应用数学和力学，第7卷第3期（1986年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

曲边区域内对流扩散奇异摄动问题的一致差分解法

盛 秦

（苏州大学数学系，1985年1月24日收到）

摘 要

本文构造并讨论了凸曲边区域内对流扩散奇异摄动问题的差分格式及其解的一致收敛性，并证明了解的一致收敛阶为 $O(h^{\beta}+\tau^{\beta/2})$ $(0<\beta<1/2)$．其中 h，τ 分别为空间和时间方向的网格步长．

一、引 言

在对流扩散问题中我们常常会遇到这样一类方程：它们在高阶导数项含有小参数 ε，由于当 ε 很小时问题的解具有所谓的边界层奇性，这时使用普通差分格式求解时往往会出现数值不稳定或将产生关于小参数 ε 的非一致收敛性．因而需要构造新的适应边界层奇性的差分格式．近年来国内外在这方面出现了不少研究成果，特别是研究解的渐近性质．如 B. A. Треногин[1]，M. Zlámal[2,3]，C. L. Holland[4]，J. G. Besjes[5]，苏煜城和吴启光[10]，L. Bobisud[6]等．1978年 Г. И. Шишкин[7] 构造并讨论了曲边区域内椭圆型问题的一致差分格式；1980年 D. J. Duffy[8] 又发表了矩形区域内对流扩散问题的差分格式并证明了其解的一致收敛性．

本文在前人工作的基础上构造并讨论了在凸曲边区域内对流扩散问题的差分格式及其解的一致收敛性，并证明了一致收敛阶为 $O(h^{\beta}+\tau^{\beta/2})$ $(0<\beta<1/2)$，h，τ 分别为 x、t 方向的网格步长．

二、摄动问题及其渐近分析

1、 摄动问题

我们在凸曲边区域

$$D=\{(x,\ t):\psi_1(t)<x<\psi_2(t),\ 0<t\leqslant T\}$$

内考虑抛物型微分方程问题：

$$L_{\varepsilon}[u]\equiv\varepsilon a(x,\ t)u_{xx}-u_t-b(x,\ t)u_x-c(x,\ t)u=f(x,\ t)\qquad((x,t)\in D)\qquad(2.1)$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x,\ 0)=\varphi(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant 1) \\ u(\psi_1(t),\ t)=s_1(t);\ u(\psi_2(t),\ t)=s_2(t) \qquad (0\leqslant t\leqslant T) \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

其中$\varepsilon>0$为小参数，$\psi_1(t)$、$\psi_2(t)$、$s_1(t)$、$s_2(t)$、$\varphi(x)$及$a(x,\ t)$、$b(x,\ t)$、$c(x,\ t)$、$f(x,t)$皆为x、t的二次连续可微的实函数，并满足下列条件：

$$\psi_1(0)=0,\ \psi_2(0)=1 \tag{2.3}$$

$$\varphi(0)=s_1(0),\ \varphi(1)=s_2(0) \tag{2.4}$$

$$a(x,\ t)\geqslant \inf_{(x,t)\in D}\{a(x,\ t)\}>0;\ c(x,\ t)\geqslant \inf_{(x,t)\in D}\{c(x,\ t)\}>0 \tag{2.5}$$

此外为确定起见，我们假定

$$b(x,\ t)>0 \qquad ((x,\ t)\in D) \tag{2.6}$$

并假定

$$\dot{\psi}_2(t)\leqslant 0 \qquad (0<t\leqslant T) \tag{2.7}$$

我们将D的边界$\Gamma=\bar{D}\backslash D$划分为$\Gamma_0=\{(x,\ t):\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ t=0\}$，$\Gamma_1=\{(x,\ t):x=\psi_1(t),\ 0\leqslant t<T\}$，$\Gamma_2=\{(x,\ t):\ x=\psi_2(t),\ 0\leqslant t<T\}$。

引理 1　设$\Phi(x,\ t)$、$\Psi(x,\ t)$为定义在$\bar{D}$上的函数且对x至少两次可微，对t至少一次可微。如果成立关系：

i)　$|L_\varepsilon[\Phi]|\leqslant -L_\varepsilon[\Psi]$　　$((x,\ t)\in D)$

ii)　$|\Phi|\leqslant\Psi$　　$((x,\ t)\in\Gamma)$

则有

$$|\Phi|\leqslant\Psi \qquad ((x,\ t)\in\bar{D})$$

2、 退化问题

根据上一节中的假定，退化问题的提法如下：

$$L_0[w]=-w_t-b(x,\ t)w_x-c(x,\ t)w=f(x,\ t) \qquad ((x,\ t)\in D) \tag{2.8}$$

$$\begin{array}{l} w(x,\ 0)=\varphi(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant 1) \\ w(\psi_1(t),\ t)=s_1(t) \qquad (0\leqslant t<T) \end{array} \tag{2.9}$$

