+b)^2}{dB}r^2(x)\\&=-\frac{1}{B}[Bx_1+(B^2-dB+b)r(x)]^2\end{aligned} \qquad (3.16)$$

因此$\dot{v}_1$仅在曲面

$$Bx_1+(B^2-dB+b)r(x)=0 \qquad (3.17)$$

上变为零，若取$x=0$为超平面L，$v_1^*=v_1(0,y,z)$为定义在L上的v函数，则引理3成立。为此证明下列事实：设方程组(1.5)的轨线$\varphi(p,t)$从平面$x=0$上的某点$p\neq(0,0,0)$出发，而在$t=T>0$时第一次与平面$x=0$相交，那么

$$v_1(\varphi(p,T))<v_1(p) \qquad (3.18)$$

事实上，不等式(3.18)仅当轨线$\varphi(p,t)$在整个时间区间$(0,T)$都位于曲面(3.17)上时才可能不成立。但此时

$$x_1(p)=x_1(\varphi(p,T))=0 \qquad (3.19)$$

从方程组(3.3)的第一个方程得

$$x_1(\varphi(p,T))=(B^2-dB+b)\exp(-BT)\int_0^T r(x)\exp(Bt)\,dt \qquad (3.20)$$

由T的定义，在时间区间$0<t<T$中，在轨线$\varphi(p,t)$上量x保持同一符号，从广义R-H条件(3.4)知，在轨线段$\varphi(p,t)$，$t\in(0,T)$上函数$r(x)$保持同号，由此推得$x_1(\varphi(p,T))\neq 0$，与(3.19)式矛盾。

定理2 如果$d>0,b>0$，$A>\max\{0,-b/a\}$，$Ab-Ak^2+dk^2\geqslant 0$，其中$k^2=c+dA$，则对于满足广义R-H条件$f(x)/x>A$的任何函数$f(x)$，方程组(1.5)的零解是全局渐近稳定的。

如果$Ab-Ak^2+dk^2<0$，则需假定函数$f(x)$满足不等式

$$A<\frac{f(x)}{x}\leqslant\frac{(A^2+k^2)(b-k^2)}{Ab-Ak^2+dk^2}\tag{3.21}$$

证　引进新的函数

$$r(x)=f(x)-Ax\tag{3.22}$$

对方程组(1.5)进行线性变换

$$x_1=A^2x-Ay+z,\quad y_1=z-k^2x,\quad z_1=ky\tag{3.23}$$

其中　$$x=\frac{x_1-y_1+Az_1/k}{A^2+k^2}$$

得新方程组：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx_1}{dt}=-Ax_1-(A^2-dA+b)r(x),\quad \frac{dy_1}{dt}=-kz_1+(k^2-b)r(x)\\&\frac{dz_1}{dt}=ky_1-dkr(x)\end{aligned}\right\}\tag{3.24}$$

其中 $r(x)$ 满足条件 $r(x)>0$，而 $k^2=c+dA$，由于 $A(c+dA)=a+bA>0$，因此 $k^2>0$，取 $k=\sqrt{k^2}$。我们同时考虑常系数线性方程组

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx_1}{dt}=-Ax_1-(A^2-dA+b)\Gamma x,\quad \frac{dy_1}{dt}=-kz_1+(k^2-b)\Gamma x\\&\frac{dz_1}{dt}=ky_1-dk\Gamma x\end{aligned}\right\}\tag{3.25}$$

其中Γ为正常数。当 $k^2-b\neq0$时(3.25)的Ляпунов函数可取

$$v=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}\lambda y_1^2+\frac{1}{2}\lambda z_1^2+\frac{1}{2}\lambda(Ab-Ak^2+dk^2)\Gamma x^2\tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}\dot v|_{(3.25)}=&-Ax_1^2+[\lambda(k^2-b)-(A^2-dA+b)]\Gamma x_1x\\&+\lambda k^2(b-k^2-dA)\Gamma x^2-\lambda(Ab-Ak^2+dk^2)\Gamma^2x^2\end{aligned}\tag{3.27}$$

(3.27)式非正的充要条件是

$$\begin{aligned}&-4\lambda Ak^2(b-k^2-dA)\Gamma+4\lambda A(Ab-Ak^2+dk^2)\Gamma^2\\&\quad\geqslant[\lambda(k^2-b)-(A^2-dA+b)]^2\Gamma^2\end{aligned}\tag{3.28}$$

