应用数学和力学，第7卷第2期（1986年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一类不动子集的泛系研究*

李 贵 华

（武汉数字工程研究所，1984年12月1日收到）

摘 要

本文继续有关不动子集的泛系研究。在泛系框架下得到了Ⅰ型不动子集的存在准则；给出了自反关系类及等价关系类与不动子集的关系定理；引进了二元关系的不动点概念并对一类泛权网络建立了几个不动点存在定理。

设G是一个非空集合，f是G上的一个二元关系。假定D是G的一个子集（非空）。当$D\subseteq D\circ f$，$D\circ f\subseteq D$或$D=D\circ f$时，我们分别称D为Ⅰ型，Ⅱ型或Ⅲ型不动子集。各型不动子集集族分别记为$F^*(f)$，$F_*(f)$和$F(f)$。

在传统分析中，映射的不动点通常不假定有内部结构；而对于二元关系的不动子集，则可引进各种数学构造。显然Ⅲ型单点不动子集实质上可作为不动点（反过来亦成立）。所以不动子集是一个普适性更强的概念。

在文献[1,3～5]中，我们指出了各类不动子集及相应的不动泛系定理的物理、经济、生物及社会含义。特别是关于Ⅲ型不动子集获得了一批定性及定量的结果，给出了几个结构性算法。本文将其中的一些工作推广到Ⅰ型不动子集，讨论了自反关系类、等价关系类与Ⅰ型和Ⅲ型不动子集的关系，并就一类赋权网络建立了几个二元关系的不动点存在定理。

文献[3]曾指出，f有Ⅲ型不动子集的充要条件是(G,f)或(G,f')有向左方无限伸展的链。我们发现，它也是Ⅰ型不动子集存在的等价性条件。

定理1（Ⅰ型不动子集存在准则）$F^*(f)\neq\phi$的充要条件是存在$(x_1,x_2,\cdots,x_j,\cdots)\in G^\infty$，其中

$$x_{j+1}\in f\circ x_j$$

也就是说，$F^*(f)\neq\phi$当且仅当$F(f)\neq\phi$。

证明 先设$F^*(f)\neq\phi$，即有D，满足$\phi\neq D\subseteq D\circ f$。任取$x_1\in D$，则有$x_2\in D$，使$(x_2,x_1)\in f$。因$x_2\in D$，所以又有$x_3\in D$，使$(x_3,x_2)\in f$。如此继续下去就有序列$x_1,x_2,\cdots,x_j,\cdots$，其中$(x_{j+1},\ x_j)\in f\ (j=1,2,\cdots)$。

再设存在定理条件中所述的序列。则由[3]可知集合

$$D\triangleq\bigcup_{j=1}^{\infty}x_j\circ f^t$$

满足

---

* 吴学谋推荐。

$$\phi \neq D = D \circ f$$

于是当有$F^*(f) \neq \phi$.

定理证毕.

虽然Ⅰ型和Ⅲ型不动子集的存在性是等价的，但它们的结构特征与数量特征一般不同. 我们总有$F(f) \subseteq F^*(f)$（注意$F(f) = F^*(f) \cap F_*(f)$），但有极多的例子表明$|F^*(f)| \neq |F(f)|$.

设$D \in F^*(f)$. 对任意的$x_1 \in D$，存在满足定理条件的$x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots$. 显然，

$$x_1 \in \bigcup_{j=1} x_j \circ f^t \in F(f)$$

所以我们有下面的定理.

定理 2　对任意的$D \in F^*(f)$，存在$D' \in F(f)$，使$D \subseteq D'$.

不过，D中不一定含有Ⅲ型不动子集.

在泛系方法论中，常常采用自反关系与等价关系这两种基本关系来描述或刻划客观事物. 下面我们给出它们与不动子集的关系，有时也可作为它们的形式定义.

定理 3　$f \in R[G]$的充要条件是$F^*(f) = P(G) - \{\phi\}$.

