应用数学和力学，第7卷第4期（1986年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Dirac-Pauli表象的复变函数理论及其在流体力学中的应用(I)*

沈 惠 川

（中国科学技术大学，1984年12月20日收到）

摘 要

（1） 本文摒弃了传统的四元数理论，建立了Dirac-Pauli表象的复变函数理论，从而使多元多维问题成为较简单的问题；

（2） 本文用Dirac-Pauli表象的复变函数理论，简化了不可压缩粘流动力学的Navier-Stokes方程和等熵气体动力学方程组，使作为流体力学中心问题的上述两类方程组化归为只有一个复未知量的非线性方程.

是故易有太极，是生两仪；两仪生四象，四象生八卦.——《易传·系辞上》

一、前 言

我们都有经验，在弹性静力学平面问题中引入Airy应力函数[1~3]，在不可压缩流体的平面流动或轴对称流动问题中引入流函数[4~6]，和在无旋流问题中引入速度势[7]是十分方便的。现在的问题是，这种仅仅用一个未知量来确定一类力学问题的解的方法，能否推广到三维问题（或四维时空）中去？这是第一。

第二，众所周知，传统的复变函数理论的成功是辉煌巨大的，但是它只对二维问题（或三维时空）有效。这种以复数形式表示的简便方法，能否应用到三维问题（或四维时空）中去？如果能应用，那么它将取何种形式？

第三，凡是在逆散射变换(inverse scattering transformation)和孤立子(soliton)理论方面[8~9]作过工作的人都知道，目前关于这方面问题的理论大部分是一维(或二维时空)的，并只有一个未知量。如果要用逆散射变换和孤立子理论来求解三维（四维时空）的力学问题，无非是两种办法。其一是将目前的理论推广到多维空间[10~11]，其二是将力学问题化为只有一个未知量和尽可能少的自变量的形式。第一种方法，在数学上的难度与第二种方法是等价的。而第二种方法，则又与我们前面提出的两个问题相联系。

从逆散射变换和孤立子理论的观点来看，非线性的力学问题或物理问题的所有困难中，

* 钱伟长推荐.

最主要的困难就是时空的维数和未知量的个数。经验和本文的结果表明，问题的困难程度大致正比于($\log_2 n$)，其中n为空间的维数（或$n+1$维时空）和未知量的个数。

数学上到目前为止，只有一种办法可以帮助我们解决上述三个问题，那就是所谓“四元数(quaternion)理论”[12~14]。我们已经知道，“三元数”是不可能存在的，因此它最终被矢量所取代[15]。文[15]和文[16]证明了，原则上不可能再进一步扩充数域并且使得算术运算的全部运算律仍被保持。但是如果可以舍去其中几条，那么这种扩充仍是可能的。四元数理论就是在舍去乘法交换律的基础上建立的。除此之外，“八元数(biquaternion)”理论则要求舍去更多的运算律。

四元数理论是W. R. Hamilton(1843)首先引入数学的。他从1833年就开始研究自己所建立的四元数理论。他的研究结果结晶在他的两本书[17~18]中。以后，F. Klein等人[19]也作了一些工作。但是直到最近，四元数还没有得到任何有价值的实际应用，而仅仅作为四维线性代数的形式数学模式的范例处在象牙之塔中的数学王冠上[20~21]。国外首有人将四元数理论应用于刚体定位问题[22]，但其形式并不简便，行文犹如天书，因而其成果是有限的。

本文摒弃了传统的四元数理论，建立了Dirac-Pauli表象(representation)下的复变函数理论，本文的结果表明，Dirac-Pauli表象的复变函数理论是可以取代四元数理论而成为独立的数学学科的。它的计算简便，它的形式令人信服。

本文以流体动力学作为Dirac-Pauli表象的复变函数理论的试金石。这一方面是因为流体动力学的自变量和因变量众多，因而难以求解；另一方面是因为弹塑性力学的一些主要方程都可以化归为Schrödinger方程和Dirac方程[10~11,23~25]，从而已经解决了求解上的困难。当然，本文所提供的方法，可以同样在多维弹塑性力学中得到应用。

为了尽可能少地涉及热力学定律，本文以不可压缩粘流动力学的Navier-Stokes方程和等熵气体动力学方程组为研究对象。前者是流体动力学的中心问题[26]，同时它又表示着湍流的瞬时运动；后者是仅次于前者的另一中心。

本文中凡重复指标按Einstein约定求和。

二、Dirac-Pauli表象的复变函数理论

传统的复变函数理论，可以称为“ECR(Euler-Cauchy-Riemann)表象的复变函数理论”[27]。在ECR表象的单复平面中，

$$z^2=x^2+y^2 \tag{2.1}$$

式中，x, y和z具有通常的意义。(2.1)式可以分解为

$$z=x+iy,\quad \bar{z}=x-iy \tag{2.2}$$

式中$\bar{z}$为z的复共轭。(1.2)式定义了z和$\bar{z}$两个复自变量。

现将(2.2)式改写成下列形式：

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}\right]$$

或

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sigma_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\sigma_2\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] \tag{2.3}$$

式中σ_k ($k=1,2$)为Pauli矩阵，$1/\sqrt{2}$为归一化因子。

这样，单复平面的 ECR 表象就化为 Pauli 表象了。对比(2.2)式和(2.3)式，可知

$$\left\{\begin{aligned} z_1&=\bar{z}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}z\\ z_2&=\bar{z}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{z}\end{aligned}\right.,\qquad \left\{\begin{aligned} x_1&=x_2=x\\ y_1&=y_2=y\end{aligned}\right. \tag{2.4}$$

引入 Dirac 符号[28]，以| >表示刃矢(右矢，ket)，其共轭< |表示刁矢(左矢，bra)，则(2.3)式可写成

$$|z\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}[\sigma_1|x\rangle+\sigma_2|y\rangle] \tag{2.5}$$

其共轭为

$$\langle z|=\frac{1}{\sqrt{2}}[\langle x|\sigma_1+\langle y|\sigma_2] \tag{2.6}$$

式中

$$\sigma_k\sigma_i+\sigma_i\sigma_k=2\delta_{ki}\qquad(i,k=1,2) \tag{2.7}$$

δ_{ki} 为 Krönecker 符号。另外，由Dirac 符号的性质可知

$$\langle z|z\rangle=z^2,\ \langle x|x\rangle=2x^2,\ \langle y|y\rangle=2y^2 \tag{2.8}$$