我们假定(2.8)的特征线不与Γ_0、Γ_1或Γ_2相重合。对于上述一阶方程的初、边值问题，一般而言其解无法同时满足原摄动问题在Γ_2上的定解条件。在Γ_2附近摄动问题的解u变化很快，当$\varepsilon\to 0$时不能在全域上一致逼近于退化问题的解。

引理 2　若函数$b(x,\ t)$、$c(x,\ t)$、$f(x,\ t)$及$\varphi(x)$、$s_1(t)$满足如下相容性条件：

i)　$s_1'(0)+c(0,\ 0)s_1(0)+(b(0,\ 0)-\psi_1'(0))\varphi'(0)=-f(0,\ 0)$

ii)
$$\begin{aligned} &\frac{1}{b(0,\ 0)-\psi_1'(0)}\{\psi_1'(0)f_x(0,\ 0)+f_t(0,\ 0)+(\psi_1'(0)c_x(0,\ 0) \\ &\quad +c_t(0,\ 0))s_1(0)+c(0,\ 0)s_1'(0)+s_1''(0)\} \\ &+\frac{1}{(b(0,0)-\psi_1'(0))^2}\{b_x(0,\ 0)\psi_1'(0)+b_t(0,0)+(\psi_1'(0)-b(0,0)) \\ &\quad\cdot(\psi_2'(0)-\psi_1'(0))-\psi_1''(0)\}\{-f(0,0)-c(0,0)s_1(0)-s_1'(0)\} \\ &+\frac{1}{b(0,\ 0)-\psi_1'(0)}\{c(0,\ 0)+b_x(0,0)-\psi_2'(0)+\psi_1'(0)\}\{f(0,\ 0) \end{aligned}$$

$$+c(0,0)s_1(0)+s_1'(0)\}-(b(0,\ 0)-\psi_1'(0))\varphi''(0)$$
$$=f_x(0,\ 0)+c_x(0,0)s_1(0)$$

则退化问题的解w在$\bar{D}$上二次连续可微，即成立估计式

$$\left|\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial t^j}w\right|\leqslant M \qquad ((x,\ t)\in D;\ i,\ j=0,1,2;\ i+j\leqslant 2)$$

此处及以下出现的常数M均与ε、x、t及步长h、τ无关。

3、 渐近解的构造

设k为Γ_2的最小曲率半径，T_2为Γ_2的k邻域与D的交集。我们在T_2中定义函数$\alpha=\alpha(x,\ t)$ $((x,\ t)\in T_2)$，其值为x轴正向与过$(x,\ t)\in T_2$的Γ_2的内法线方向之间的夹角。再引入参变量θ $(0\leqslant\theta\leqslant T)$，则$\Gamma_2$关于$\theta$的参数方程可写为

$$\left.\begin{aligned}&x=\psi_2(\theta)\\&t=\theta\end{aligned}\quad(0\leqslant\theta<T)\right\}\tag{2.10}$$

因而对任意$(x,\ t)\in T_2$可唯一表示为

$$\left.\begin{aligned}&x=\psi_2(\theta)-\rho[1+\dot{\psi}_2^2(\theta)]^{-\frac{1}{2}}\\&t=\theta+\rho\dot{\psi}_2(\theta)[1+\dot{\psi}_2^2(\theta)]^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad((x,\ t)\in T_2)\right\}\tag{2.11}$$

同时有$\dot{\psi}_2(\theta)=-\mathrm{tg}\,\alpha$。其中$\rho$为过该点的$\Gamma_2$的内法线在该点与$\Gamma_2$之间的长度。

由此，按Λ-B方法我们可得摄动问题(2.1)、(2.2)解的渐近表示

$$u_\varepsilon(x,\ t)=w_0(x,\ t)+\varepsilon w_1(x,\ t)+z(\psi_2(t)-t)\{v_0(x,\ t)+\varepsilon v_1(x,\ t)\}\qquad((x,\ t)\in\bar{D})\tag{2.12}$$

其中w_i由问题

$$\left.\begin{aligned}&-(w_i)_t-b(x,\ t)(w_i)_x-c(x,\ t)w_i=f_{i-1}(x,\ t)\qquad((x,\ t)\in D)\\&w_i(x,\ 0)=\varphi_{i-1}\qquad(0\leqslant x\leqslant 1)\\&w_i(\psi_1(t),\ t)=\sigma_{i-1}\qquad(0\leqslant t<T)\end{aligned}\right\}\tag{2.13}$$

$f_{-1}=f(x,\ t)$，$f_0=-a(x,\ t)(w_i)_{xx}$；$\varphi_{-1}=\varphi(x)$，$\varphi_0=0$；$\sigma_{-1}=s_1(t)$，$\sigma_0=0$ $(i=0,1)$，求得，

$$v_i=p_i\exp\left\{-\frac{b(\psi_2(\theta),\ \theta)+\mathrm{tg}\,\alpha}{\varepsilon a(\psi_2(\theta),\ \theta)}[\psi_2(\theta)-x+(\theta-t)\mathrm{tg}\alpha]\right\}\tag{2.14}$$