证明　设$f \in R[G]$. 任取$D \in P(G)$，$D \neq \phi$. 显然对$x \in D$，必有$(x, x) \in f$. 于是$x \in x \circ f \subseteq D \circ f$. 所以$D \in F^*(f)$. 反过来，设$F^*(f) = P(G) - \{\phi\}$. 则对任意的$x \in G$，因$\{x\} \subseteq P(G) - \{\phi\}$，所以$\{x\} \subseteq \{x\} \circ f$，即$x \in x \circ f$. 所以$f \in R[G]$.

定理证毕.

显然，只要G的所有单点子集是f的Ⅰ型不动子集时，即有$f \in R[G]$. 因此，$\{\{x\} | x \in G\} \subseteq F^*(f)$当且仅当$P(G) - \{\phi\} = F^*(f)$，或写为

定理 3′　$f \in R[G]$的充要条件是$\min F^*(f) = \{\{x\} | x \in G\}$.

当$f \in E_s[G]$或$f \in E[G]$时，我们记

$$G/f = \max\{Q | Q^2 \subseteq f\}$$

定理 4　$f \in E[G]$的充要条件是$G/f \subseteq F(f)$.

证明　先设$G/f \subseteq F(f)$. 不妨令$f \in E_s[G]$. 我们来证明f还具有传递性. 这样f就是一个等价关系了. 当G/f中的元互不相交时，传递性是显然的. 所以下面对任取的$D_1, D_2 \in G/f$，$D_1 \neq D_2$，证明必有$D_1 \cap D_2 = \phi$. 设不然，即至少有$x \in D_1 \cap D_2$，那么对任意的$x' \in D_1$，由$(x, x') \in f$，$D_2 = D_2 \circ f$而必有$x' \in D_2$. 即$D_1 \subseteq D_2$. 同理可有$D_2 \subseteq D_1$. 矛盾源于$D_1 \cap D_2 \neq \phi$的假设！所以定理充分性为真.

由泛系等价分类的性质即知必要性是成立的.

定理证毕.

更精确地，我们有

定理 4′　$f \in E[G]$的充要条件是$G/f = \min F(f)$.

为证明该定理，我们先给出一个引理.

引理　当$f \in E[G]$时，

$$F(f) = \{\bigcup_{G_i \in \Gamma} G_i | \Gamma \subseteq G/f\}$$

实际上，对于任意的$D \in F(f)$，作

$$\Gamma_D \triangleq \{G_i | (G_i \in G/f) \wedge (D \cap G_i \neq \phi)\}$$

则
$$(\bigcup_{G_i\in\Gamma_D} G_i)\circ f=\bigcup_{G_i\in\Gamma_D} G_i$$
对任意的$x\in D$，必存在某$G_i\in G/f$，使$x\in G_i$。所以
$$D\subseteq\bigcup_{G_i\in\Gamma_D} G_i$$
对$y\in\bigcup_{G_i\in\Gamma_D} G_i$，存在$G_i\in\Gamma_D$，使$y\in G_i$。因$D\cap G_i\neq\phi$，所以有$y'\in D\cap G_i$（对某个$y'\in G$）。显然$(x,y)\in f$。再由$D=D\circ f$就有$y\in D$。所以
$$\bigcup_{G_i\in\Gamma_D} G_i\subseteq D$$
综上所述，$F(f)=\{\bigcup_{G_i\in\Gamma} G_i|\Gamma\subseteq G/f\}$。

显然，由传递性即知$F(f)$中的极小元集正是G/f。所以当$f\in E[G]$时，$G/f=\min F(f)$。

反过来，由$G/f=\min F(f)\subseteq F(f)$，据定理4就有$f\in E[G]$。

定理证毕。

由以上的几个定理我们即有下面的不动子集计数公式。

定理 5

（1） $f\in R[G]$时，$|F^*(f)|=2^{|G|}-1$；

（2） $f\in R[G]$时，$|\min F^*(f)|=|G|$；

（3） $f\in E[G]$时，$|F(f)|=2^{\|f\|}-1=|P(G/f)-\{\phi\}|$；

（4） $f\in E[G]$时，$|\min F(f)|=\|f\|=|G/f|$。

仍设G是一个给定的非空集，f是其上的一个非空二元关系。当$(x,x)\in f$时，我们称x是二元关系f的不动点，亦即x是f的不动点当且仅当$\{x\}$是f的Ⅰ型不动子集。记f的所有不动点集为$F^{\Delta}(f)$。

