应用数学和力学，第7卷第2期（1986年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Fuzzy映象的不动点定理(二)*

张 石 生

（四川大学数学系，1984年12月7日收到）

摘　要

本文对 Fuzzy 映象得出了几个新的不动点定理，这些结果改进和发展了文[1，4，5]中的结果．

一、引言及预备知识

关于Fuzzy映象的不动点定理 Heilpern，Butnariu及作者等在引文[1～5]中曾作过某些研究。本文的目的是继续研究这一问题。本文中所给出的结果改进和发展了[1，4，5]中的主要结果。

本文沿用[1]中的记号和术语。

本文以下处处假定(X,d)是一完备的度量空间，$CB(X)$表X的一切非空有界闭集族；$\mathscr{F}(X)$表X中一切 Fuzzy 集的族；$\mathscr{W}(X)$表$\mathscr{F}(X)$中这样的子族，对每一$A\in\mathscr{W}(X)$，由下式定义的非 Fuzzy 集$\hat{A}\in CB(X)$：

$$\hat{A}=\{x\in X: A(x)=\max_{u\in X}A(u)\}$$

F称为是$X\to\mathscr{W}(X)$的 Fuzzy 映象，如果对每一$x\in X$，$F(x)$（以后记为F_x）是$\mathscr{W}(X)$中之一 Fuzzy 集。

设$F:X\to\mathscr{W}(X)$是 Fuzzy 映象，则由F可产生一集值映象$\hat{F}:X\to CB(X)$如下：

$$\hat{F}(x)=\{y\in X: F_x(y)=\max_{u\in X}F_x(u)\} \tag{1.1}$$

称$x_*\in X$为 Fuzzy 映象$F:X\to\mathscr{W}(X)$的不动点，如果

$$F_{x_*}(x_*)\geqslant F_{x_*}(x),\quad \forall x\in X \tag{1.2}$$

由定义易知下之结果成立。

引理1　$x_*\in X$是 Fuzzy 映象$F:X\to\mathscr{W}(X)$的不动点，当而且仅当x_*是集值映象$\hat{F}:X\to CB(X)$的不动点，即

$$x_*\in\hat{F}(x_*)$$

引理2　(Nadler[7])　设$A,B\in CB(X)$，则对任一$a\in A$，和任一数$\beta>1$，必存在$b\in B$，使得$d(a,b)\leqslant\beta H(A,B)$，这里$H(\cdot,\cdot)$表由度量$d$导出的 Hausdorff 度量。

* 周谟仁推荐．

二、主 要 结 果

定理1 设F, G是$X\to\mathscr{W}(X)$的 Fuzzy 映象，$\hat{F}$和$\hat{G}$分别是由F和G按(1.1)式定义的集值映象，设对一切x, $y\in X$有

$$H(\hat{F}(x),\ \hat{G}(y))\leqslant\Phi(d(x,\ y),d(x,\hat{F}(x)),\ d(y,\hat{G}(y)),\ d(x,\ \hat{G}(y)),d(y,\hat{F}(x))) \tag{2.1}$$

其中函数Φ满足下面的条件(Φ_1), (Φ_2).

(Φ_1) $\Phi:[0,\ \infty)^5\to[0,\ \infty)$关于每一变量不减，且$\Phi$上半连续；

(Φ_2) $\Phi(t,t,t,at,bt)\leqslant\varphi(t)$, $\forall t\geqslant0$. 其中a, $b=0$, 1, 2, 且 $a+b=2$; 又 $\varphi(t)$: $[0,\ \infty)\to[0,\ \infty)$, $\varphi(t)<t$, $\forall t>0$, $\varphi(0)=0$. 设$\beta>1$, 任取$x_0\in X$, $x_1\in\hat{F}(x_0)$, $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$是由下式定义的非负实数列：

$$t_{k+1}=t_k+\varphi(\beta(t_k-t_{k-1})),\ k=1,\ 2,\ \cdots;\ t_0=0,\ t_1>d(x_0,\ x_1) \tag{2.2}$$

若$t_k\to t_*<\infty$. 则F和G在X中存在唯一不动点$x_*\in X$.