其中$p_0=s_2(t)-w_0(\psi_2(t),\ t)$，$p_1$为Lyusternick-Vishik多项式，$i=0,\ 1$，$z(y)$为平滑函数

$$z(y)=\begin{cases}1 & (y\leqslant k)\\0 & (y>k+\delta)\end{cases}\tag{2.15}$$

其中$\delta>0$为任意取定的小常数，且对一切$y\geqslant 0$有$0\leqslant z(y)\leqslant 1$及$z(y)\in C^\infty(0,\ \infty)$。我们有

引理 3 设$u=u(x,\ t)$为(2.1)、(2.2)的解。则在满足引理2中的相容性条件时对任意的$(x,\ t)\in\bar{D}$有

$$|u-u_\varepsilon|\leqslant M\varepsilon$$

三、差分方程及其解的一致收敛性

1、 差分格式的建立

取$\bar{D}$上网格$\overline{W}_{h\tau}$。其结点为$x=x_i=ih$, $t=t_j=j\tau$ ($i=0$, ±1, ±2, $\cdots$; $j=0$, 1, 2, $\cdots$; J, $\tau J=T$) 在D内的交点及其与Γ交点的全体。并记其边界结点全体为$\Gamma_{h\tau}=\overline{W}_{h\tau}\cap\Gamma$，内部结点全体为$W_{h\tau}=\overline{W}_{h\tau}\backslash\Gamma_{h\tau}$，且$mh^2\leqslant\tau\leqslant Mh^2$, $0<m\leqslant M$。记点$(x, t)\in W_{h\tau}$与其左、右、下邻点的距离分别为h^-、h^+、τ^-。

我们用以下差分方程问题来逼近(2.1)、(2.2)：

$$L_{h\tau}u^{h\tau}=a(x, t)\gamma(x, t)u^{h\tau}_{\bar{x}\hat{x}}-u^{h\tau}_{\bar{t}}-b(x, t)u^{h\tau}_{\mathring{x}}-c(x, t)u^{h\tau}=f(x, t) \qquad ((x, t)\in M_{h\tau}) \tag{3.1}$$

$$\left.\begin{aligned} &u^{h\tau}(x, 0)=\varphi(x)\\ &u^{h\tau}(\psi_1(t), t)=s_1(t); \ u^{h\tau}(\psi_2(t), t)=s_2(t)\end{aligned}\quad ((x, t)\in\Gamma_{h\tau})\right\} \tag{3.2}$$

其中

$$u^{h\tau}_{\bar{x}\hat{x}}=\frac{2}{h^++h^-}\left(\frac{u^{h\tau}(x+h^+, t)-u^{h\tau}(x, t)}{h^+}-\frac{u^{h\tau}(x, t)-u^{h\tau}(x-h^-, t)}{h^-}\right)$$

$$u^{h\tau}_{\bar{t}}=\frac{u^{h\tau}(x, t)-u^{h\tau}(x, t-\tau^-)}{\tau^-}, \qquad u^{h\tau}_{\mathring{x}}=\frac{u^{h\tau}(x+h^+, t)-u^{h\tau}(x-h^-, t)}{h^++h^-}$$

记$a=a(\psi_2(\theta), \theta)$, $b=b(\psi_2(\theta), \theta)$, $c=c(\psi_2(\theta), \theta)$，将边界层函数

$$v=\exp\left\{-\frac{b-\dot{\psi}_2(\theta)}{\varepsilon a}[\psi_2(\theta)-x+(\theta-t)\operatorname{tg}\alpha]\right\} \tag{3.3}$$

代入相应的齐次差分方程：

$$a\gamma(x, t)v_{\bar{x}\hat{x}}-v_{\bar{t}}-bv_{\mathring{x}}-cv=0 \tag{3.4}$$

经过适当处理可确定拟合因子$\gamma(x, t)$，它具有如下形式：

$$\gamma(x, t)=\left\{\frac{2a}{h^++h^-}\left(\frac{\exp\left(\frac{b+\operatorname{tg}\alpha}{\varepsilon a}h^+\right)-1}{h^+}+\frac{\exp\left(-\frac{b+\operatorname{tg}\alpha}{\varepsilon a}h^-\right)-1}{h^-}\right)\right\}^{-1}$$
$$\cdot\left\{\frac{b}{h^++h^-}\left[\exp\left(\frac{b+\operatorname{tg}\alpha}{\varepsilon a}h^+\right)-\exp\left(-\frac{b+\operatorname{tg}\alpha}{\varepsilon a}h^-\right)\right]\right.$$
$$\left.+\left[1-\exp\left(-\frac{b+\operatorname{tg}\alpha}{\varepsilon a}\tau^-\cdot\operatorname{tg}\alpha\right)\right]/\tau^-\right\} \tag{3.5}$$

