应用数学和力学，第7卷第3期（1986年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

随机区域函数及其应用*

何　冲

（中国科学院重庆情报研究分所，1983年9月8日收到）

摘　要

本文建立了随机区域、随机区域函数的一些基本理论，由这些概念出发，通过随机区域的随机区域函数的随机稳定点的存在性，建立了任一随机区域的随机稳定中心存在的必要充分条件.

一、引　言

本文以文[1]为基础同时参照了文[2]～[5]与别的作者们的一些基本思想，并将他们建立的随机不动点理论用于随机区域，从而建立了随机区域、随机区域函数、随机区域的随机稳定中心以及定义在此随机区域上的随机区域函数的随机稳定点理论；讨论了与这些理论有关的引理、定理和推论.

本文的随机区域理论是随机几何与随机集合[6]理论的一个重要发展. 因此，在随机几何与随机集合中一些复杂的和尚未解决的问题可用随机区域理论得到方便的解决，并将经典的随机点函数的随机微分和随机积分理论大大地向前推进一步.

二、准　备

在某区域$B(R)$中的一个元素（或一个点）是随机的，如果此元素（或点）代表该区域中的一个可能基本事件.

如果有$F(x)\subseteq B(R)$，$\forall x\in B(R)$，并且有一些随机点列$x_i\ (i=1(1)m<n)$，使得$x_i\in F(x)$始终是真实的，则F是随机区域$B(R)$的随机收缩.

如果有$B(R)\subseteq F(x)$，$\forall x\in B(R)$，并有一些随机点列$x_i\ (i=1(1)m<n)$，使得$x_i\in F(x)$始终是真实的，则F是随机区域$B(R)$的随机扩张.

如果$F(x)\subseteq B(R)$，$B(R)\subseteq F(x)$，$\forall x\in B(R)$，并有一些随机点列$x_i\ (i=1(1)m<n)$，使得$x_i\in F(x)$始终是真实的，则$F(x)$是定义在随机区域$B(R)$上的随机区域函数.

一个区域$B(R)$（或R）是随机的，如果有一随机区域函数$F(x)$在此区域上有定义.

一个随机区域的稳定中心，是该随机区域的随机稳定中心.

一个随机区域$B(R)$的随机子区域$B(R_i)\ (i=1(1)m<n)$（即，包含某些随机点的子区域）通常称为此随机区域$B(R)$的随机元素（或随机单元）.

* 钱伟长推荐.

如果$F(x)\subseteq B(R)$，$\forall x\in B(R)$，并有一确定的点x_0位于此随机区域$B(R)$的随机稳定中心$B(R_0)$（或R_0）上，并且$x_0\in F(x)$始终是真实的，则F是随机区域$B(R)$的随机保核收缩。

如果$B(R)\subseteq F(x)$，$\forall x\in B(R)$，并且$x_0\in F(x)$始终是真实的，则F是随机区域$B(R)$的随机保核扩张。

如果$F(x)$是有界均匀的，并且$x_0\in F(x)$始终是真实的，则F是随机区域$B(R)$的有限均匀随机保核扩张。

如果$F(x)$是无界非均匀的，并且$x_0\in F(x)$始终是真实的，则$F(x)$是$B(R)$的无限非均匀随机保核扩张。

如果$F(x)$是有界非均匀的，并且$x_0\in F(x)$始终是真实的，则F是$B(R)$的有界非均匀随机保核扩张。

如果$F(x)\subseteq B(R)$，$B(R)\subseteq F(x)$，$\forall x\in B(R)$，并有某一确定的点x_0，位于$B(R)$的随机稳定中心$B(R_0)$（或R_0）上，并且有$x_0\in F(x)$始终是真实的，则x_0是定义在随机区域$B(R)$上的随机区域函数$F(x)$的随机稳定点。

一个随机区域$B(R)$是随机有界可分的，当且仅当，下式始终是真实的

$$B(R):=\bigcup_{i\in N}B(R_i)\text{是有界的，或者}$$

$$B(R):=\{B(R_i)\}\quad(i=1(1)m<n).$$

$B(R_0)$（或R_0）是$B(R)$的随机渐近稳定中心，当且仅当，在此随机区域中，有任一非空的随机子区域序列$B(R_i)$，使下式始终是真实的

$$\lim B(R_i)=B(R_0)$$

有某一确定的点x_0，位于随机区域$B(R)$的随机渐近稳定中心$B(R_0)$（或R_0）上，$F(x)$是定义在此随机区域$B(R)$上的随机区域函数，并且，$x_0\in F(x)$始终是真实的，则x_0是随机区域函数$F(x)$的随机渐近稳定点。