在传统的不动点理论中，当f是一个多值映射时，若$x\in f(x)$，则也称x是f的不动点。显然f可看成一个二元关系（这时$x'\circ f$或$f(x')$一般不是单点集）。那么，这里关于二元关系的不动点的工作与多值映射的不动点理论有何差异呢？一个重要的不同就是这里很少涉及精细的数学结构（只有等价关系或序关系这样的基本泛系关系），例如拓扑结构等。这些关系可概括一大类数学条件（包括出现在不动点理论中的）。因而其结果可包含许多不动点定理。由此可以看出，问题的处理过程是带有方法论意义的。它可以促使不动点理论在宏观上的综合，最后导致这种理论在新的、更高的层次上的发展。

显然，f有不动点当且仅当$f\cap f^{(0)}\neq\phi$。

定理 6 如果有$D\in F(f)$，$|D|=m<\infty$，则$F^{\Delta}(f')\neq\phi$。更精确地说，如果对$n\geqslant1$，定义
$$f^{\langle n\rangle}\triangleq\bigcup_{k=1}^{n}f^{(k)}$$
则$F^{\Delta}(f^{\langle m\rangle})\neq\phi$。

证明 不妨设
$$D=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$$
因$D=D\circ f$，所以存在以下面的元素为顶点的环路：
$$x_{k_1},\ x_{k_2},\cdots,x_{k_i}$$
其中$2\leqslant i\leqslant m$，$x_{k_j}\in D\ (1\leqslant j\leqslant i)$（可以有相同的元），且

$$(x_{k_j}, x_{k_{j+1}}) \in f \qquad (1 \leqslant j \leqslant i-1)$$

$$x_{k_1} = x_{k_i}$$

所以 $\qquad (x_{k_1}, x_{k_1}) \in f^{(i-1)}$

于是有 $\qquad (x_{k_1}, x_{k_1}) \in f^{\langle m \rangle}$

这里要注意的是，

1．当$n \leqslant m$时，

$$F^{\Delta}(f^{\langle n \rangle}) \subseteq F^{\Delta}(f^{\langle m \rangle})$$

2．对任意的 $m \geqslant 1$，

$$F^{\Delta}(f^{\langle m \rangle}) \subseteq F^{\Delta}(f^{t})$$

定理证毕。

当定理中的条件换为"存在$D \in F^*(f)$，$m \geqslant 1$；$|D| \leqslant m$"时结论仍成立。

推论 1　如果$|G| < \infty$，且$F(f) \neq \phi$，则存在$m \geqslant 1$，使$F^{\Delta}(f^{\langle m \rangle}) \neq \phi$。

证明　这是因为当$|G| < \infty$时，$F(f) \neq \phi$的充要条件是$f^t \cap f^{(0)} \neq \phi$。

推论 2　如果$f \in T[G)$，且存在$m \geqslant 1$，使$D \in F(f)$，$|D| = m$，则$F^{\Delta}(f) \neq \phi$。

定理 7　下列条件都蕴含着$F^{\Delta}(f) \neq \phi$。

1．存在$g \subseteq G^2$，$f = g \circ g^{-1} \neq \phi$；

2．$|G| < \infty$，g是G上的隐模拟，$f = g^t$；

3．存在g，$F^{\Delta}(g) \neq \phi$，且$g \subseteq f$。

设G, f同前，W是一个下备格（即格中任意非空子集恒存在下确界）。泛权网络 h 定义为映射

$$h: f \to W$$

当$(x,y) \in f$时，我们把 $h((x,y))$ 简记为 $h(x,y)$。

定理 8　设 h 如上定义。如果

1．$\inf\ h(x \circ f, y \circ f) < h(x,y) \qquad x \neq y$；

2．存在 z 及 $y(\in z \circ f)$，使

$$\inf\Big(\bigcup_{\phi \subset G' \subseteq G' \circ f} h(G', G' \circ f)\Big) \geqslant h(z,y)$$