现在将此规则推广到四维空间。我们设

$$z^2=x_\alpha x_\alpha\qquad(\alpha=1,2,3,4) \tag{2.9}$$

式中x_4的定义待定。引入 Dirac 矩阵或 Flügge 标准矩阵[29]γ_α ($\alpha=1,2,3,4$)。同时

定义1 四维空间的每一自变量x_α ($\alpha=1,2,3,4$)都定义为 Hilbert 空间的四元矢量，并且每一分量都有相等的值，即

$$x_\alpha=x_{\alpha1}=x_{\alpha2}=x_{\alpha3}=x_{\alpha4}\qquad(\alpha=1,2,3,4) \tag{2.10}$$

(2.10)式的成立，在量子力学中是常有的事。

这样，我们就有

定理1 四维空间的复自变量z，可以由 Dirac 表象的 Hilbert 空间的矢量来表示：

$$|z\rangle=\frac{1}{2}\gamma_\alpha|x_\alpha\rangle \tag{2.11}$$

其复共轭则为

$$\langle z|=\frac{1}{2}\langle x_\alpha|\gamma_\alpha \tag{2.12}$$

式中$|z\rangle$和$|x_\alpha\rangle$均为 Hilbert 空间的四元矢量：

$$|z\rangle=(z_1,z_2,z_3,z_4)^T,\quad |x_\alpha\rangle=(x_\alpha,x_\alpha,x_\alpha,x_\alpha)^T \tag{2.13}$$

系数 1/2 为归一化因子，γ_α 满足关系

$$\gamma_\alpha\gamma_\beta+\gamma_\beta\gamma_\alpha=2\delta_{\alpha\beta} \tag{2.14}$$

在(2.11)式中，等号左端的矢量$|z\rangle$应左乘 4×4 单位矩阵，现已省略。

将(2.11)式展开，可得

$$\left.\begin{aligned} z_1&=\frac{1}{2}(-ix_1-x_2-ix_3+x_4),\quad z_2=\frac{1}{2}(-ix_1+x_2+ix_3+x_4)\\ z_3&=\frac{1}{2}(ix_1+x_2+ix_3-x_4),\qquad z_4=\frac{1}{2}(ix_1-x_2-ix_3-x_4)\end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

由(2.15)式可以看出，

$$z_3=-z_1,\quad z_4=-z_2 \tag{2.16}$$

因而$|z\rangle$的独立分量只有两个。但若引入z_1和z_2的复共轭，则z_k，$\bar{z}_k$ $(k=1,2)$ 组成四个互相独立的关系式：

$$
\left.
\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1}{2}(-ix_1-x_2-ix_3+x_4), \quad & z_2 &= \frac{1}{2}(-ix_1+x_2+ix_3+x_4) \\
\bar{z}_1 &= \frac{1}{2}(ix_1-x_2+ix_3+x_4), \quad & \bar{z}_2 &= \frac{1}{2}(ix_1+x_2-ix_3+x_4)
\end{aligned}
\right\} \tag{2.17}
$$

可以看出，如果不计x_4前的符号，则 x_k $(k=1,2,3)$ 前的符号与中国古代的八卦符号相同．[如果以一长划“—”表示正，两短划“--”表示负，则z_α和 $\bar{z}_\alpha$ $(\alpha=1,2,3,4)$ 分别对应于坤(☷)、兑(☱)，乾(☰)，艮(☶)，离(☲)，巽(☴)，坎(☵)，震(☳)．]

定理 1 的证明，可以将(2.12)式左乘(2.11)式得到：

$$\langle z|z\rangle = z_\alpha \bar{z}_\alpha \qquad (\alpha=1,2,3,4)$$

其中

$$z_1\bar{z}_1 = z_3\bar{z}_3 = \frac{1}{4}x_\alpha x_\alpha + \frac{1}{2}x_1x_3 - \frac{1}{2}x_2x_4, \quad z_2\bar{z}_2 = z_4\bar{z}_4 = \frac{1}{4}x_\alpha x_\alpha - \frac{1}{2}x_1x_3 + \frac{1}{2}x_2x_4$$

即

$$\langle z|z\rangle = x_\alpha x_\alpha \qquad \text{（证迄）}$$

由(2.17)式可得

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{1}{2}\left(-i\frac{\partial}{\partial z_1} - i\frac{\partial}{\partial z_2} + i\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + i\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}\right) \\
\frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}\right) \\
\frac{\partial}{\partial x_3} &= \frac{1}{2}\left(-i\frac{\partial}{\partial z_1} + i\frac{\partial}{\partial z_2} + i\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - i\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}\right) \\
\frac{\partial}{\partial x_4} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}\right)
\end{aligned}
\right\} \tag{2.18}
$$

并且接着可得：

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} &= -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial z_k} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_k\partial \bar{z}_k}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial \bar{z}_k} \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial \bar{z}_2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2\partial \bar{z}_1} - \frac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_1\partial \bar{z}_2}\right) \\
\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial z_k} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_k\partial \bar{z}_k}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial \bar{z}_k} \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial \bar{z}_2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2\partial \bar{z}_1} + \frac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_1\partial \bar{z}_2}\right) \\
\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} &= -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial z_k} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_k\partial \bar{z}_k}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial \bar{z}_k} \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial \bar{z}_2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2\partial \bar{z}_1} - \frac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_1\partial \bar{z}_2}\right) \\
\frac{\partial^2}{\partial x_4^2} &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial z_k} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_k\partial \bar{z}_k}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial \bar{z}_k} \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial \bar{z}_2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2\partial \bar{z}_1} + \frac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_1\partial \bar{z}_2}\right)
\end{aligned}
\right\} \tag{2.19}
$$

同时还有

$$\nabla^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)=-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial z_k}+\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_k\partial \bar{z}_k}\right)$$
$$+\frac{3}{2}\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial \bar{z}_k}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_2}+\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_1\partial \bar{z}_2}+\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial \bar{z}_2}+\frac{\partial^2}{\partial z_2\partial \bar{z}_1}\right) \tag{2.20}$$

$$\Box=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}=\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\alpha}=2\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial \bar{z}_k}\qquad(\alpha=1,2,3,4;\ k=1,2) \tag{2.21}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}&=\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial \bar{z}_k}-\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_2}+\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_1\partial \bar{z}_2}\right)\\ \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}&=\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial \bar{z}_k}+\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_2}+\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_1\partial \bar{z}_2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

由(2.17)式可反解出：

$$\left.\begin{aligned}x_1&=\frac{1}{2}i(z_1+z_2-\bar{z}_1-\bar{z}_2),\quad x_2=\frac{1}{2}(-z_1+z_2-\bar{z}_1+\bar{z}_2)\\ x_3&=\frac{1}{2}i(z_1-z_2-\bar{z}_1+\bar{z}_2),\quad x_4=\frac{1}{2}(z_1+z_2+\bar{z}_1+\bar{z}_2)\end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