证 对给定的$x_0\in X$, $x_1\in\hat{F}(x_0)$, 和$\beta>1$. 由引理2存在$x_2\in\hat{G}(x_1)$, 使得

$$d(x_1,\ x_2)\leqslant\beta H(\hat{F}(x_0),\ \hat{G}(x_1))$$

又由引理2, 存在$x_3\in\hat{F}(x_2)$, 使得

$$d(x_2,\ x_3)\leqslant\beta H(\hat{G}(x_1),\ \hat{F}(x_2))$$

继续这一程序可得序列$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\subset X$, 满足条件

$$\left.\begin{aligned}&x_{2n+1}\in\hat{F}(x_{2n}),\ x_{2n+2}\in\hat{G}(x_{2n+1}),\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\\&d(x_{2n+1},\ x_{2n})\leqslant\beta H(\hat{F}(x_{2n}),\ \hat{G}(x_{2n-1})),\ n=1,2,\ \cdots\\&d(x_{2n+2},\ x_{2n+1})\leqslant\beta H(\hat{G}(x_{2n+1}),\ \hat{F}(x_{2n})),n=0,1,2,\cdots\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

(Ⅰ) 我们首先证明下面的不等式成立：

$$\left.\begin{aligned}&d(x_{2n},\ \hat{F}(x_{2n}))\leqslant d(x_{2n-1},\ x_{2n}),\ n=1,\ 2,\ \cdots\\&d(x_{2n+1},\ \hat{G}(x_{2n+1}))\leqslant d(x_{2n},\ x_{2n+1}),\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

事实上，由(2.3)和条件(2.1)有

$$\begin{aligned}d(x_{2n},\ \hat{F}(x_{2n}))&\leqslant H(\hat{G}(x_{2n-1}),\ \hat{F}(x_{2n}))\\&\leqslant\Phi(d(x_{2n},\ x_{2n-1}),\ d(x_{2n},\ \hat{F}(x_{2n})),\ d(x_{2n-1},\ \hat{G}(x_{2n-1})),\\&\quad d(x_{2n},\ \hat{G}(x_{2n-1})),\ d(x_{2n-1},\ \hat{F}(x_{2n})))\\&\leqslant\Phi(d(x_{2n},\ x_{2n-1}),\ d(x_{2n},\ \hat{F}(x_{2n})),\ d(x_{2n-1},\ x_{2n}),\ 0,\\&\quad d(x_{2n-1},\ x_{2n})+d(x_{2n},\ \hat{F}(x_{2n})))\end{aligned}$$

若$d(x_{2n},\ \hat{F}(x_{2n}))>d(x_{2n-1},\ x_{2n})$, 则由上式得

$$d(x_{2n},\ \hat{F}(x_{2n}))\leqslant\varphi(d(x_{2n},\ \hat{F}(x_{2n})))<d(x_{2n},\ \hat{F}(x_{2n}))$$

矛盾. 由此矛盾得证$d(x_{2n},\ \hat{F}(x_{2n}))\leqslant d(x_{2n-1},\ x_{2n})$, $n=1,\ 2,\ \cdots$.

同理可证$d(x_{2n+1},\ \hat{G}(x_{2n+1}))\leqslant d(x_{2n},\ x_{2n+1})$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$.

(Ⅱ) 现用归纳法证明

$$d(x_j,\ x_{j-1})\leqslant\beta(t_j-t_{j-1}),\ j=1,\ 2,\ \cdots \tag{2.5}$$

事实上，当$j=1$时，由给定的条件，(2.5) 显然成立. 设当$j=2$, 3, $\cdots$, k时，(2.5)成立. 现证对$j=k+1$时 (2.5) 亦成立.

当 k 为偶数时，由条件（2.1）和不等式（2.4）可得

$$\begin{aligned}
d(x_{k+1},\ x_k)&\leqslant\beta H(\hat{F}(x_k),\ \hat{G}(x_{k-1}))\\
&\leqslant\beta\Phi(d(x_k,\ x_{k-1}),\ d(x_{k-1},\ x_k),\ d(x_{k-1},\ x_k)+d(x_k,\ \hat{G}(x_{k-1})),\\
&\quad 0,\ d(x_{k-1},\ x_k)+d(x_k,\ \hat{F}(x_k)))\\
&\leqslant\beta\Phi(d(x_k,\ x_{k-1}),\ d(x_{k-1},\ x_k),\ d(x_{k-1},\ x_k),\ 0,\ 2d(x_{k-1},\ x_k))\\
&\leqslant\beta\varphi(d(x_k,\ x_{k-1}))\leqslant\beta\varphi(\beta(t_k-t_{k-1}))=\beta(t_{k+1}-t_k)
\end{aligned}\tag{2.6}$$

当 k 为奇数时，用类似的方法可证（2.6）亦成立。故（2.5）得证。

因 $t_k\to t_*<\infty\ (k\to\infty)$，故对任意的正整数 $k,\ m$，由

$$d(x_{k+m},\ x_k)\leqslant\sum_{j=k}^{k+m-1}d(x_{j+1},\ x_j)\leqslant\beta\sum_{j=k}^{k+m-1}(t_{j+1}-t_j)=\beta(t_{k+m}-t_k)\tag{2.7}$$