则f有不动点，即$F^{\Delta}(f) \neq \phi$。

这里W上的序关系为$\leqslant$。对$\alpha, \beta \in W$，$\alpha \leqslant \beta$当$\alpha \neq \beta$时简记为$\alpha < \beta$。当$G', G'' \subseteq G \circ f \cup f \circ G$时，定义

$$h(G', G'') \triangleq h((G' \times G'') \cap f)$$

我们来证明上述定理。

由条件 2，存在 z 及 $y(\in z \circ f)$，使 $h(z,y)$ 不大于下确界。如果 $y \neq z$，那么

$$\inf\ h(z \circ f, y \circ f) < h(z,y)$$

由于 $y \circ f \subseteq z \circ f^{(2)}$，所以有下面的不等式

$$\inf\ h(z \circ f, z \circ f^{(2)}) \leqslant \inf\ h(z \circ f, y \circ f) < h(z,y)$$

这与 y，z 的取法矛盾！所以只能有 $y = z$。于是$(y,y) \in f$。

推论 1　令

$$Y \triangleq \{y \mid h(y,y) \leqslant \inf\Big(\bigcup_{\phi \subset G' \subseteq G' \circ f} h(G', G' \circ f)\Big)$$

则$|Y| \leqslant |F^{\Delta}(f)|$。

推论 2 设h是一个泛权网络，且

1. $\inf h(x\circ f, y\circ f) < h(x,y) \quad x \neq y$；
2. h 是一个满射，

则f有不动点。

证明 因W是一个下备格，所以

$$\inf\left(\bigcup_{\phi \neq G' \subseteq G' \circ f} h(G', G' \circ f)\right)$$

存在且在W中。由于h是满射，存在$(z,y)\in f$，使$h(z,y)$刚好是上述的下确界。再由定理 8 即知推论为真。

注 1 定理 8 中的条件 1 可弱化为只要对条件 2 中的(z,y)成立相应的不等式。

注 2 在定理和推论的条件下，我们有$y=z$。显然，由于关于 h 的限制不那么直观，$h(y,y)$似乎不取$h(f)$的下确界。在定理 8 中，由条件 1 可以证明：满足条件2的(z,y)的泛权达到左边的下确界，即符号$\geqslant$实为$=$。而且

$$\inf\left(\bigcup_{\phi \neq G' \subseteq G \circ f} h(G', G' \circ f)\right) = \inf h(f)$$

这样，条件2实际上是说$h(f)$的下确界可以达到。如果 h 是一个距离，且是一个满射，则不动点的存在性即刻就知，而且正是距离为 0 的元素对的分量。

从f及h的结构来看，上述的定理及推论是[2]中关于收缩映象的不动点定理的一般推广。

在许多时候，推论 2 的应用较定理 8 要方便一些。

注 3 一收缩映象至多有一个不动点；满足上述定理或推论中条件的f却可能有多个不动点。

例 1 设$G=\{x,y\}$；$f=G^2$。令$W=\{0,1\}$并以自然数大小为序关系。定义 f 上的离散度量 (discrete metric) 如下

$$h(a,b)=\begin{cases}0 & a=b\\ 1 & a\neq b\end{cases}$$

其中$a,b\in G$。于是

$$\inf h(a\circ f, b\circ f)\equiv 0, \quad a,b\in G$$

推论 2 的条件在此全部成立。我们看到，x 与 y 都是f的不动点。

例 2 设$G=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$。定义

$$f=\bigcup_{\substack{i,j\in G\\ i\neq j}}\{(i,k_{i,j}),(j,k_{i,j})\}$$

其中$k_{i,j}$为$\geqslant \max\{i,j\}$的任意整数，且对 $G^2-\{(n,n)\mid n=1,2,\cdots\}$中的无穷多个元$\{(i,j)\}$，$k_{i,j}$取为极值$\max\{i,j\}$。可以证明：这些极值正是$f$的不动点。如果 W 上的序关系及 h 为例 1 所示，则此例满足推论 2 的全部条件。注意不动点的个数完全由$\{k_{i,j}\}$控制。