由此可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_1}&=\frac{1}{2}\left(i\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial x_2}+i\frac{\partial}{\partial x_3}+\frac{\partial}{\partial x_4}\right)\\ \frac{\partial}{\partial z_2}&=\frac{1}{2}\left(i\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}-i\frac{\partial}{\partial x_3}+\frac{\partial}{\partial x_4}\right)\\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}&=\frac{1}{2}\left(-i\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial x_2}-i\frac{\partial}{\partial x_3}+\frac{\partial}{\partial x_4}\right)\\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}&=\frac{1}{2}\left(-i\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}+i\frac{\partial}{\partial x_3}+\frac{\partial}{\partial x_4}\right)\end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

由(2.24)式和(2.16)式，可求得

$$\frac{\partial}{\partial z}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial z_1}\\ \frac{\partial}{\partial z_2}\\ \frac{\partial}{\partial z_3}\\ \frac{\partial}{\partial z_4}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}i & -1 & i & 1\\ i & 1 & -i & 1\\ -i & 1 & -i & -1\\ -i & -1 & i & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_3}\\ \frac{\partial}{\partial x_4}\end{pmatrix} \tag{2.25}$$

及

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}\\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_3}\\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_4}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i & -1 & -i & 1\\ -i & 1 & i & 1\\ i & 1 & i & -1\\ i & -1 & -i & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_3}\\ \frac{\partial}{\partial x_4}\end{pmatrix} \tag{2.26}$$

Dirac 表象的复变函数理论的性质有许多。下面仅举两例。

例 1 Euler 公式。

在ECR表象的单复平面内，有Euler 公式：

$$e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha \tag{2.27}$$

类似的关系在 Pauli 表象的 Hilbert 空间内也成立[30]：

$$\exp[i\alpha\sigma_k]=I\cos\alpha+i\sigma_k\sin\alpha \qquad (k=1,2) \tag{2.28}$$

并且，若

$$\sigma_n=\lambda\sigma_1+\mu\sigma_2 \qquad (\lambda,\mu \text{ 为实数，} \lambda^2+\mu^2=1) \tag{2.29}$$

则有

$$\exp[i\alpha\sigma_n]=I\cos\alpha+i\sigma_n\sin\alpha \tag{2.30}$$

在 Dirac 表象的 Hilbert 空间中，设

$$F(\alpha)=\exp[i\alpha\gamma_\mu] \qquad (\mu=1,2,3,4) \tag{2.31}$$

则 $$F'(\alpha)=i\gamma_\mu F(\alpha),\ \ F''(\alpha)=(i\gamma_\mu)(i\gamma_\mu)F(\alpha)=-F(\alpha) \tag{2.32}$$

方程 $F''+F=0$ 的解为 $\cos\alpha$，$\sin\alpha$，因而

$$F=(A_1\sin\alpha+A_2\cos\alpha)+i(B_1\sin\alpha+B_2\cos\alpha) \tag{2.33}$$

注意到 $$F(0)=1,\ \ F'(0)=i\gamma_\mu \tag{2.34}$$

所以 $$B_2=0,\ \ A_2=I,\ \ A_1=0,\ \ B_1=\gamma_\mu \tag{2.35}$$

从而

$$\exp[i\alpha\gamma_\mu]=I\cos\alpha+i\gamma_\mu\sin\alpha \tag{2.36}$$

例 2 Cauchy-Riemann 条件。

在 ECR 表象的单复平面上的 Cauchy-Riemann 条件为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.37}$$

或 $$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u+iv)=0 \tag{2.38}$$

相应地，在 Dirac 表象的复变函数理论中，由

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \end{pmatrix}(u_1,u_2)=0 \tag{2.39}$$

可得出四对 Cauchy-Riemann 条件：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v_1}{\partial x_1}=\frac{\partial v_4}{\partial x_4},\ \ \frac{\partial v_1}{\partial x_4}+\frac{\partial v_4}{\partial x_1}=0,\ \ \frac{\partial v_2}{\partial x_2}=\frac{\partial v_3}{\partial x_3},\ \ \frac{\partial v_2}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_2}=0 \\ &\frac{\partial v_1}{\partial x_2}=\frac{\partial v_4}{\partial x_3},\ \ \frac{\partial v_1}{\partial x_3}+\frac{\partial v_4}{\partial x_2}=0,\ \ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}=\frac{\partial v_3}{\partial x_4},\ \ \frac{\partial v_2}{\partial x_4}+\frac{\partial v_3}{\partial x_1}=0 \end{aligned}\right\} \tag{2.40}$$

式中 $$u_1=\frac{1}{2}(-iv_1-v_2-iv_3+v_4),\ \ u_2=\frac{1}{2}(-iv_1+v_2+iv_3+v_4) \tag{2.41}$$

其共轭为 $$\bar{u}_1=\frac{1}{2}(iv_1-v_2+iv_3+v_4),\ \ \bar{u}_2=\frac{1}{2}(iv_1+v_2-iv_3+v_4) \tag{2.42}$$

即 $$|u\rangle=\frac{1}{2}\gamma_\alpha|v_\alpha\rangle,\quad \langle u|=\frac{1}{2}\langle v_\alpha|\gamma_\alpha \tag{2.43}$$

并且 $$v_\alpha=v_{\alpha1}=v_{\alpha2}=v_{\alpha3}=v_{\alpha4} \tag{2.44}$$

(2.40)式表明，v_α ($\alpha=1,2,3,4$) 分别满足方程

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\beta \partial x_\beta}v_\alpha=0 \qquad (\beta=1,2,3,4) \tag{2.45}$$

如果 $x_4=ict$ (c 为定速)，则(2.45)式成为 d'Alembert 方程。

由以上分析可得

定理 2 Dirac-Pauli 表象的 Hilbert 空间是 Euler-Cauchy-Riemann 表象的单复平面的推广；Dirac 表象的复变函数理论是传统的 Euler-Cauchy-Riemann 表象的复变函数理论的推广。四维空间的复数 z，可用

$$|z\rangle=\frac{1}{2}\gamma_\alpha|x_\alpha\rangle$$

来表示；同时，四维空间的复变函数 u，可用

$$|u\rangle=\frac{1}{2}\gamma_\alpha|v_\alpha\rangle$$

来表示；其中，x_α, v_α 为 Hilbert 空间中的同值矢量，$\gamma_\alpha(\alpha=1,2,3,4)$ 为 Dirac 矩阵。

三、Dirac-Pauli表象的复变函数理论的高维推广

Dirac-Pauli 表象的复变函数理论可以在高维情况下进行推广。

定理 3 高阶反对易矩阵可用低阶对易矩阵和反对易矩阵的直乘（Krönecker 积）来表示。(证明从略)。

例 3 6×6反对易矩阵。

已知 3×3 对易矩阵有三组共 9 个。其中一组为

$$\rho_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad \rho_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \rho_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix} \tag{3.1}$$