如果$B(R)$是凸的，则此随机区域$B(R)$的随机稳定中心$B(R_0)$（或渐近随机稳定中心），必定在此随机区域$B(R)$的内部；反之，则它不一定是真实的。因为，如果某一随机稳定中心（或渐近随机稳定中心）位于该随机区域的内部，但它并不一定是凸的。

有两个或者一组随机有界非空的区域是彼此同伦的，当且仅当，在它们中间存在无任何破损的任意随机变换（或映射）是有定义的。由此可见，一组非空的随机同伦区域之间的任一变换（或映射）是保核的；反之，它不一定真实了，即，一组随机有界非空的随机区域之间的任一随机变换（或映射）是保核的，但它们并不一定是同伦的。然而，有两个或一组随机有界非空的区域是彼此同胚的，当且仅当，它们之间的随机变换（或映射）是保核的。在这里，关建性条件是：只需随机变换是保核的。因此，在此情况下，可以任意改变随机区域的结构。所以，有两个或一组随机有界非空的区域的随机保核同胚变换（或映射）等价于这些随机区域之间的保核同伦变换（或映射）。但是，反过来是不真实的。

如同一般区域一样，有两个或一组随机有界非空的区域是同胚的，当且仅当它们之间有相同的随机稳定中心（或渐近随机稳定中心）。

定义在任一非空的随机区域$B(R)$上的随机区域函数$F(x)$的随机子区域函数序列$\{F(x_i)\}$是完备的，当且仅当有任意两个有界非空的子区域函数序列$F(x_j)$，$F(x_k)$，并且，$\forall F(x_j)$，$F(x_k)\subseteq\{F(x_i)\}$，$(j\neq k,\{j;k\}\subseteq\{i\})$。使得

$$\|F(x_j)-F(x_k)\|\to 0.$$

一个随机非空的可分区域$B(R)$是稠密的，当且仅当下式始终是真实的

$$B(R):=\{B(R_i)\}\quad (i=1(1)m<n)\text{,并且}$$

$$\phi\neq B(R_j)\cap B(R_k)\subseteq\{B(R_i)\}=:B(R)\quad (j\neq k)$$

$$B(R_j)\cup B(R_k)\text{是有界的}\qquad (j\neq k).$$

一个随机非空的可分区域$B(R)$是稀疏的，当且仅当下式始终是真实的

$$\phi\neq B(R_j)\cap B(R_k)\subseteq\{B(R_i)\}=:B(R)\quad (j\neq k,\{j;k\}\subseteq\{i\})$$

$$B(R_j)\cup B(R_k)\quad (j\neq k,\{j;k\}\subseteq\{i\})\text{是有界的}$$

由此可见，一个非空的随机有界可分稀疏区域必定是一个弱连通随机区域。

如果有某种事件，不可能在随机有界非空的可分区域$B(R)$上发生，则该区域$B(R)$的概率$P(x\in B(R))=\phi$（或$P(x_i\in B(R_i))=\phi$）；反之，如果有某种事件肯定能在非空的随机有界可分区域$B(R)$上发生，则该随机区域（或$B(R)$的随机子区域$B(R_i)$）的概率为$P(x\in B(R))\neq\phi$（或$P(x_i\in B(R_i))\neq\phi$）。

一般说来，如果有某些彼此排斥的事件分别位于随机区域$B(R)$的任意两组非空的随机子区域序列$B(R_j)$，$B(R_k)$中发生，则我们有

$$P(x_j\in B(R_j)\cup x_k\in B(R_k))=P(x_j\in B(R_j))+P(x_k\in B(R_k)).$$

三、基 本 定 理

本部分将以上述基本概念为基础，并参照[2～6]的一些基本思想，从而建立了有关随机区域理论的主要结果如下。

引理 1 任一非空的随机区域，仅只存在一个随机稳定中心（或渐近随机稳定中心）。

本引理的证明方法，基本上与[1]的定理1以及与其密切相关的引理 1 到引理 4 的证明方法相同。

引理 2 任一非空的随机区域的值等于定义在该区域上随机区域函数在此随机区域的随机稳定中心上的随机稳定点的值。

此引理的证明方法，基本上与[1]的定理 2 的证明方法相同。

引理 3 任意两个或一组非空的随机区域是彼此同伦的，则这些随机区域有相同的随机稳定中心（或渐近随机稳定中心）。

证明 此证明可分成两种情形，第一种，区域是随机有界的情形。由于证明过程很长，故略去。

第二种情形，对于无界随机同伦区域，可使用[1]的引理 4 的证明方法，于是，引理得证。

注 1 任意两个或一组非空的随机同胚（或随机渐近同胚）区域，有相同的随机稳定中心（或随机渐近稳定中心）

可用证明引理 3 的方法证明此结果.