例 3 我们举例说明，仅有定理或推论中的条件 1 是不能保证f有不动点的，即下确界不能达到时，f 可能没有不动点。

设$G=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$；$f=\bigcup_{m>n\geqslant 1}\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right)\right\}$；$W=\bigcup_{n\geqslant 1}\left\{\frac{1}{n},0\right\}$

定义 $$h\left(\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{m} \qquad (m>n\geqslant 1)$$

则对任意的$1/n>1/m$，

$$\inf h\left(\frac{1}{n}\circ f, \frac{1}{m}\circ f\right)=0$$

$\left(\text{事实上，对任意 } k>n,\ \frac{1}{k}\in\frac{1}{n}\circ f,\ \text{所以 } \frac{1}{k}\in h\left(\frac{1}{n}\circ f,\ \frac{1}{m}\circ f\right)\right.$

$\left.\text{令 } k\to\infty \text{ 就有 } \inf h\left(\frac{1}{n}\circ f,\ \frac{1}{m}\circ f\right)=0\right)$

显然，当$m>n$时，$h(1/n,\ 1/m)>0$。所以，定理中条件1是满足的。但f没有不动点！

这里要注意的是$0\in h(f)$。

我们取$|f|=\infty$不是偶然的。当f有限且满足条件1时，f必有不动点，即有限性和收缩性是不动点存在的充分条件。此即

定理9 如果f有限，且当$x\neq y$时

$$\inf\ h(x\circ f,\ y\circ f)<h(x,y)$$

则f必有不动点。

证明 因$|f|<\infty$，所以$h(x\circ f,y\circ f)$也是有限的。这样存在$w\in x\circ f$，$z\in y\circ f$，使

$$h(w,z)=\inf\ h(x\circ f,y\circ f)$$

如果$z=w$，则z自然是f的不动点。所以下面设$z\neq w$。这时有$w_1\in w\circ f$，$z_1\in z\circ f$，使

$$h(w_1,z_1)=\inf\ h(w\circ f,z\circ f)<h(w,z)$$

仍设$w_1\neq z_1$。继续这个过程就有序列

$$(x,y),(w,z),(w_1,z_1),\cdots,(w_n,z_n),\cdots<h(w_n,z_n)<\cdots<h(w_1,z_1)<h(w,z)$$

因f有限，序列中必有相同的元。所以不可能有上述序关系。这样必存在n，使$w_n=z_n$。w_n即是f的不动点。

定理证毕。

参 考 文 献

[1] Wu Xue-mou, Fixed pansystems theorems and pansystems catastrophe analysis of pan-weighted network, *J. of Math. Research and Exposition*, 1 (1984).

[2] Smart, D. R., *Fixed Point Theorems*, Cambridge University Press (1980).

[3] 李贵华，不动泛系定理及其进展，大自然探索（待发表）.

[4] 李贵华，不动泛系定理中结构与数量的特征描述，应用数学和力学，5,6 (1984)，887—893.

[5] 高隆颖、王书某，泛对称与不动泛系定理，应用数学和力学，5,5 (1984)，743—747.

[6] Wu Xue-mou, Pansystems methodology: Concepts, theorems and applications (Ⅰ—Ⅶ), *Science Exploration*, 1,2,4 (1982), 1,4 (1983), etc..

Pansystems Research on a Type of Fixed Subsets

Li Gui-hua

(*Wuhan Digital Engineering Institute, Wuhan*)

Abstract

The present paper continues the pansystems research on fixed subsets. Under the pansystems framework it gives the existence criterion of I-type fixed subsets, and the theorems about the relations between the classes of reflexive and equivalent relations and fixed subsets; introduces the concept of fixpoints of binary relations and establishes several existence theorems about fixpoints for a kind of panweighted network.