又知 2×2 反对易 Pauli 矩阵为

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \tag{3.2}$$

其中ρ_k ($k=1,2,3$)满足关系：

$$\left.\begin{aligned}&(\rho_k,\rho_l)=\rho_k\rho_l-\rho_l\rho_k=0\\&\rho_2\rho_3=\rho_1,\ \rho_3\rho_1=\rho_2,\ \rho_1\rho_2=\rho_3\\&\rho_k^2=1\qquad (k,l=1,2,3)\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

同时σ_k ($k=1,2,3$)满足关系

$$[\sigma_k,\ \sigma_l]=\sigma_k\sigma_l+\sigma_l\sigma_k=2\delta_{kl},\ (\sigma_k,\ \sigma_l)=2ie_{kli}\sigma_i \qquad (k,l,i=1,2,3) \tag{3.4}$$

式中 e_{kli} 为 Levi-Civita 符号。

取 Krönecker 积（$\otimes$表示直乘）：

$$\tau_k=\rho_1\otimes\sigma_k,\quad \tau_l=\rho_2\otimes\sigma_k \qquad (k=1,2,3;\ l=4,5,6) \tag{3.5}$$

可得6×6反对易矩阵，其中[31~32]：

$$\tau_\mu\tau_\nu\tau_\lambda+\tau_\lambda\tau_\nu\tau_\mu=\delta_{\mu\nu}\tau_\lambda+\delta_{\lambda\nu}\tau_\mu \qquad (\mu,\nu,\lambda=1,2,3,4,5,6) \tag{3.6}$$

而

$$\tau_k\tau_l+\tau_l\tau_k=0 \qquad (k=1,2,3;\ l=4,5,6) \tag{3.7}$$

6×6 反对易 Hermite 矩阵，彼此线性独立的共有36个。6×6反对易矩阵在处理有关应力分量或应变分量的方程中是有用的。

例 4 8×8 反对易矩阵。

8×8 反对易矩阵可由 4 个 2×2 对易矩阵和16个 4×4 反对易矩阵（包括 Dirac 矩阵和 Flügge 矩阵）的直乘得到。因而彼此线性独立的共有64个。

如果我们仅需要其中的 5 个，则此 5 个 8×8 反对易矩阵的组成十分简单。

定义 2 $\gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ (3.8)

则可证明[28~29]

$$[\gamma_\mu,\gamma_\nu]=\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2\delta_{\mu\nu} \qquad (\mu,\nu=1,2,3,4,5) \tag{3.9}$$

由此可以找到 5 个反对易 Hermite 矩阵 τ_μ

$$\tau_\mu=\sigma_2\otimes\gamma_\mu=\begin{pmatrix}0 & -i\gamma_\mu\\ i\gamma_\mu & 0\end{pmatrix} \qquad (\mu=1,2,3,4,5) \tag{3.10}$$

式中，0 为 4×4 零矩阵，γ_μ 为 4×4 Dirac 矩阵和γ_5，$\otimes$为直积（Krönecker 积）符号。

一般来说，在64个 8×8 反对易矩阵中，应当有

$$\tau_\mu\tau_\nu\tau_\lambda+\tau_\lambda\tau_\nu\tau_\mu=\delta_{\mu\nu}\tau_\lambda+\delta_{\lambda\nu}\tau_\mu \qquad (\mu,\nu,\lambda=1,2,3,4,5,6,7,8) \tag{3.11}$$

推论 1 由对易矩阵与反对易矩阵的直积，可以得到任意$2n$阶的反对易矩阵（n为自然数）。

定理 4 由定理 2 和推论 1，可以证明，$2n$ 维空间的复数和复变函数，都可以在Dirac-Pauli 表象的复变函数理论中表示出来。$2n$ 维空间的复自变数 z，可用

$$|z\rangle=\frac{1}{\sqrt{2n}}\tau_{2n}|x_{2n}\rangle$$

来表示；$2n$ 维空间的复变函数 u，可用

$$|u\rangle=\frac{1}{\sqrt{2n}}\tau_{2n}|v_{2n}\rangle$$

来表示；其中 x_{2n}，v_{2n} 为 Hilbert 空间中的同值矢量，τ_{2n} 为 $2n\times 2n$ 反对易矩阵，n 为自然数。

四、Kaluza "鬼" 坐标和 Navier-Stokes 方程的简化

求解不可压缩粘流动力学的 Navier-Stokes 方程是流体力学中的中心问题。不可压缩粘流动力学的 Navier-Stokes 方程，又控制着湍流的瞬时运动，因此具有重要的意义。众所周知，在此类问题中，不可压缩条件和 Navier-Stokes 方程分别为

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k}=0 \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_k}v_i \qquad (i,k=1,2,3) \tag{4.2}$$

式中 ρ 为密度，ν 为粘性系数，v_i 为速度分量；p 为压强，如果流体具有外场力，而外场力

有势，则此有势的外场力可以归入 p 中。

在用 Dirac 表象的复变函数理论研究不可压缩粘流动力学 Navier-Stokes 方程的时候，我们可以取 $x_4=t$。但事实证明这并不是最方便的。方便的办法，是除时间 t 和三维空间 x_i $(i=1,2,3)$外，引入第五个坐标。这个五维时空，称为 Kaluza 五维时空。Kaluza 五维时空是1921年为研究广义相对论——统一场论而提出来的[33]。Einstein和Mayer也曾引入过五维张量。Einstein 和 Bargmann, Bergmann 分别撰文研究过五维时空。文载《von Kármán 纪念文集》[34]（文集中有 J. L. Synge 教授和钱伟长先生的一篇关于板壳内禀统一理论的文章[35]）。当然，Kaluza 和 Einstein 等人的五维时空是弯曲的。Einstein 认为这第五维应当是个柱面。由于宇宙的封闭性，这个柱面必定呈管状。在现在我们所讨论的不可压缩粘流动力学范围内，由于 Navier-Stokes 方程的 Galilei 不变性，这第五维应当是一个平面。第五维（在我们的问题里，t 编号为 x_0，第五维编号为 x_4）可以戏称为"神仙坐标"，或 Kaluza "鬼"坐标。当到最后将第五维取为某一常数（此常数通常取为零）时，就表示问题是三维（四维时空）的，而五维方程同时还原为四维方程。犹如第三维取为常数时，就表示问题是二维的，而方程同时还原为二维方程一样。第五维取为常数的哲学意义，就表示不存在"鬼"、"神"。但是在化简我们的方程时，先还必取第五维为常数。借助鬼斧神工，可以给我们带来方便。