注 2 如果在任一非空的随机区域中，存在可数个随机稳定中心（或渐近随机稳定中心），则在这些随机稳定中心（或渐近随机稳定中心）中间，只有一个是主要的.

此结果可用[1]的引理3 的证明方法进行.

引理 4 如果$B(R)$是任一非空的随机区域，$F(x)$是定义在$B(R)$上的随机区域函数，则$F(x)$只存在一个随机稳定点。

证明 此引理容易由引理1和Brouwer不动点定理以及随机区域函数的随机稳定点的定义得到证明。

引理5 任一非空的连续(强连续或弱连续)随机区域函数的随机子区域函数序列$F(x_i)$ $(i=1(1)m<n)$,只存在一个公共随机稳定点。

证明 为简单起见,可将此引理的证明分两步进行。

第一步,首先证明强连续随机区域函数$F(x)$的随机子区域函数序列$F(x_i)$ $(i=1(1)m<n)$,只存在一个公共随机稳定点。为此,设$F(x)$的随机子区域函数序列$F(x_i)$ $(i=1(1)m<n)$的相应随机子区域序列是$B(R_i)$ $(i=1(1)m<n)$,设$F(x):=\bigcup\limits_{i\in N}F(x_i)$;$B(R):=\bigcup\limits_{i\in N}B(R_i)$,已知$F(x_i)$是强连续的,所以其定义区域$B(R_i)$是强连通的。因此,总可以在$B(R_i)$中找到任意两个非空的随机子区域序列$B(R_j)$,$B(R_k)(j\neq k)$,使$B(R_j)\cap B(R_k)\neq\phi$,$B(R_j)\cup B(R_k)$是有界的。所以根据引理1有,在$B(R)$中,仅只存在一个随机稳定中心$B(R_0)$。于是,我们有$B(R_0)\subset B(R):=\bigcup\limits_{i=1}^{m}BR(_j)$。又由于$B(R_i)$,$B(R_j)$,$B(R_k)$均为$B(R)$的,彼此不相同的、非空的随机子区域。设$B(R_{i0})$,$B(R_{j0})$,$B(R_{k0})$分别是$B(R_i)$,$B(R_j)$,$B(R_k)$的随机稳定中心。因此,有$\forall B(R_{i0})$,$B(R_{j0}),\cdots,B(R_{j0})\cap B(R_{k0})\subset B(R):=\bigcup\limits_{i=1}^{m}B(R_i)$。根据注2,在它们中间必定只有一个是主要的随机稳定中心。我们设$B(R_0)$是它们中间的主要随机稳定中心。另一方面,由于$B(R_0)$是随机区域$B(R)$的唯一随机稳定中心。因此,它必定包含在$B(R)$的某个随机子区域$B(R_k)$中。因此有$B(R_0)\subset B(R_k)$,已知$B(R_k)$的随机稳定中心是$B(R_{k0})$由于随机区域的随机稳定中心的唯一性,所以$B(R_0)$必定与$B(R_{k0})$重合。此外,由于$B(R_{i0})$是$B(R_i)$的随机稳定中心。因此,$B(R_{i0})\subset B(R_i)\subset B(R)$。已知,$B(R_0)\subset B(R)$。又由于$B(R)$的随机稳定中心的唯一性,所以$B(R_{i0})$必定与$B(R_0)$重合。所以,$B(R_0)$是随机子区域叙列$B(R_i)$的公共随机稳定中心。

由于随机区域$B(R)$与定义在区域$B(R)$上的随机区域函数$F(x)$之间的彼此对应关系,根据随机区域的随机稳定中心和定义在此区域上的随机区域函数的随机稳点的定定义,因此在$B(R_0)$上必定有一点x_0,使得$x_0\in F(x)$,$\forall x\in B(R)$。又由于$F(x):=\bigcup\limits_{i=1}^{m}F(x_i)$,并且,$F(x_j)\cap F(x_k)\neq\phi$,$F(x_j)\cup F(x_k)$是有界的。因此由$x_0\in F(x)$,得到$x_0\in F(x_i)(i=1(1)m<n)$。其中,$F(x_i)$,$F(x_j)$,$F(x_k)$是分别定义在$B(R)$上的随机非空的子区域$B(R_i)$,$B(R_j)$,$B(R_k)$上的随机子区域函数,于是,引理的第一部分得证。

