

# 二维升力体的非线性振动\*

汪 懋 骅

(北京航空学院, 1985年1月29日收到)

## 摘 要

本文给出了二维升力体非线性振动的解析解答.

## 一、引 言

流动流体中物体的振动问题, 长期以来一直受到人们的注意. 然而由于数学上的困难始终未能获得解析解答. 问题的解决总是依赖于经验表示和繁杂的数值解法. 有关这方面的情况见文献[1]. 对于在Karman 涡激励下发生振动的物体, 本文建立了非线性微分方程, 并求出其解答. 为了说明问题, 将解析结果与文献[1]的数值解法和试验结果作了比较.

## 二、控 制 方 程

不失一般性, 考虑一个圆柱在均匀流场中的振动, 如图1所示.

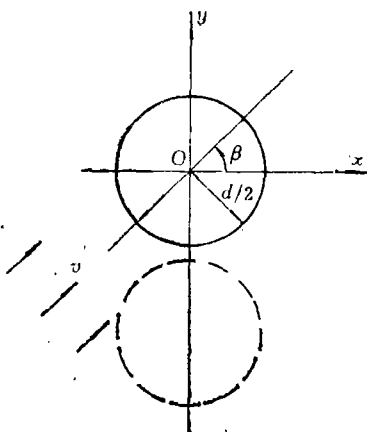


图 1

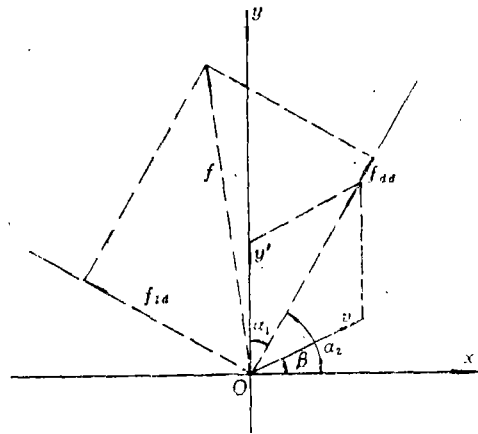


图 2

直径为  $d$  的圆柱沿  $y$  轴方向作振动. 流体以速度  $v$  沿与  $x$  轴正向成  $\beta$  角方向流动.

处于静态的圆柱受到推力为

$$f_{ds} = 0.5\rho C_d F v^2 \quad (2.1)$$

\* 钱伟长推荐.

而升力为

$$f_{ls} = 0.5\rho C_l F v^2 \sin \lambda_s t \quad (2.2)$$

其中  $\rho$  为流体的密度;  $F$  为垂直于流体流动方向的柱体的投影面积;  $C_d$  为推力系数;  $C_l$  为升力系数;  $\lambda_s = 2\pi sv/d$  为静态的 Karman 涡发射频率;  $s$  为 Strouhal 数;  $t$  为时间。

当柱体发生  $y$  轴向振动时, 如图 2 所示。

振动柱体受到的推力为

$$f_{da} = 0.5\rho C_d F (y'^2 + 2y'v \sin \beta + v^2) \quad (2.3)$$

而升力为

$$f_{la} = 0.5\rho C_l F (y'^2 + 2y'v \sin \beta + v^2) \sin \lambda t \quad (2.4)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = C_l \sin \lambda t / C_d \quad (2.5)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{y' + v \sin \beta}{v \cos \beta} \quad (2.6)$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \operatorname{arctg} \left( \frac{C_l \sin \lambda t}{C_d} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{y' + v \sin \beta}{v \cos \beta} \right) \quad (2.7)$$

其中  $y' = dy/dt$ ;  $\lambda$  为振动态时的 Karman 涡发射频率。

由式 (2.3) 和 (2.4) 可知柱体受到的合力为

$$\begin{aligned} f &= (f_{da}^2 + f_{la}^2)^{1/2} \\ &= 0.5\rho F (y'^2 + 2y'v \sin \beta + v^2) \sqrt{C_d^2 + C_l^2 \sin^2 \lambda t} \end{aligned} \quad (2.8)$$