引入 Kaluza "鬼"坐标，我们将(4.1)式和(4.2)式改写为

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha}=0 \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t}+v_\beta\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_\alpha}+\nu\frac{\partial^2}{\partial x_\beta\partial x_\beta}v_\alpha \qquad (\alpha,\beta=1,2,3,4) \tag{4.4}$$

式中 x_4 为 Kaluza "鬼"坐标；到最后，我们再令它为某一常数（通常取为零），而

$$v_4=dx_4/dt=0$$

设
$$|z\rangle=\frac{1}{2}\gamma_\alpha|x_\alpha\rangle,\quad |u\rangle=\frac{1}{2}\gamma_\alpha|v_\alpha\rangle \qquad (\alpha=1,2,3,4) \tag{4.5}$$

应用前面的结果，可知不可压缩条件(4.3)式应化为

$$\frac{\partial u_k}{\partial z_k}+\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \bar{z}_k}=0 \qquad (k=1,2) \tag{4.6}$$

注意，(4.6)式与(4.3)式一样，具有不变的形式。

在 Navier-Stokes 方程中，我们先计算 $v_\beta(\partial/\partial x_\beta)$：

$$v_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta}=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}-i & -1 & -i & 1\\ -i & 1 & i & 1\\ i & -1 & i & 1\\ i & 1 & -i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{pmatrix}\right]^T\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial z_1}\\ \dfrac{\partial}{\partial z_2}\\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_2}\end{pmatrix}$$

利用$(AB)^T=B^TA^T$，可得

$$v_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} = \frac{1}{4}(u_1, u_2, \bar{u}_1, \bar{u}_2) \begin{pmatrix} i & -1 & i & 1 \\ i & 1 & -i & 1 \\ -i & -1 & -i & 1 \\ -i & 1 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -i & i & i \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -i & i & i & -i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} \\ \frac{\partial}{\partial z_2} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \end{pmatrix} = (u_1, u_2, \bar{u}_1, \bar{u}_2) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} \\ \frac{\partial}{\partial z_2} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \end{pmatrix}$$

即

$$v_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} = u_k \frac{\partial}{\partial z_k} + \bar{u}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \qquad (k=1,2) \tag{4.7}$$

注意，(4.7)式也具有不变的形式．

从而，Navier-Stokes 方程成为

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} i & i & -i & -i \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ i & -i & -i & i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix} + \left(u_k \frac{\partial}{\partial z_k} + \bar{u}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right)$$

$$\cdot \begin{pmatrix} i & i & -i & -i \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ i & -i & -i & i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} -i & -i & i & i \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -i & i & i & -i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} \\ \frac{\partial}{\partial z_2} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \end{pmatrix} p + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_k}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} i & i & -i & -i \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ i & -i & -i & i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix}$$

等式两边同时左乘矩阵

$$\begin{pmatrix} -i & -1 & -i & 1 \\ -i & 1 & i & 1 \\ i & -1 & i & 1 \\ i & 1 & -i & 1 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

得

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix}+\left(u_k\frac{\partial}{\partial z_k}+\bar{u}_k\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix}=-\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial z_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial z_2} \end{pmatrix}p$$

$$+2\nu\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial \bar{z}_k}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

从而不可压缩粘流动力学的不可压缩条件和 Navier-Stokes 方程化为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u_k}{\partial z_k}+\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \bar{z}_k}=0 \\ &\frac{\partial u_i}{\partial t}+\left(u_k\frac{\partial}{\partial z_k}+\bar{u}_i\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right)u_i=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \bar{z}_i}+2\nu\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial \bar{z}_k}u_i \qquad (i,k=1,2) \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

及其共轭方程。

引入“流函数” ψ，其共轭为 $\bar{\psi}$，设

$$u_1=\frac{\partial\psi}{\partial z_2},\qquad u_2=-\frac{\partial\psi}{\partial z_1} \tag{4.11}$$

则同时应有

$$\bar{u}_1=\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial \bar{z}_2},\qquad \bar{u}_2=-\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial \bar{z}_1} \tag{4.12}$$

(4.11)式和(4.12)式使不可压缩条件 (4.6) 式自动满足。将 (4.11) 式和 (4.12) 式代入(4.10)式中的变形 Navier-Stokes 方程，有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z_2}\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z_2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z_1\partial z_2}-\frac{\partial\psi}{\partial z_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial z_2^2}+\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial \bar{z}_2}\frac{\partial^2\psi}{\partial \bar{z}_1\partial z_2}-\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial \bar{z}_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial z_2\partial \bar{z}_2}\right)$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \bar{z}_1}+2\nu\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial \bar{z}_k}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z_2}\right) \tag{4.13a}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z_1}\right)+\left(-\frac{\partial\psi}{\partial z_2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z_1^2}+\frac{\partial\psi}{\partial z_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial z_1\partial z_2}-\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{z}_2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z_1\partial\bar{z}_1}+\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{z}_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial z_1\partial\bar{z}_2}\right)$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\bar{z}_2}+2\nu\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial\bar{z}_k}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial z_1}\right)\tag{4.13b}$$

将(4.13a)式对$\bar{z}_2$求偏微分，(4.13b)式对$\bar{z}_1$求偏微分，然后两式相减，得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-2\nu\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial\bar{z}_k}\right)\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial\bar{z}_i}\psi$$

$$=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\psi}{\partial z_1} & \dfrac{\partial}{\partial z_1}\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial z_k\partial\bar{z}_k}\right)\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial z_2} & \dfrac{\partial}{\partial z_2}\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial z_k\partial\bar{z}_k}\right)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{z}_1} & \dfrac{\partial}{\partial\bar{z}_1}\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial z_k\partial\bar{z}_k}\right)\\ \dfrac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{z}_2} & \dfrac{\partial}{\partial\bar{z}_2}\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial z_k\partial\bar{z}_k}\right)\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial z_1\partial\bar{z}_k} & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial z_1\partial z_k}\\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial z_2\partial\bar{z}_k} & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial z_2\partial z_k}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial\bar{z}_1\partial\bar{z}_k} & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial\bar{z}_1\partial z_k}\\ \dfrac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial\bar{z}_2\partial\bar{z}_k} & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial\bar{z}_2\partial z_k}\end{vmatrix}\tag{4.14}$$