至于引理的第二部分的证明可仿照[1]的引理3的证明方法进行。于是,引理完全得证。

定理1 任一非空的随机区域,存在一个随机稳定中心,当且仅当,定义在此随机区域上的随机区域函数存在一个随机稳定点。

证明 首先证明必要条件,为此,假定此区域为$B(R)$,设$F(x)$是定义在此随机区域$B(R)$上的随机区域函数。根据引理1,$B(R)$存在一个随机稳定中心$B(R_0)$。又根据随机区域的随机稳定中心的唯一性及其性质。因此,有一确定的点x_0,属于$B(R_0)$,即,$x_0\in(B_0)\subset B(R)$。又根据随机区域$B(R)$的随机区域函数的定义,因此有,$x_0\in F(x)$。于是,定理的必要条件得证。

关于定理的充分条件。容易由引理1和随机区域的随机稳定中心的定义与随机区域函数的定义得到。

定理 2 如果定义在某一非空的随机区域 $B(R)$ 上的随机区域函数 $F(x)$ 的随机子区域函数序列 $\{F(x_i)\}$ 是完备的，则此随机区域函数$F(x)$的定义区域$B(R)$必定存在一个随机稳定中心$B(R_0)$。

此定理的证明，可直接由经典的三角不等式和随机区域函数的随机子区域函数叙列的完备性定义得到。

定理 3 设 $B(R)$是任一非空的可分随机区域，设 $F(x)$ 是定义在 $B(R)$ 上的随机区域函数，$F(x)$存在随机稳定点的必要充分条件是，$F(x)$ 的随机子区域函数序列 $\{F(x_i)\}$ 是完备的。

此定理的主要部分与定理 2 的证明方法基本上是相同的。

定理 4 设 $B(R)$是任一非空的随机区域，F是$B(R)$的随机保核收缩，G 是$B(R)$的随机有限保核扩张。于是，$F(x)\cap G(x)$，$F(x)\cup G(x)$，$\forall x\in B(R)$存在一个公共随机稳定点。

证明 已知，$B(R)$ 是任一非空的随机区域，根据引理 1，$B(R)$存在一个随机稳定中心 $B(R_0)$，又根据假定，$F(x)\subseteq B(R)$，$\forall x\in B(R)$；$G(x)\supseteq B(R)$，$\forall x\in B(R)$，并且它们都是保核的。因此，在$B(R)$的随机稳定中心$B(R_0)$上，有一确定的点x_0，使$x_0\in F(x)$，$x_0\in G(x)$。因此有

$$x_0\in F(x)\cap G(x),\quad x_0\in F(x)\cup G(x),\quad \forall x\in B(R)$$

于是定理完全得证。

推论 1 设 $B(R)$是任一非空的可分随机区域，$B(R_i)$ 是 $B(R)$ 的凸列紧随机子区域，G 是$B(R)$的随机保核收缩，$F(x)$是定义在$B(R)$上的随机区域函数，$F(x_i)$ 是定义在 $B(R_i)$上的随机子区域函数序列，于是

$$F(x_i)\cap G(x),\quad F(x_i)\cap G(x),\quad \forall x\in B(R),\quad \forall x_i\in B(R_i)$$

存在一个公共随机稳定点x_0。

此结果的证明，基本上与定理 4 相同。

定理 5 设 $B(R)$是任一非空的可分随机区域，$F(x)$是定义在$B(R)$上的随机区域函数，并且 $\{x_0:x_0\in F(x),\ \forall x\in B(R)\}\neq\phi$。于是，$B(R)$ 必定存在一个随机有限保核扩张f，使下式是真实的

$$f(x)=\{x_0:x_0\in F(x),\ \forall x\in B(R)\}.$$

证明 根据假定，$B(R)$ 是任一非空的可分随机区域，根据引理1，$B(R)$ 必定存在一个随机稳定中心$B(R_0)$。已知，$F(x)$是定义在 $B(R)$上的随机区域函数。又根据定理 1 有，$F(x)$必定存在一个随机稳定点x_0，即$x_0\in F(x)$，$\forall x\in B(R)$，使得有

$$\{x_0:x_0\in F(x),\ \forall x\in B(R)\}\neq\phi$$

此外，我们取G为 $B(R)$ 的随机保核收缩（或随机有限保核扩张），即，$G(x)\subseteq B(R)$，$\forall x\in B(R)$，于是同样有$x_0\in G(x)$，$\forall x\in B(R)$，因此，集合$\{x_0:x_0\in G(x),\ \forall x\in B(R)\}\neq\phi$ 也是真实的。由于f是$B(R)$的随机有限保核扩张。所以，$x_0\in f(x)$，$\forall x\in B(R)$。于是，可以令