引理 4 对一切$(x, t)\in W_{h\tau}$及$\varepsilon>0$，我们有

$$\gamma(x, t)>0$$

记所有$h^+\neq h^-$的点$(x, t)\in W_{h\tau}$的全体为$\mathring{\Gamma}_{h\tau}$，则有

引理 5 设$\gamma(x, t)$为形如(3.5)的拟合因子，其中$a=a(x, t)$, $b=b(x, t)$, $c=c(x, t)$，则对一切$(x, t)\in W_{h\tau}$以下估计式一致成立：

$$|\gamma(x, t)-\varepsilon|\leqslant Mh \tag{3.6}$$

特别对于一切$(x, t)\in W_{h\tau}\backslash\mathring{\Gamma}_{h\tau}$我们有

$$|\gamma(x, t)-\varepsilon|\leqslant Mh^2\varepsilon^{-1} \tag{3.7}$$

引入变量$y=(b+\mathrm{tg}\,\alpha)/a$，并记$h^+/\varepsilon=s^+$，$h^-/\varepsilon=s^-$，$\tau^-\mathrm{tg}\,\alpha/\varepsilon=\mu$，则 (3.5)可改写为

$$\gamma(x,\ t)=\left\{\frac{\exp(ys^+)-1}{s^+}+\frac{\exp(-ys^-)-1}{s^-}\right\}^{-1}$$
$$\cdot\left\{\frac{\varepsilon b}{2a}[\exp(ys^+)-\exp(-ys^-)]+\frac{\varepsilon(s^++s^-)\mathrm{tg}\alpha}{2a\mu}[1-\exp(-y\mu)]\right\} \tag{3.8}$$

由此我们有

引理 6 对于任意固定的ε，当h，$\tau\to0$时$\gamma(x,\ t)\to\varepsilon$，且$\gamma$是$y$的递减函数。

2、 极值原理

将差分算子$L_{h\tau}$写为标准形式：

$$L_{h\tau}u^{h\tau}=\frac{1}{h^++h^-}\left(\frac{2a\gamma}{h^+}-b\right)u^{h\tau}(x+h^+,\ t)-\left(\frac{2a\gamma}{h^+h^-}+\frac{1}{\tau^-}+c\right)u^{h\tau}(x,\ t)$$
$$+\frac{1}{h^++h^-}\left(\frac{2a\gamma}{h^-}+b\right)u^{h\tau}(x-h^-,\ t)+\frac{1}{\tau^-}u^{h\tau}(x,\ t-\tau^-) \tag{3.9}$$

则易证$L_{h\tau}$为正型差分算子。因而我们有

引理 7 设$\Phi_{h\tau}$、$\Psi_{h\tau}$为定义在$\overline{W}_{h\tau}$上的网格函数并满足关系

i) $|L_{h\tau}\Phi_{h\tau}|\leqslant-L_{h\tau}\Psi_{h\tau}\qquad((x,\ t)\in W_{h\tau})$

ii) $|\Phi_{h\tau}|\leqslant\Psi_{h\tau}\qquad((x,\ t)\in\Gamma_{h\tau})$

则有

$$|\Phi_{h\tau}|\leqslant\Psi_{h\tau}\qquad((x,\ t)\in\overline{W}_{h\tau})$$

进而我们有

引理 8 设$\widetilde{W}_{h\tau}=W_{h\tau}\cap\{(x,\ t):\ 0<t_0\leqslant t\leqslant t_1\leqslant T\}$为$W_{h\tau}$的部分区域，$\widetilde{\Gamma}_{h\tau}(W_{h\tau}\cap\{(x,\ t):t=t_0\})\cup(\Gamma_1\cap\{(x,\ t):\ t_0\leqslant t<t_1\})\cup(\Gamma_2\cap\{(x,\ t):\ t_0\leqslant t\leqslant t_1\})$为其边界，$\Phi_{h\tau}$、$\Psi_{h\tau}$为定义其上的网格函数并满足关系

i) $L_{h\tau}\Phi_{h\tau}\leqslant-L_{h\tau}\Psi_{h\tau}\qquad((x,\ t)\in\widetilde{W}_{h\tau})$

ii) $|\Phi_{h\tau}|\leqslant\Psi_{h\tau}\qquad((x,\ t)\in\widetilde{\Gamma}_{h\tau})$

则有

$$|\Phi_{h\tau}|\leqslant\Psi_{h\tau}\qquad((x,\ t)\in\widetilde{W}_{h\tau}\cup\widetilde{\Gamma}_{h\tau})$$