于是柱体的振动方程为

$$m y'' + C y' + K y = f \cdot \sin \alpha \quad (2.9)$$

其中  $y'' = d^2y/dt^2$ ;  $m, C$  和  $K$  分别为柱体的质量, 阻尼和刚度。

将式 (2.7) 和 (2.8) 代入 (2.9) 整理得

$$\begin{aligned} m y'' - 0.5\rho C_d F y' \sqrt{y'^2 + 2y'v \sin \beta + v^2} + C y' - 0.5\rho v F (C_l \cos \beta \sin \lambda t \\ + C_d \sin \beta) \sqrt{y'^2 + 2y'v \sin \beta + v^2} + K y = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

这就是升力体振动的非线性微分方程。

### 三、解 答

当初始条件为

$$\begin{cases} y|_{t=0} = y_0 \\ y'|_{t=0} = y'_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

非线性微分方程 (2.10) 的解答是

$$\begin{aligned} y &= D \exp \left[ -\frac{C}{2m} t \right] \cdot \cos(\omega_n t - \alpha_n) \\ &+ \frac{0.5\rho v^2 F \left\{ C_l \cos \beta \sin \left[ \frac{\pi s v ((4n+1)\pi + 2\varphi)}{\omega d} \right] + C_d \sin \beta \right\}}{(K - m\omega^2)} \sin(\omega t - \varphi) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\sin \lambda t = \left\{ \frac{A \sin \omega t}{0.5 \rho F \sqrt{\left[ G(t) + \frac{A \omega}{B} \cos(\omega t - \varphi) \right]^2 + 2 \left[ G(t) + \frac{A \omega}{B} \cos(\omega t - \varphi) \right] v \sin \beta + v^2}} - C_d \left[ G(t) + \frac{A \omega}{B} \cos(\omega t - \varphi) + v \sin \beta \right] \right\} \cdot (C_l v \cos \beta)^{-1} \quad (3.3)$$

其中

(1)  $\omega$  是方程

$$\cos \beta \cdot \sin \left\{ \frac{2 \pi s v \left[ (2n+1) \pi + \operatorname{arctg} \left( \frac{C \omega}{K - m \omega^2} \right) \right]}{\omega d} \right\} \cdot \cos \left( \frac{\pi^2 s v}{\omega d} \right) + \frac{C_d}{C_l} \sin \beta = 0 \quad (3.4)$$

的解。

$$(2) \quad \omega_h = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{C^2}{4m^2}} \quad (3.5)$$

$$D = \sqrt{\left( y_0 + \frac{A}{B} \sin \varphi \right)^2 + \left[ \frac{y'_0}{\omega_h} - \frac{A \omega}{B \omega_h} \cos \varphi + \frac{C}{2m \omega_h} \left( y_0 + \frac{A}{B} \sin \varphi \right) \right]^2} \quad (3.6)$$

$$\alpha_h = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\left[ \frac{y'_0}{\omega_h} - \frac{A \omega}{B \omega_h} \cos \varphi + \frac{C}{2m \omega_h} \left( y_0 + \frac{A}{B} \sin \varphi \right) \right]}{\left( y_0 + \frac{A}{B} \sin \varphi \right)} \right\} \quad (3.7)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{C \omega}{K - m \omega^2} \right) \quad (3.8)$$

$$A = 0.5 \rho v^2 F \left\{ C_l \cos \beta \sin \left[ \frac{\pi s v \left( (4n+1) \pi + 2\varphi \right)}{\omega d} \right] + C_d \sin \beta \right\} / \cos \varphi \quad (3.9)$$

$$B = \sqrt{(K - m \omega^2)^2 + C^2 \omega^2} \quad (3.10)$$

$$G(t) = D \exp \left[ -\frac{Ct}{2m} \right] \left\{ -\frac{C}{2m} \cos(\omega_h t - \alpha_h) - \omega_h \sin(\omega_h t - \alpha_h) \right\} \quad (3.11)$$