$$f(x)=\{x_0:x_0G(x),\ \forall x\in B(R)\}\neq\phi$$

由于$x_0\in G(x)$，$\forall x\in B(R)$，根据定理 4 有，$x_0\in G(x)\cap F(x)$，$x_0\in G(x)\cup F(x)$，由此可见，x_0 是 $F(x)$ 和 $G(x)$ 的公共随机稳定点。又根据[1]的定理 2 有，$G(x)$ 几乎处处等于 $F(x)$，所以

$$f(x)=\{x_0:x_0\in F(x),\forall x\in B(R)\}$$

始终是真实的。定理证毕。

定理6. 设 $B(R)$ 是任一非空的可分随机区域，$B(R_i)$ 是 $B(R)$ 的凸列紧随机子区域，$F(x)$是定义在 $B(R)$上的随机区域函数，$D_F(x)$是 $F(x)$ 在 $B(R)$ 上的所有随机广义导数 F'_x 的集合，$f(x_i)$ 是定义在$B(R_i)$上的随机子区域函数序列，并且如果(3.1)始终是真实的，即

$$P(x_i \in B(R_i),\ D_F = f(x_i)) \neq \phi \qquad (i=1(1)m<n) \tag{3.1}$$

如果$F(x_k)$是广义随机微分方程(3.2)的解列，即

$$F'(x) \subseteq D_F(x),\ \forall x \in B(R) \tag{3.2}$$

并且有 $\lim F(x_k) = F(x_0)$ 始终是真实的，则 $F(x_0)$ 是 (3.2) 的随机最佳解。

此定理的证明，可直接由随机区域函数的概率的定义、定理 4 的推论 1 和定理 5 得到。

注 3 $D_F(x)$在随机区域理论中，是随机区域$B(R)$的凸列紧（或稠密）的子区域。

四、应　　用

本部分，将通过几个实际例子说明随机区域函数的应用。

例1、 设随机线性代数方程组(4.1)与某非空的随机区域$B(R)$相伴，即

$$H(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \tag{4.1}$$

其中x_j是随机区域$B(R)$的随机变元，a_{ij}是随机线性代数方程组(4.1)的随机系数。我们可用[1]的定理5，和推论4得到随机方程组(4.1)的解。

例2、我们给出随机区域函数$F(x)$的广义随机微分方程(4.2)如下

$$F'(x) \subseteq D_F(x) \qquad (\forall x \in B(R)) \tag{4.2}$$

方程 (4.2) 可用[10]的某些方法求解。随机区域理论将在控制论、系统工程、优化理论，运筹学等领域有广泛的应用。这里，我们不打算一一列举，在将来的文章中，将进一步详细讨论。

参 考 文 献

[1] 何冲，区域函数，应用数学和力学，7，2(1986)，173—179.

[2] Bharucha-Reid, A. T., Fixed point theorem in probabilitic analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **82**, 5 (1976), 641—657.

[3] Itoh, S., A random fixed point theorem for a multivalued contractor mapping, *Pacific J. Math.*, **68**, 1 (1977), 85—90.

[4] Itoh, S., Random fixed point theorem with an application to random differential equations in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **67** (1979), 261—274.

[5] Engl, H. W., Some random fixed point theorem for strict contraction and nonexpensive mapping, *Nonlinear Anal. TMA*, **2**, 5 (1978), 619—626.

[6] Matheron, G., *Random Sets and Integral Geometry*, J. Wiley & Sons, New York-London-Sydney-Toronto (1975).

[7] Clarke, F. H., Generalized gradient and applications, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **205**, 78 (1975), 247—262.

[8] Богатырев А. Б., Непрерывные ветви многозначных отображении с невыпуклой

правой частью, *Матем. Сб.* 162 (1983), 344—355.

[9] Himmelberg, C. J. and F. S. Van Vleck, A note on the solution sets of differential inclusions, *Rocky Mountain J. Math.*, 12, 4(1982), 621—625.

[10] 何冲，广义微分方程的来源，现状及其发展趋势，西南师范学院学报，数学专辑，2 (1985)，59—68.

Random Region Function and Its Applications

He Chong

(*Institute of Scientific Information, Academia Sinica, Chongqing*)

Abstract

This paper establishes some basic concepts of the random region and random region function. From these concepts and with the existence of a random stable point of a random region function of the random region, the necessary and sufficient conditions of the existence of a random stable centre of any random region are defined.