3、 逼近误差的古典估计

定理 1 (古典估计) 设$u=u(x,\ t)$是(2.1)、(2.2)的解，且对x有直到四阶为止的有界偏导数，对t有直到二阶为止的有界偏导数。则对任意固定ε问题(3.1)、(3.2)的解$u^{h\tau}$收敛于u并成立估计式

$$|u-u^{h\tau}|\leqslant M\left(\frac{h^2}{\varepsilon^3}+\frac{h^3}{\varepsilon^4}+\frac{h^4}{\varepsilon^4}+\frac{\tau}{\varepsilon^2}\right)\qquad((x,\ t)\in\overline{W}_{h\tau})$$

证明 由引理5、引理7、γ及v的显式表示我们可得估计式

$$|u-u^{h\tau}|\leqslant M\left(\frac{h^3}{\varepsilon^4}+\frac{h}{\varepsilon^3}(h+\varepsilon)+\frac{\tau}{\varepsilon^2}\right)\qquad((x,\ t)\in\overline{W}_{h\tau}) \tag{3.10}$$

记 $\widetilde{M}$、M_0、M' 皆为与 h、ε、τ 及 (x, t) 无关的正常数，则当 $h \geqslant \widetilde{M}\varepsilon$ 时由上式即得定理结论。以下再研究当 $h < \widetilde{M}\varepsilon$ 时的情况。取 $W_{h\tau}$ 上的示性函数

$$\chi_0 = \begin{cases} 1 & ((x, t) \in W_{h\tau} \cup (\overline{W}_{h\tau} \cap \Gamma_0)) \\ 0 & ((x, t) \in \Gamma_{h\tau} \setminus (W_{h\tau} \cap \Gamma_0)) \end{cases} \tag{3.11}$$

不难验证我们有

$$L_{h\tau}\chi_0 \begin{cases} = 0 & ((x, t) \in W_{h\tau} \setminus \mathring{\Gamma}_{h\tau}) \\ \leqslant -M_0 \dfrac{\varepsilon}{h^2} & ((x, t) \in \mathring{\Gamma}_{h\tau}) \end{cases} \tag{3.12}$$

考虑闸函数

$$\chi = \frac{M'}{M_0}\left(\frac{h^3}{\varepsilon^3} + \frac{h^4}{\varepsilon^4}\right)\chi_0 \qquad ((x, t) \in W_{h\tau}) \tag{3.13}$$

则

$$L_{h\tau}\,\chi \begin{cases} = 0 & ((x, t) \in W_{h\tau} \setminus \mathring{\Gamma}_{h\tau}) \\ \leqslant -M'\left(\dfrac{h}{\varepsilon^2} + \dfrac{h^2}{\varepsilon^3}\right) & ((x, t) \in \mathring{\Gamma}_{h\tau}) \end{cases} \tag{3.14}$$

将极值原理用于函数

$$\Phi = \chi + M'\left(\frac{h^2}{\varepsilon^3} + \frac{h^3}{\varepsilon^4}\right) + \widetilde{M}\frac{\tau}{\varepsilon^2} \pm \{u - u^{h\tau}\} \tag{3.15}$$

即得

$$|u - u^{h\tau}| \leqslant \chi + M'\left(\frac{h^2}{\varepsilon^3} + \frac{h^3}{\varepsilon^4}\right) + \widetilde{M}\frac{\tau}{\varepsilon^2} \tag{3.16}$$

结合(3.10)定理得证。

4、 逼近误差的非古典估计

根据拟合因子 $\gamma(x, t)$ 的表达式可以验证以下引理：

引理 9 我们有

$$\gamma(x, t) - \left\{\frac{2a}{h^+ + h^-}\left(\frac{\exp(\xi_i^+) - 1}{h^+} + \frac{\exp(-\xi_i^-) - 1}{h^-}\right)\right\}^{-1}\left\{\frac{1 - \exp(-\eta_i^-)}{\tau^-}\right.$$

$$\left. + b\,\frac{\exp(\xi_i^+) - \exp(-\xi_i^-)}{h^+ + h^-}\right\} = O\{\varepsilon \cdot |a - a_i|\} \qquad (i = 1,\ 2) \tag{3.17}$$

其中 $\xi_i^+ = (b + \mathrm{tg}\,\alpha)h^+/\varepsilon a_i$，$\xi_i^- = (b + \mathrm{tg}\,\alpha)h^-/\varepsilon a_i$，$\eta_i^- = (b + \mathrm{tg}\,\alpha)\tau^- \cdot \mathrm{tg}\,\alpha/\varepsilon a_i$；$a_i > 0\,(i = 1, 2)$ 为参数。此外，令 $\xi^+ = (b + \mathrm{tg}\alpha)h^+/\varepsilon a$，$\xi^- = (b + \mathrm{tg}\,\alpha)h^-/\varepsilon a$，$\eta^- = (b + \mathrm{tg}\,\alpha)\tau^- \cdot \mathrm{tg}\,\alpha/\varepsilon a$。