若$k^2-b=0$，则方程组(3.25)的Ляпунов函数可取为

$$v=\frac{1}{2}\lambda y_1^2+\frac{1}{2}\lambda z_1^2+\frac{1}{2}\lambda dk^2\Gamma x^2\tag{3.29}$$

$$\dot v|_{(3.25)}=-\lambda dk^2(A\Gamma+\Gamma^2)x^2\tag{3.30}$$

现在分下列几种情形进行讨论：

(1)　若$(c-b)^2+4ad=0$，则$A=B$，证法与定理1相同。

(2)　若 $(c-b)^2+4ad>0$，则 $b-k^2-dA=b-c-2dA=-\sqrt{(c-b)^2+4ad}<0$，因此，不等式(3.28)对于充分小的$\Gamma>0$和任意$\lambda>0$成立，现在寻求对任何 $\Gamma>0$，不等式(3.28)成立的$\lambda(>0)$。

(i)　$A^2-Ad+b<0$　　(3.31)

从(3.31)得$Ad-A^2>b$，两边同乘$k^2>0$，并同时加上A^2b得$Ak^2d-A^2k^2+A^2b>(A^2+k^2)b$，因$A>0$，所以$Ab-Ak^2+dk^2>0$。

1° 设 $k^2-b<0$，则取$\lambda=(A^2-Ad+b)/(k^2-b)>0$，此时不等式(3.28)对一切 $\Gamma>0$在严格意义下成立。

2° 设$k^2-b>0$，则取$\lambda=(A^2-Ad+b)/(b-k^2)>0$。由于$b-Ad-k^2<0$，因此$b(b-Ad-k^2)<0$，$b(b-k^2)<Abd$。两边同时加上$(b-k^2)(A^2-dA)$ 得 $(b-k^2)(b+A^2-dA)<Abd+(b-k^2)(A^2-dA)$，因此有$(b-k^2)(A^2-dA+b)<A^2b-A^2k^2+Adk^2$，所以不等式 (3.28) 对一切$\Gamma>0$在严格意义下成立。

(ii) 若$A^2-dA+b=0$，则不等式(3.28)对充分小的$\lambda>0$成立。

(iii) 若$A^2-dA+b>0$

1° 设 $k^2-b<0$，则取 $\lambda=\dfrac{A^2-Ad+b}{b-k^2}$，

2° 设 $k^2-b<0$，则取 $\lambda=\dfrac{A^2-Ad+b}{k^2-b}$。

因此，不论何种情况，当$k^2-b\neq 0$时，常可求得那样的 $\lambda>0$，使得由(3.26)所建立的 v 函数是定正无穷大的，而它的导数对任何$\Gamma>0$是常负的。又若 $k^2-b=0$，则取(3.29)式的 v 作为Ляпунов函数，它也是定正无穷大且$\dot{v}$常负，因此按引理1、2，当$k^2-b\neq 0$时，我们取

$$v_1=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}\lambda y_1^2+\frac{1}{2}\lambda z_1^2+\frac{1}{2}\lambda\,(Ab-Ak^2+dk^2)\int_0^x r(x)\,dx$$

当 $k^2-b=0$时，我们取

$$v_1=\frac{1}{2}\lambda y_1^2+\frac{1}{2}\lambda z_1^2+\frac{1}{2}\lambda dk^2\int_0^x r(x)\,dx$$

作为(3.24)的Ляпунов函数，则由 Красовский 定理可知方程(1.5)的零解对任何满足 R-H 条件的$f(x)$，都是全局渐近稳定的。

现在设 $Ab-Ak^2+dk^2<0$，则$k^2-b>0$，又由(i)中可知 $A^2-Ad+b>0$，因此我们若取

$$v=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}\,\frac{A^2-Ad+b}{k^2-b}\,(y_1^2+z_1^2)+\frac{(bA-Ak^2+dk^2)(A^2-Ad+b)}{k^2-b}\int_0^x r(x)\,dx$$

则它满足Красовский定理的一切条件，因此定理得证。

定理3 若 $d>0$，$b>0$，$A=-a/b=0$，则方程组(1.5)的零解，对满足广义 R-H 条件 $f(x)/x>A$的任何函数$f(x)$都是全局渐近稳定的。