或

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-2\nu\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial\bar{z}_k}\right)\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial\bar{z}_i}\psi=\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\left[\frac{\partial\psi}{\partial z_1}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z_2\partial z_k}\right)-\frac{\partial\psi}{\partial z_2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z_1\partial z_k}\right)\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\left[\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{z}_1}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{z}_2\partial z_k}\right)-\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{z}_2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{z}_1\partial z_k}\right)\right]\qquad(k,i=1,2)\tag{4.15}$$

因而有

定理 5 不可压缩粘流动力学 Navier-Stokes 方程的解，可以用一个复未知量ψ来表示，这个复未知量ψ，满足方程(4.15)式。

可以看出，当$\psi=\bar{\psi}$和$z_k=\bar{z}_k$ $(k=1,2)$时，(4.15)式退化为不可压缩平面流的流函数方程。

对不可压缩蠕流动力学来说，方程(4.15)式等号左端为零。方程退化为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-2\nu\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial\bar{z}_k}\right)\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial\bar{z}_i}\psi=0\tag{4.16}$$

在以前的文章[36]中，我们用类似 Boussinesq[37]-Галеркин[38]和Папкович[39]-Neuber 的方法，曾经得到：

定理 6（文[36]的定理 1） 恒温各向同性条件下均匀不可压缩蠕流动力学以速度v_i和压强p表示的运动方程的通解，可以用下述组合的三个调和-扩散函数φ_i来表示：

$$v_i=\frac{\partial\phi}{\partial x_i}-\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_k}\varphi_i,\qquad p=\rho\left(\nu\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_k}-\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi\tag{4.17}$$

式中
$$\phi=\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_k},\quad\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_l}\left(\nu\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_k}-\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi_i=0$$

和

定理 7（文[36]的定理 2） 恒温各向同性条件下不可压缩蠕流动力学以速度v_i和压强p表示的运动方程的通解，可以用下述组合的三个扩散函数ψ_i来表示：

$$v_i=\frac{\partial\phi}{\partial x_i}-\psi_i,\qquad p=\rho\left(\nu\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_k}-\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi \tag{4.18}$$

式中

$$\phi=-\frac{1}{4\pi}\int_{\infty}\frac{d\xi_1d\xi_2d\xi_3}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2}}\left(\frac{\partial\psi_k}{\partial\xi_k}\right)$$

$$\left(\nu\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_k}-\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi_i=0$$

现在，由(4.16)式，可得

定理 8 与定理 6 相同条件下的蠕流动力学运动方程的通解，可以用一个满足调和-扩散方程的复变函数 ψ 来表示。

若令

$$\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial\bar{z}_k}\psi=\Psi\qquad(k=1,2) \tag{4.19}$$

则又有

定理 9 与定理 7 相同条件下的蠕流动力学运动方程的通解，可以用一个复扩散函数Ψ来表示。

五、等熵气体动力学方程组的简化

等熵气体动力学问题是流体力学中的另一中心。由于运动是高速度的，所以必须考虑压缩性；由于所考虑的空间是小范围的，所以可以忽略外场力；同时我们只讨论可以看作绝热过程的运动，并假设气体是完全理想的。因而基本方程组为：

连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k)=0 \tag{5.1}$$

Euler 方程

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{5.2}$$

等熵方程

$$\frac{\partial s}{\partial t}+v_k\frac{\partial s}{\partial x_k}=0\qquad(i,k=1,2,3) \tag{5.3}$$

理想气体的熵公式

$$s=c_V\ln\frac{p}{\rho^\gamma}+\text{const} \tag{5.4}$$

理想气体的状态方程

$$\frac{p}{\rho}=\frac{RT}{\mu} \tag{5.5}$$

式中，v_k $(k=1,2,3)$为气体的速度分量，p为压强，ρ 为气体密度，s 为熵，T 为绝对温度，μ 为 mol 质量，R为普适气体常数，c_V为定容比热，γ为比热比。

由于(5.3)式，(5.4)式和(5.5)式，可得声速 c 为（本文中的声速假定其为常数）

$$c^2=\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s=\gamma\frac{p}{\rho}=\gamma\frac{RT}{\mu}=\text{const} \tag{5.6}$$

从而等熵气体动力学的基本方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k)=0 & (5.7\text{a}) \\ \rho\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+v_k\dfrac{\partial}{\partial x_k}\right)v_i=-c^2\dfrac{\partial \rho}{\partial x_i} & (5.7\text{b}) \end{cases}$$

方程组(5.7)式共四个方程，含有四个未知函数 ρ 和 v_i $(i=1,2,3)$。

我们现在来研究方程组(5.7)式。首先研究连续性方程。在这里我们不用引入 Kaluza “鬼”坐标。我们设

$$V_i=\rho v_i \quad (i=1,2,3), \qquad V_4=\rho \tag{5.8}$$

则有

$$v_i=\frac{V_i}{V_4} \quad (i=1,2,3) \tag{5.9}$$

将(5.8)式代入(5.7a)式，并令

$$x_4=t \tag{5.10}$$

从而

$$v_4=\frac{dx_4}{dt}=1 \tag{5.11}$$

此时连续性方程(5.7a)式成为

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\alpha}=0 \quad (\alpha=1,2,3,4) \tag{5.12}$$

其次我们研究运动方程(5.7b)式。将(5.9)式，(5.10)式和（5.8）式代入算符

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)$$

有

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)&=V_4\left(\frac{V_k}{V_4}\frac{\partial}{\partial x_k}+\frac{\partial}{\partial x_4}\right)\\ &=V_k\frac{\partial}{\partial x_k}+V_4\frac{\partial}{\partial x_4}=V_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\end{aligned} \tag{5.13}$$

$$(k=1,2,3; \quad \alpha=1,2,3,4)$$

从而 Euler 方程(5.7b)式化为

$$V_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{V_i}{V_4}\right)=-c^2\frac{\partial V_4}{\partial x_i} \quad (i=1,2,3; \ \alpha=1,2,3,4) \tag{5.14}$$

(5.12)式和(5.14)式是我们研究问题的出发点。

用与前面相同的方法。设

$$|z\rangle=\frac{1}{2}\gamma_\alpha|x_\alpha\rangle, \quad |u\rangle=\frac{1}{2}\gamma_\alpha|V_\alpha\rangle \tag{5.15}$$