定理 2 （非古典估计） 设 $u = u(x, t)$ 是(2.1)、(2.2) 的解，且满足定理 1 中要求的光滑性条件，则(3.1)、(3.2)的解 $u^{h\tau}$ 收敛于 u，且有估计式

$$|u - u^{h\tau}| \leqslant M(h + \tau + \varepsilon^\nu) \qquad ((x, t) \in \overline{W}_{h\tau},\ 0 < \nu < 1)$$

证明 我们取正数 $\sigma > 0$ 对 $\overline{D}$ 作新的划分，在 D 中取一组点 $(x_1, t_1), (x_2, t_2), \cdots, (x_n, t_n)$ 并要求 $\psi_1(t_i) < x_i < \psi_2(t_i)$，$t_1 = \sigma$，$0 < t_{i+1} - t_i \leqslant \sigma$，$t_{n+1} = T$，$(i = 1, 2, \cdots, n)$。过 (x_i, t_i) 作直线 $t = t_i$，取该直线的 σ 邻域与 D 之交为 $D(t_i, \sigma)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，则所有这些集合之

并 $\bigcup_{i=1}^{n} D(t_i, \sigma)$ 已完全复复盖了 D。

我们引入闸函数

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_0=h+\tau+\varepsilon\\&\Phi_i=\exp\left\{-\frac{b+\operatorname{tg}\alpha}{\varepsilon a_i}(\psi_2(\theta)-x+(\theta-t)\operatorname{tg}\alpha)\right\}(i=1,\ 2)\end{aligned}\right\}\tag{3.18}$$

由引理 6 和引理 9 知：若取 $a_1>a$，$a_2<a$ 则得

$$L_{h\tau}\Phi_0<0,\quad (-1)^{i+1}L_{h\tau}\Phi_i<0\quad (i=1,\ 2;\ (x,\ t)\in D(t_i,\ \sigma)\cap W_{h\tau})\tag{3.19}$$

我们先在 $\bar{D}(t_1, \sigma)\cap\bar{W}_{h\tau}$ 内考虑问题。设其边界为 γ_1。对于函数 $\pm(u^{h\tau}-w_0-\varepsilon w_1)+M_0\Phi_0+\widetilde{M}\Phi_1$，不难证明有

$$L_{h\tau}\{\pm(u^{h\tau}-w_0-\varepsilon w_1)+M_0\Phi_0+\widetilde{M}\Phi_1\}\leqslant 0\qquad ((x,\ t)\in D(t_1,\ \sigma)\cap W_{h\tau})$$

$$\pm(u^{h\tau}-w_0-\varepsilon w_1)+M_0\Phi+\widetilde{M}\Phi_1\geqslant 0\qquad ((x,\ t)\in\gamma_1)$$

因而根据引理 8 有

$$\pm(u^{h\tau}-w_0-\varepsilon w_1)+M_0\Phi_0+\widetilde{M}\Phi_1\geqslant 0\qquad ((x,\ t)\in\bar{D}(t_1,\ \sigma)\cap\bar{W}_{h\tau})$$

令 $R=\psi_2(\theta)-x+(\theta-t)\operatorname{tg}\alpha$，则得

$$|u^{h\tau}-u_\varepsilon|\leqslant M(h+\tau+\varepsilon)\tag{3.20}$$

$$((x,\ t)\in\bar{D}(t_1,\ \sigma)\cap\bar{W}_{h\tau};\quad R\geqslant\varepsilon^\beta,\quad \frac{1}{2}<\beta<1)$$

以下进一步讨论 $0\leqslant R<\varepsilon^\beta$ 的情况。设 Q_1、Q_2 分别表示 p_0 在 $D(t_1, \sigma)$；$R<\varepsilon^\beta$ 中的极大和极小值。假定

$$2M\varepsilon<a_1-a<M(\sigma+R),\quad 2M\varepsilon<a-a_2<M(\sigma+R)\tag{3.21}$$

$$Q_1-p_0\leqslant M(\sigma+R),\quad p_0-Q_2\leqslant M(\sigma+R)\tag{3.22}$$

$$((x,\ t)\in D(t_1,\ \sigma);\quad R<\varepsilon^\beta)$$

其中 M 仅与 a、p_0 的导数在 $\bar{D}(t_1, \sigma)$ 上的界有关。对于函数 $\Psi_1=u^{h\tau}-w_0-\varepsilon w_1-Q_1\Phi_1-M\Phi_0$，有

$$L_{h\tau}\Psi_1\geqslant 0\quad ((x,\ t)\in W_{h\tau}\cap D(t_1,\ \sigma))$$

$$\Psi_1\leqslant 0\quad ((x,\ t)\in\gamma_1)$$

故据引理 8 有

$$\Psi_1\leqslant 0\qquad ((x,\ t)\in\bar{D}(t_1,\ \sigma)\cap\bar{W}_{h\tau};\ R<\varepsilon^\beta)\tag{3.23}$$