证 (1) 设$c=b$，则取 $v=\dfrac{1}{2}(z-bx)^2+\dfrac{1}{2}by^2+bd\displaystyle\int_0^x f(x)\,dx$，则它的导数 $\dot{v}|_{(1.5)}=-bdf^2(x)$，因此，若取$x=0$为引理3中的超平面，则引理3的一切条件均满足。

(2) 设 $c\neq b$，取$v=\dfrac{1}{2}c\left(x-\dfrac{z}{c}\right)^2+\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{c-b}{2bc}x^2+d\displaystyle\int_0^x f(x)\,dx$，则它的导数$\dot{v}|_{(1.5)}=-df^2(x)-(c-b)xf(x)$，因为$a=0$，二次方程 (1.10) 变为 $dw^2+(c-b)w=0$，(由定义$d>0$时$A\geqslant B$)，令$A=0$，所以$B=(b-c)/d<0$，即$c-b>0$，因此v是定正无穷大函数，而且$\dot{v}\leqslant 0$，等号仅在$x=0$时成立，而平面 $x=0$ 不包含方程组(1.5)的整条轨线，因此零解是全局渐近稳定的。

定理 4 若$d>0$，$b>0$，$A=-a/b>0$，$f(x)/x>A$ $(x\neq 0)$，又 $r(x)=f(x)-Ax$ 满足条件

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x r(x)\,dx=+\infty$$

则方程组(1.5)的零解是全局渐近稳定的。

证 此时有$a+bA=0$，又从方程(1.10)知$dA^2+cA=a+bA$，因此$c+dA=0$，又因$r(x)=f(x)-Ax$，因此方程组(1.5)变为：

$$\frac{dx}{dt}=y-Ax-r(x),\quad \frac{dy}{dt}=z-dr(x),\quad \frac{dz}{dt}=-br(x) \tag{3.32}$$

取函数：

$$v=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}\frac{\mu}{Ab}z^2+\mu\int_0^x r(x)dx$$

这里$x_1=A^2x-Ay+z$，μ由下列规则确定

$$\mu=\begin{cases} A|A^2-dA+b|, & \text{当 } A^2-dA+b\neq 0 \text{ 时} \\ \text{取}(0,4A^3)\text{区间中任何一数}, & \text{当 } A^2-dA+b=0 \text{ 时} \end{cases}$$

$$\dot{v}|_{(3.32)}=-Ax_1^2-\left[(A^2-dA+b)+\frac{\mu}{A}\right]x_1r(x)-\mu r^2(x)$$

不难看出v是定正无穷大函数，而$\dot{v}$是常负的，且$\dot{v}=0$可推出$x_1=x=0$，而集合$\{x_1=0,x=0\}$不包含方程组(3.32)的整条轨线，因此由Красовский定理知零解是全局渐近稳定的。

对于 $\Delta=(c-b)^2+4ad<0$ 与 $A<-a/b$ 的情形，本文不作介绍，有兴趣的读者可参阅文[3]。

参 考 文 献

[1] Плисс В. А., *Некоторые Проблемы Теории Устойчивости Движения в Целом*, Изд-во ЛГУ (1958).

[2] Барбашин Е. А., *Функции Ляпунова*, «Наука» (1970).

[3] Попов В. М., Об ослаблении достаточных условий абсолютой устойчивости, *А. Т. М.*, **19**, 1 (1958).

The Mathematical Principles of Vibration Reductor

Jin Jun Lu Ting-he Hang Yong-zhen

(*Shanghai Teachers University, Shanghai*)

Abstract

In engineering and technology, it is often demanded that self-oscillation be eliminated so that the equipment or machinery may not be damaged. In this paper, a mathematical model for reducing vibration is given by the following equations:

$$\ddot{x}_1+\varphi(\dot{x}_1)+k_1(x_1-x_2)=0,\quad \ddot{x}_2+(\dot{x}_1+k_2(x_2-x_1)=0 \tag{*}$$

We have discussed how to choose suitable parameters c_1, k_1, k_2 of equations(*), so as to make the zero solution of global stability. Several theorems on the global stability of the zero solution of equations (*) are also given.