得知$\{x_n\}$是X中的 Cauchy 列。由X的完备性，设 $x_n\to x_*\in X$。下证 x_* 是 $F,\ G$ 的唯一的公共不动点。事实上，我们有

$$\begin{aligned}
d(x_*,\ \hat{F}(x_*))&\leqslant d(x_*,\ x_{2n})+d(x_{2n},\ \hat{F}(x_*))\\
&\leqslant d(x_*,\ x_{2n})+H(\hat{G}(x_{2n-1}),\ \hat{F}(x_*))\\
&\leqslant d(x_*,\ x_{2n})+\Phi(d(x_*,\ x_{2n-1}),\ d(x_*,\ \hat{F}(x_*)),\ d(x_{2n-1},\ \hat{G}(x_{2n-1})),\\
&\quad d(x_*,\ x_{2n})+d(x_{2n},\ \hat{G}(x_{2n-1})),\ d(x_{2n-1},\ x_*)+d(x_*,\ \hat{F}(x_*)))
\end{aligned}$$

于上式右端让 $n\to\infty$，并注意Φ的上半连续性得

$$d(x_*,\ \hat{F}(x_*))\leqslant\Phi(0,\ d(x_*,\ \hat{F}(x_*)),\ 0,\ 0,\ d(x_*,\ \hat{F}(x_*)))\leqslant\varphi(d(x_*,\ \hat{F}(x_*)))$$

因而有 $d(x_*,\ \hat{F}(x_*))=0$，故 $x_*\in\hat{F}(x_*)$。

同理可证 $x_*\in\hat{G}(x_*)$。故由引理 1 知 x_* 是$F,\ G$的公共不动点。

设 $y_*\in X$也是$F,\ G$的公共不动点，于是有 $y_*\in\hat{F}(y_*)\cap\hat{G}(y_*)$。故由（2.1）有

$$\begin{aligned}
d(x_*,\ y_*)&\leqslant H(\hat{F}(x_*),\ \hat{G}(y_*))\leqslant\Phi(d(x_*,\ y_*),\ 0,\ 0,\ d(x_*,\ y_*),\ d(x_*,\ y_*))\\
&\leqslant\varphi(d(x_*,\ y_*))
\end{aligned}$$

故有 $d(x_*,\ y_*)=0$，即 $x_*=y_*$。证毕。

注 1　于（2.7）两端让 $m\to\infty$，即得 $\{x_k\}$ 收敛于不动点 x_* 的误差估计式：

$$d(x_*,\ x_k)\leqslant\beta(t_*-t_k)\tag{2.8}$$

由定理 1 直接可得下面的结果

定理 2　设$\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$是$X\to\mathscr{W}(X)$的 Fuzzy 映象列，设对任意的正整数 $i,\ j,\ i\neq j$，和任意的 $x,\ y\in X$有

$$H(\hat{F}_i(x),\hat{F}_j(y))\leqslant\Phi(d(x,y),d(x,\hat{F}_i(x)),d(y,\hat{F}_j(y)),d(x,\hat{F}_j(y)),d(y,\ \hat{F}_i(x)))\tag{2.9}$$

其中函数Φ满足条件(Φ_1)，(Φ_2)。任取 $x_0\in X,\ x_1\in\hat{F}_i(x_0),\ \beta>1$，作非负实数列$\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$满足条件（2.2）。若$t_k\to t_*<\infty$，则存在$\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$的唯一公共不动点 $x_*\in X$。

推论 1　设$\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$是$X\to\mathscr{W}(X)$的 Fuzzy 映象列，设对任意的正整数 $i,\ j,\ i\neq j$和任意的 $x,\ y\in X$ 满足条件（2.9），其中函数Φ满足条件(Φ_1)和下之条件(Φ_3)：

(Φ_3)　$\Phi(t,\ t,\ t,\ at,\ bt)\leqslant\gamma t$，其中 $\gamma\in(0,\ 1),\ a,\ b=0,\ 1,\ 2$且$a+b=2$。则定理 2 的结论仍成立。