则(5.12)式变为与(4.6)式相同的形式：

$$\frac{\partial u_k}{\partial z_k}+\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \bar{z}_k}=0 \quad (k=1,2) \tag{5.16}$$

而(5.14)式变为

$$\left(u_k\frac{\partial}{\partial z_k}+\bar{u}_k\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right)\frac{1}{V_4}\begin{pmatrix} iu_1+iu_2-i\bar{u}_1-i\bar{u}_2 \\ -u_1+u_2-\bar{u}_1+\bar{u}_2 \\ iu_1-iu_2-i\bar{u}_1+i\bar{u}_2 \end{pmatrix}$$

$$=-c^2\begin{pmatrix} -i\frac{\partial}{\partial z_1}-i\frac{\partial}{\partial z_2}+i\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}+i\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \\ -\frac{\partial}{\partial z_1}+\frac{\partial}{\partial z_2}-\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \\ -i\frac{\partial}{\partial z_1}+i\frac{\partial}{\partial z_2}+i\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}-i\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \end{pmatrix}V_4 \tag{5.17}$$

(5.17)式共有三个方程。将其中第一个方程和第三个方程等号两边同时乘以 $-i$，有

$$\left(u_k\frac{\partial}{\partial z_k}+\bar{u}_k\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right)\frac{1}{V_4}\begin{pmatrix} u_1+u_2-\bar{u}_1-\bar{u}_2 \\ -u_1+u_2-\bar{u}_1+\bar{u}_2 \\ u_1-u_2-\bar{u}_1+\bar{u}_2 \end{pmatrix}$$

$$=-c^2\begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial z_1}-\frac{\partial}{\partial z_2}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \\ -\frac{\partial}{\partial z_1}+\frac{\partial}{\partial z_2}-\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \\ -\frac{\partial}{\partial z_1}+\frac{\partial}{\partial z_2}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}-\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \end{pmatrix}V_4 \tag{5.18}$$

为了看得更清楚一些，我们将(5.18)式三个方程的第一式和第二式，第二式和第三式，第三式和第一式分别相加，得到方程组

$$\left(u_k\frac{\partial}{\partial z_k}+\bar{u}_k\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right)\frac{1}{V_4}\begin{pmatrix} -\bar{u}_1+u_2 \\ -\bar{u}_1+\bar{u}_2 \\ -\bar{u}_1+u_1 \end{pmatrix}=-c^2\begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial z_1}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \\ -\frac{\partial}{\partial z_1}+\frac{\partial}{\partial z_2} \\ -\frac{\partial}{\partial z_1}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \end{pmatrix}V_4 \tag{5.19}$$

由(5.19)式可以看出，(5.19)式要成立的充分条件为

$$\left(u_k\frac{\partial}{\partial z_k}+\bar{u}_k\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right)\frac{1}{V_4}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix}=-c^2\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \\ \frac{\partial}{\partial z_1} \\ \frac{\partial}{\partial z_2} \end{pmatrix}V_4$$

即

$$\left(u_k\frac{\partial}{\partial z_k}+\bar{u}_k\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right)\frac{1}{V_4}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=-c^2\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_2}\end{pmatrix}V_4 \tag{5.20}$$

和它们的共轭方程组。

将 $V_4=\dfrac{1}{2}(u_1+u_2+\bar{u}_1+\bar{u}_2)$ (5.21)

代入(5.20)式，使(5.20)式变为关于 u_i 和 $\bar{u}_i$ $(i=1,2)$ 的方程组

$$4\left(u_k\frac{\partial}{\partial z_k}+\bar{u}_k\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right)\frac{\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}}{u_1+u_2+\bar{u}_1+\bar{u}_2}=-c^2\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_2}\end{pmatrix}(u_1+u_2+\bar{u}_1+\bar{u}_2) \tag{5.22}$$

将(5.22)式方程组的第一式对 $\bar{z}_2$ 求偏微分，第二式对 $\bar{z}_1$ 求偏微分，然后两式相减，得

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}\left(u_k\frac{\partial}{\partial z_k}+\bar{u}_k\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right)\frac{u_1}{u_1+u_2+\bar{u}_1+\bar{u}_2}-\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\left(u_k\frac{\partial}{\partial z_k}+\bar{u}_k\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right)\frac{u_2}{u_1+u_2+\bar{u}_1+\bar{u}_2}=0\qquad(k=1,2) \tag{5.23}$$

从而我们的基本方程组成为(5.16)式和(5.23)式，即

$$\frac{\partial u_k}{\partial z_k}+\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \bar{z}_k}=0 \tag{5.24a}$$

$$\begin{matrix}\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\left(u_k\dfrac{\partial}{\partial z_k}+\bar{u}_k\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right) & \dfrac{u_1}{u_1+u_2+\bar{u}_1+\bar{u}_2}\\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_2}\left(u_k\dfrac{\partial}{\partial z_k}+\bar{u}_k\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right) & \dfrac{u_2}{u_1+u_2+\bar{u}_1+\bar{u}_2}\end{matrix}=0 \tag{5.24b}$$

由(5.24a)式，我们引入"流函数" ψ

$$\left.\begin{aligned}&u_1=\frac{\partial\psi}{\partial z_2},\qquad u_2=-\frac{\partial\psi}{\partial z_1}\\ \text{同时}\quad &\bar{u}_1=\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial \bar{z}_2},\qquad \bar{u}_2=-\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial \bar{z}_1}\end{aligned}\right\} \tag{5.25}$$

(5.25)式使(5.24a)式恒满足。将(5.25)式代入(5.24b)式，得到

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}-\frac{\partial\psi}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}+\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial \bar{z}_2}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}-\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial \bar{z}_1}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}\right)\left(\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial z_1}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial z_2}-\dfrac{\partial\psi}{\partial z_1}+\dfrac{\partial\bar{\psi}}{\partial \bar{z}_2}-\dfrac{\partial\bar{\psi}}{\partial \bar{z}_1}}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}-\frac{\partial\psi}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}+\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial \bar{z}_2}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}-\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial \bar{z}_1}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}\right)\left(\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial z_2}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial z_2}-\dfrac{\partial\psi}{\partial z_1}+\dfrac{\partial\bar{\psi}}{\partial \bar{z}_2}-\dfrac{\partial\bar{\psi}}{\partial \bar{z}_1}}\right)=0 \tag{5.26}$$

从而我们有

定理10 等熵空气动力学方程组的解，可以用一个复未知量ψ来表示；这个复未知量，满足方程(5.26)式。

参考文献

[1] 钱伟长、叶开沅，《弹性力学》，科学出版社(1956).