任取点 $(x',\ t')\in\{(x,\ t):\ (x,\ t)\in\bar{D}(t_1,\ \sigma);\ R<\varepsilon^\beta\}$ 不妨设 $t'\geqslant\varepsilon^\beta$。取直线 $t=t'$ 的 ε^β 邻域与集合 $D(t_1, \sigma)$；$R<\varepsilon^\beta$ 之交 D_1'，则当 $(x,\ t)\in D_1'$ 时我们有

$$Q_1\Phi_1-v_0\leqslant M'\varepsilon^{2\beta-1}$$

因而可知有

$$u^{h\tau}-u_\varepsilon\leqslant M(h+\tau+\varepsilon^{2\beta-1})\qquad ((x,\ t)\in\bar{D}(t_1,\ \sigma)\cap\bar{W}_{h\tau};\ R<\varepsilon^\beta)\tag{3.24}$$

同样，我们令

$$\Psi_2=u^{h\tau}-w_0-\varepsilon w_1-Q_2\Phi_2+M\Phi_0$$

可得

$$\Psi_2\geqslant 0\qquad ((x,\ t)\in\bar{D}(t,\ \sigma)\cap\bar{W}_{h\tau})\tag{3.25}$$

于是有

$$-(u^{h\tau}-u_\varepsilon)\leqslant M(h+\tau+\varepsilon^{2\beta-1}) \tag{3.26}$$

$$((x,\ t)\in\overline{D}(t_1,\ \sigma)\cap\overline{W}_{h\tau};\ R<\varepsilon^\beta, 0<\beta<1)$$

结合估计式(3.20)、(3.24)即得

$$|u^{h\tau}-u_\varepsilon|\leqslant M(h+\tau+\varepsilon^\nu)$$

$$((x,\ t)\in\overline{D}(t_1,\ \sigma)\cap\overline{W}_{h\tau};\quad 0<\nu<1)$$

将 Φ_0 修改成 $\Phi_0=h+\tau+\varepsilon^\nu(0<\nu<1)$，我们依次在 $D(t_2,\ \sigma)$，…，$D(t_n,\ \sigma)$ 内重复上述过程，再利用引理 3 的结论即得定理结果。

5、 一致收敛性的证明和误差估计

由定理 1 及定理 2 的结论，我们得到

定理 3 设 $u=u(x,\ t)$ 是(2.1)、(2.2)的解且满足定理 1 中要求的光滑性条件，则 $u^{h\tau}$ 一致收敛于 u 且对一切 $\varepsilon>0$ 成立估计式

$$|u-u^{h\tau}|\leqslant M(h^\beta+\tau^{\beta/2})$$

$$((x,\ t)\in\overline{W}_{h\tau};\quad 0<\beta<\frac{1}{2})$$

证明 由不等式 $mh^2\leqslant\tau\leqslant Mh^2$ 知 $\tau=O(h^2)$，于是当 $\varepsilon\leqslant h^{\frac{1}{2}}$ 时利用定理 1，$\varepsilon\geqslant h^{\frac{1}{2}}$ 时利用定理 2 即得本定理结论。

四、数 值 例 子

我们考虑问题

$$\varepsilon u_{xx}-u_t-u_x-u=(2+4t+t^2)x^3+(12+6t)tx^2$$
$$+(-1+6t^2)x-2-t\qquad((x,\ t)\in D) \tag{4.1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&u(0,\ x)=x\\
&u(\psi_1(t),\ t)=-\frac{t^{14}}{4096}-\frac{t^{13}}{2048}+\frac{3t^{10}}{256}-\frac{t^4}{16}+t\quad(0\leqslant t\leqslant 1)\\
&u(\psi_2(t),\ t)=1+t\quad(0\leqslant t\leqslant 1)
\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

其中 $\psi_1(t)=-t^4/16$，$\psi_2(t)=1-t^2/16$，$\varepsilon>0$。在近似 $\theta\approx t$ 下，问题的零次渐近解为

$$u_\varepsilon=w_0+z\left(-\frac{t^2}{16}-x+1\right)(-w_0+t+1)$$
$$\cdot\exp\left\{-\frac{p}{64}(64+t^2)\left(-\frac{t^2}{16}-x+1\right)\right\}\quad((x,\ t)\in\overline{D}) \tag{4.3}$$

其中 $p=(8+t)/8\varepsilon$. 我们进一步令 $q=\exp\{-ph^+\}$，$r=\exp\{-ph^-\}$ 则

$$\gamma=\frac{h^+h^-}{2}\cdot\frac{1-qr+(h^++h^-)(1-\exp\{-p\cdot t\cdot\tau^-/8\})q/\tau^-}{h^-(1-q)+h^+(r-1)q} \tag{4.4}$$