证　取 $t_0=0,\ x_0\in X,\ x_1\in\hat{F}_i(x_0),\ t_1>d(x_0,\ x_1)$。定义非负实数列$\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$如下：

$$t_{k+1}=t_k+\varphi(\beta(t_k-t_{k-1})),\ k=1,\ 2,\ \cdots\tag{2.10}$$

其中$\beta>1$，且$\beta\gamma<1$，又$\varphi(t)\overset{\Delta}{=}\gamma t$，$t\geqslant 0$。于是由（2.10）有

$$t_{k+1}-t_k=\beta\gamma(t_k-t_{k-1})=\cdots=(\beta\gamma)^k(t_1-t_0)=(\beta\gamma)^k t_1$$

因而有

$$\lim_{k\to\infty}t_k=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}(t_i-t_{i-1})=\frac{t_1}{1-\beta\gamma}<\infty$$

故结论由定理2得知。

推论 2　设$\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$是$X\to\mathscr{W}(X)$的 Fuzzy 映象列。设对一切的正整数i，j，$i\neq j$和任意的x，$y\in X$有

$$H(\hat{F}_i(x),\hat{F}_j(y))\leqslant q\max\left\{d(x,y),d(x,\hat{F}_i(x)),d(y,\hat{F}_j(y)),\frac{d(x,\hat{F}_j(y))+d(y,\hat{F}_i(x))}{2}\right\}$$

其中$0<q<1$。则推论1的结论仍成立。

证　取　$\Phi(t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ t_5)=q\max\left\{t_1,\ t_2,\ t_3,\ \dfrac{t_4+t_5}{2}\right\}$

于是$\Phi(t,\ t,\ t,\ at,\ bt)=qt$，其中$a$，$b=0$，1，2，且$a+b=2$。故结论由推论1得之。

注 2　[1]中的定理1和定理4及[4]中的结果都是定理1和定理2的特例。

三、进一步的结果

设$C(X)$是X中一切非空紧集族。设$\mathscr{W}_K(X)\subset\mathscr{F}(X)$这样的子族，对每一$A\in\mathscr{W}_K(X)$，由下式定义的集合$\hat{A}\in C(X)$：

$$\hat{A}=\{x\in X:A(x)=\max_{u\in X}A(u)\}$$

设F是$X\to\mathscr{W}_K(X)$的模糊映象，$\hat{F}:X\to C(X)$为按(1.1)的方式由F产生的集值映象。令

$$r_F=\inf\{d(x,\ \hat{F}(x)),\ x\in X\}\tag{3.1}$$

设$\{x_n\}\subset X$是这样的序列，使得$d(x_n,\ \hat{F}(x_n))\to r_F$。又因$\hat{F}(x_n)$是非空紧集，故存在$y_n\in\hat{F}(x_n)$，使得

$$d(x_n,\ y_n)=d(x_n,\ \hat{F}(x_n))\tag{3.2}$$

如果$\{y_n\}$中存在收敛子列$\{y_{n_i}\}$，比如$y_{n_i}\to y_0$，且$\{x_{n_i}\}$中有无穷子列其每一元异于y_0，则称F具有性质(C)。

定理 3　设F，G是$X\to\mathscr{W}_K(X)$的 Fuzzy 映象，设

$$H(\hat{F}(x),\hat{G}(y))<\Phi(d(x,y),d(x,\hat{F}(x)),d(y,\hat{G}(y)),d(x,\hat{G}(y)),d(y,\hat{F}(x)))\tag{3.3}$$

对一切x，$y\in X$，$x\neq y$成立，其中函数Φ满足条件：

$(\Phi_1)'$　$\Phi:[0,\ \infty)^5\to[0,\ \infty)$对每一变量严格增，$\Phi$上半连续；

$(\Phi_2)'$　$\Phi(t,\ t,\ t,\ at,\ bt)\leqslant t$，$\forall t\geqslant 0$，其中$a$，$b=0$，1，2，$a+b=2$。

若F和G都具有性质(C)。则F，G在X中有唯一不动点。

证　记

$$r_F=\inf\{d(x,\ \hat{F}(x)),\ x\in X\},\quad r_G=\inf\{d(x,\ \hat{G}(x)),\ x\in X\}$$

设$\{x_n\}\subset X$，使得$d(x_n,\ \hat{F}(x_n))\to r_F$，而$y_n\in\hat{F}(x_n)$满足

$$d(x_n,\ y_n)=d(x_n,\ \hat{F}(x_n)) \tag{3.4}$$

因F具有性质(C)，不妨设$y_n \to y_0 \in X$，又设$\{x_{n_i}\}$中每一元都异于y_0。于是有

$$d(y_0,\ \hat{G}(y_0)) \leqslant d(y_0,\ y_{n_i})+d(y_{n_i},\ \hat{G}(y_0)) \leqslant d(y_0,\ y_{n_i})+H(\hat{F}(x_{n_i}),\ \hat{G}(y_0)) \tag{3.5}$$