(3)  $n$  是一个较大的正整数，它应满足

$$n \geq \frac{m \omega}{C \pi} \ln p \quad (3.12)$$

解答的误差就在  $1/p$  左右。

#### 四、讨 论

(1) 由式(3.4)可知  $\beta$  满足

$$-\frac{C_l}{C_d} \leq \operatorname{tg} \beta \leq \frac{C_l}{C_d} \quad (4.1)$$

时，振动才会发生。

(2) 对于已给的  $\rho, m, C, K, d, C_l, C_d, v, s$  和  $\beta$  可由式(3.4)~(3.11) 求出  $\omega, \omega_h, D, \alpha_h, \varphi, A, B$  和  $G(t)$ ，将它们分别代入式(3.2)和(3.3) 就得振动的位移表示和 Karman 涡发射频率。

(3) 由式(3.2) 可求得共振频率为

$$\omega_R = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (4.2)$$

(4) 除 $v$ 外的其它条件给定时, 将式(4.2)代入(3.4)可求得发生共振时的体流速度 $v_R$ 。

(5) 除 $v$ 和 $\beta$ 外的其它条件给定时, 将式(4.2)代入(3.4)可求得发生共振时的流体速度和迎角的系关曲线, 即 $v_R \sim \beta_R$ 曲线。容易证明 $\beta_R=0$ 时,  $v_R$ 取最小值。

(6) 举例

令  $\omega_0^2 = K/m$ ,  $C/m = 2\eta\omega_n$ ,  $a = \rho F d^2 / 8\pi^2 s m$ 。

已知:  $\beta=0$ ,  $a=0.00166$ ,  $C_l=0.5$ ,  $C_d=1$ ,  $\eta=0.00144$ ,  $s=0.198$ 。

取 $n=2040$ , 将 $\lambda_s/2\pi s\omega_n$  (即 $v/\omega_n d$ )和 $\omega/\omega_n$ 相应值, 由式(3.4)计算出列于表1。

将表1中结果与文献[1]的结果及

其试验结果绘于图3中。

表1

$\lambda_s/2\pi s\omega_n$	$\omega/\omega_n$
0.6	0.74498252
0.7	0.86999790
0.8	0.97007285
0.9	0.97203327
1.0	0.97472903
1.1	0.97797257
1.12	0.98506645
1.13	1.31495585
1.2	1.45997820
1.3	1.55996658
1.4	1.66112342

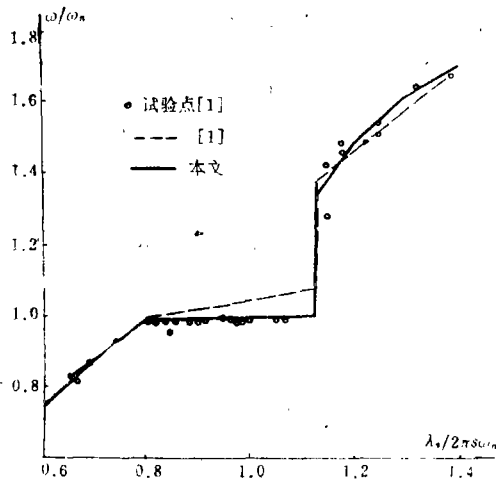


图 3

## 五、结 论

本文求得非线性微分方程(2.10)的解析解答, 因此经验表示和数值解法不再是必要的了。

## 参 考 文 献

- [1] Iyengar, R. N. and O. Mahrenholtz, Nonlinear oscillations of a vortex excited cylinder in wind, *Solid Mechanics Archives*, 7, 4 (1982), 411-432.

## Nonlinear Oscillation of a Two-Dimensional Lift Body

Wang Mao-hua

(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics, Beijing)

### Abstract

It is very difficult to obtain an exact analytical solution to a nonlinear ordinary differential equation, so till now analytical solutions are rare in this area. The author has obtained the exact analytical solutions of this type of nonlinear oscillations. In this paper as an example, the exact analytical solution of nonlinear oscillation of a two-dimensional lift body, which has attracted the attention of research workers for a long time, is given.