因而差分方程(3.1)可写为

$$\tau^-h^-(2\gamma-h^+)u^{h\tau}(x+h^+,\ t)-(h^++h^-)(2\gamma\tau^-+h^+h^-+h^+h^-\tau^-)u^{h\tau}(x,\ t)$$
$$+\tau^-h^+(2\gamma+h^-)u^{h\tau}(x-h^-,\ t)=\tau^-h^+h^-(h^+h^-)f(x,\ t)-(h^++h^-)h^+h^-u^{h\tau}(x,t) \tag{4.5}$$

我们采用步长 $h=0.01$, $\tau=0.01$和$h=0.005$, $\tau=0.0025$ 对$\varepsilon=10^{-i}$, $i=1$, …, 8及$k=0.1$, 0.5进行了计算和分析，结果是较为满意的。但为缩短篇幅起见，这里仅列出一张简表以资说明。表中的序号表示该时间层上网格点沿x正向排列时的排序号。我们取渐近解作为对照，且为说明解在边界层附近的变化情况将边界层附近的网格点列出得相对密集。

简表

序 号	x	$u^{h\tau}$	$u\varepsilon$	$u^{h\tau}-u\varepsilon$
1	−0.0625	1.0000	1.0000	0.0000
40	0.1300	1.0635	1.0727	−0.0092
80	0.3300	0.8749	0.8955	−0.0206
120	0.5300	0.2078	0.2407	−0.0329
140	0.6300	−0.3501	−0.3108	−0.0393
160	0.7300	−1.0814	−1.0357	−0.0457
180	0.8300	−2.0043	−1.9520	−0.0523
184	0.8500	−2.2132	−2.1596	−0.0536
186	0.8600	−2.3204	−2.2662	−0.0542
188	0.8700	−2.4288	−2.3739	−0.0549
190	0.8800	−2.5358	−2.4803	−0.0555
192	0.8900	−2.6344	−2.5785	−0.0559
194	0.9000	−2.7018	−2.6457	−0.0561
196	0.9100	−2.6669	−2.6117	−0.0552
197	0.9150	−2.5533	−2.4994	−0.0539
198	0.9200	−2.3064	−2.2551	−0.0513
199	0.9250	−1.8227	−1.7767	−0.0460
200	0.9300	−0.9191	−0.8830	−0.0361
201	0.9350	+0.7293	0.7460	−0.0167
202	0.9375	2.0000	2.0000	0.0000

$\varepsilon=0.01$, $h=0.005$, $\tau=0.0025$; $t=1.0$, $k=0.1$

最后，笔者对苏煜城老师和吴启光老师给予的指导和讨论表示衷心的感谢。

参考文献

[1] Треногин В. А., Об асимптотике решения почти линейных пароболических уравнений с параболическим погранслоем, *УМН*, **16**, 1 (97) (1961), 163—170.

[2] Zlama, M., The parabolic equation as a limiting case of a certain elliptic equation, *Ann. Math. Pure. Appl.*, 57 (1962), 141—150.

[3] Zlama, M., The parabolic equations as a limiting case of a hyperbolic and elliptic equations, *Diff. Equas. and Their Appl.* (Proceeding of the praque emference, 1962), Academic Press, New York (1963).

[4] Holland, C. L., Singular perturbations in the first bountary value problems for parabolic equations, *SIAM, J. Math. Anal.*, **8**, 2 (1977), 268—374.

[5] Besjes, J. G., Singular perturbation problems for linear parabolic differential operators, *J. Math.*, **48**, 2 (1974), 594—609.

[6] Bobisud, L., Second-order linear parabolic equations with a small parameter, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **27** (1967), 385—397.

[7] Шишкин Г. И., Разноетная ехема для решения эллиптического уравнения с малым

параметром в области с криволинсиной граници, *Ж. Вычисл. Мат. и Мат. Физ.*, **18**, 6 (1978), 1466—1475.

[8] Duffy, D. J., Uniformly convergent difference schemes for the convection-diffusion equation, *Boundary and Interior Layers-Computational and Asympotic Methods*, Boole Press, Dublin (1980), 265—269.

[9] 苏煜城, 《奇异摄动中的边界层校正法》, 上海科学技术出版社 (1983).

[10] 苏煜城、吴启光, 椭圆—抛物偏微分方程奇异摄动问题的差分解法, 应用数学和力学, 1, 2 (1980).

Uniformly Convergent Difference Method for the Convection-Diffusion Singular Perturbation Problem in a Curved Boundary Region

Sheng Qin

(*Suzhou University, Suzhou*)

Abstract

In this paper we construct a difference scheme for the convection-diffusion singular perturbation problem in a convex curved boundary region, and discuss the uniform convergence of its solution. We have proved that the order of uniform convergence of its solution is $O(h^{\beta}+\tau^{\beta/2})(0<\beta<1/2)$, where h, τ are the mesh steps in the space and time directions respectively.