而 $H(\hat{F}(x_{n_i}),\ \hat{G}(y_0))<\Phi(d(x_{n_i},\ y_{n_i})+d(y_{n_i},\ y_0),\ d(x_{n_i},\ \hat{F}(x_{n_i})),\ d(y_0,\ \hat{G}(y_0)),$
$d(x_{n_i},\ y_{n_i})+d(y_{n_i},\ y_0)+d(y_0,\ \hat{G}(y_0)),\ d(y_0,\ y_{n_i})+d(y_{n_i},\ \hat{F}(x_{n_i})))$

把上式代入（3.5），然后让$n_i \to \infty$，得

$$d(y_0,\ \hat{G}(y_0)) \leqslant \Phi(r_F,\ r_F,\ d(y_0,\ \hat{G}(y_0)),\ r_F+d(y_0,\ \hat{G}(y_0)),\ 0)$$

若$r_F<d(y_0,\ \hat{G}(y_0))$，由$\Phi$的严格增性得

$$d(y_0,\ \hat{G}(y_0))<\Phi(d(y_0,\ \hat{G}(y_0)),\ d(y_0,\ \hat{G}(y_0)),\ d(y_0,\ \hat{G}(y_0)),\ 2d(y_0,\ \hat{G}(y_0)),\ 0) \leqslant d(y_0,\ \hat{G}(y_0))$$

矛盾。由此矛盾得知$d(y_0,\ \hat{G}(y_0)) \leqslant r_F$，故$r_G \leqslant r_F$。

由对称性又可得$r_F \leqslant r_G$，因而有$r_F=r_G=d(y_0,\ \hat{G}(y_0))$。

下证$r_F=0$。设相反$r_F=d(y_0,\ \hat{G}(y_0))>0$，因$\hat{G}(y_0)$非空紧，故存在$z_0 \in \hat{G}(y_0)$，使得$d(y_0,\ z_0)=r_F>0$，故有

$$d(z_0,\ \hat{F}(z_0)) \leqslant H(\hat{G}(y_0),\ \hat{F}(z_0))<\Phi(d(z_0,\ y_0),\ d(z_0,\ \hat{F}(z_0)),\ d(y_0,\ z_0)+d(z_0,\ \hat{G}(y_0)),\ 0,\ d(y_0,\ z_0)+d(z_0,\ \hat{F}(z_0))) \tag{3.6}$$

仿上一样可证$d(z_0,\ \hat{F}(z_0))<d(y_0,\ z_0)=r_F$。因而有

$$r_F \leqslant d(z_0,\ \hat{F}(z_0))<r_F \tag{3.7}$$

矛盾。由此矛盾得证

$$d(z_0,\ \hat{F}(z_0))=r_F=r_G=d(y_0,\ \hat{G}(y_0))=0=d(y_0,\ z_0)$$

故y_0是F和G的公共不动点。

若$y_* \in X$也是F和G的公共不动点，且$y_0 \neq y_*$，则有

$$d(y_0,\ y_*) \leqslant H(\hat{F}(y_0),\ \hat{G}(y_*))<\Phi(d(y_0,\ y_*),\ 0,\ 0,\ d(y_0,\ y_*),\ d(y_0,\ y_*)) \leqslant d(y_0,\ y_*)$$

矛盾。由此矛盾得证$y_0=y_*$。证毕。

注 3　定理 3 可推广到序列的情形，这里不再赘述。

参 考 文 献

[1] 张石生，Fuzzy 映象的不动点定理，应用数学和力学，5，2（1984），297—304.

[2] 张石生，模糊映象的不动点定理，科学通报，29，14（1984），833—836.

[3] 张石生、黄南京，广义模糊映象的不动点定理，工程数学学报，2（1984），135—137.

[4] Heilpern, S., Fuzzy mapping and fixed point theorem, *J. Math. Anal. Appl.*, 83 (1981), 566—569.

[5] Butnariu, D., Fixed points for fuzzy mappings, *Fuzzy Sets and Systems*, 7 (1982), 191—207.

[6] 付俊义，压缩集值映象族的不动点定理，江西大学自然科学学报，9，1（1985），5—10.

[7] Nadler, S. B., Jr., Multi-valued contraction mappings, *Pacific J. Math.*, 30 (1969), 475—488.

Fixed Point Theorems for Fuzzy Mapping (II)

Zhang Shi-sheng
(*Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu*)

Abstract

This paper presents some new fixed point theorems for fuzzy mappings. The results given in this paper improve and extend some recent results of [1, 4, 5].