[2] 沈惠川，动力应力函数张量，应用数学和力学，**3**，6(1982)，829—834.

[3] 沈惠川，动力应力函数张量及弹性静力学的通解，中国科学技术大学学报，**14**，增刊1，JCUST 84016(1984)，95—102.

[4] Ландау Л. Д. и Е. М. Лифшиц，《连续介质力学》，彭旭麟译，人民教育出版社(1958).
Ландау Л. Д. и Е. М. Лифшиц，《流体力学》，孔祥言、徐燕侯、庄礼贤译，高等教育出版社(1983—1984).

[5] Prandtl, L., K. Oswatitsch and K. Wieghardt，《流体力学概论》，郭永怀、陆士嘉译，科学出版社(1981).

[6] Oswatitsch, K.，《气体动力学》，徐华舫译，科学出版社(1965).

[7] 钱学森，《气体动力学诸方程》，《气体动力学基本原理A编》，徐华舫译，科学出版社(1966).

[8] 谷内俊弥、西原功修，《非线性波动》，徐福元等译，原子能出版社(1981).

[9] Eckhaus, W. and A. van Harten，《逆散射变换和孤立子理论》，黄迅成译，陈以鸿校，上海科学技术文献出版社(1984).

[10] 沈惠川，弹性大挠度问题von Kármán方程与量子本征值问题Schrödinger方程的关系，应用数学和力学，**6**，8(1985)，711—724.

[11] 沈惠川，薄壳理论中的Schrödinger方程，应用数学和力学，**6**，10(1985)，887—900.

[12] 华罗庚，《高等数学引论》，一卷一分册，科学出版社(1963)，20.

[13] Курош А. Г., *Лекции по Общей Алгебре*, Физматгиз, М. (1962). 中译本，《一般代数讲义》，刘绍学译，上海科学技术出版社(1964).

[14] Курош А. Г., *Курс Высшей Алгебры*, Гостехиздат, М. (1956). Физматгиз(1959). 中译本，《高等代数讲义》，柯召译，人民教育出版社(1962).

[15] 吴品三，复数、四元数、八元数，数学通报，8(1964)，32.

[16] Балтага В. К., *Комплексные Числа*, Харъков, Изд-Вохарък, ун-та (1959). 其附录中译文载《数学通报》，8(1963)，36.

[17] Hamilton, W. R., *Lectures on Quaternions*, Dublin, Hodges and Smith. (1853).

[18] Hamilton, W. R., *Elements of Quaternions*, Chelsea, N. Y. (1969).

[19] Klein, F., *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint; Arithmetic, Algebra, Analysis*, Tr. from the 3rd German ed. by E. R. Hedrick and A. Nöble, Dover, n. d., N. Y. (1924).

[20] 万哲先、杨劲根，四元整数环上二维线性群的自同构，数学年刊，**2**，3(1981)，387—397.

[21] 万哲先、杨劲根，四元整数环上的二维射影线性群的自同构，数学年刊，**3**，3(1982)，395—402.

[22] Бранец В. Н. и И. П. Шмыглевский, *Применение Кватернионов в Задачах Ориентации Твердого Тела*, Издателъство, Наука, М. (1973). 中译本，《四元数在刚体定位问题中的应用》，梁振和译，国防工业出版社(1977).

[23] 沈惠川，单色弹性波谱的分裂，应用数学和力学，**5**，4(1984)，541—551.

[24] 沈惠川，弹性基上的薄板在侧向动载荷、中面力和外场联合作用下的小挠度弯曲，应用数学和力学，**5**，6(1984)，817—827.

[25] 沈惠川，理想塑性问题中的一般方程，双调和方程和本征方程，应用数学和力学，7,1 (1986)，61—72.

[26] 冯元桢，《连续介质力学导论》，李松年、马和中译，科学出版社 (1984).

[27] Фихтенгольц Г. М., *Основы Математического Анализа*, Государственное Издательство Технико-Теоретической Литературы (1956—1957). 中译本，《数学分析原理》. 吴亲仁等译，人民教育出版社 (1959).

[28] Dirac, P. A. M.,《量子力学原理》. 陈咸亨译，科学出版社 (1965).

[29] Flügge, S.,《实用量子力学》，宋孝同等译，人民教育出版社 (1981—1983).

[30] Claude, C-T. et al., *Quantum Mechanics*, 2, Tr. from French by S. R. Hemley et al., Wiley, N. Y. (1977).

[31] Duffin, R. J., On the characteristic matrices of covariant systems, *Phys. Rev.*, **54** (1938), 1114.

[32] Kemmer, N., The particle aspect of meson theory, *Proc. Roy. Soc.*, **173** (1939), 91—116.

[33] Kaluza, Th, *Sitzungsber. d. Preuss, Akad. d. Wiss* (1921), 966. 见 P. G. Bergmann, *Introduction to the Theory of Relativity*, Prentice-Hall (1958). 中译本，《相对论引论》，周奇、郝革译，第17章，人民教育出版社 (1961), 254.

[34] *Theodore von Kármán Anniversary Volume*, Pasadena (1941), 212.

[35] Synge, J. L. and Chien Wei-zang (钱伟长), The intrinsic theory of elastic shells and plates, *Appl. Mech., Th. von Kármán Annivers. Vol.* (1941), 103—120.

[36] 沈惠川，均匀不可压缩蠕流动力学的通解，自然杂志，7, 10 (1984), 799; 7, 12 (1984), 940.

[37] Boussinesq, J., Applications des potentiels á l'étnde de l'equilibre et du mouvement des solides élastiques, Paris (1885).

[38] Галёркин Б. Г., К общему решению задачи теории упругости в трех измерениях с помощью функций напряжении и меремещений, Дан. СССР. серия А. (1931), 281—286.

[39] Папкович П. Ф., Обзор некоторых общих решений основых дифференциальных уравнений покоя изотронного упругого тела, *ПММ.*, 1, 1 (1937), 117—132.

The Theory of Functions of a Complex Variable under Dirac-Pauli Representation and Its Application in Fluid Dynamics (I)

Shen Hui-chuan

(University of Science and Technology of China, Hefei)

Abstract

In this paper:

(A) We cast aside the traditional quaternion theory and build up the theory of functions of a complex variable under Dirac-Pauli representation. Thus the multivariate and multidimensional problems become rather simple.

(B) We simplify the Navier-Stokes equation of incompressible viscous fluid dynamics and the equations group of isentropic aerodynamics by theory of functions of a complex variable under Dirac-Pauli representation. And the above-equations, as central problems of fluid dynamics, are classified as the nonlinear equation with only one complex unknown function.