应用数学和力学，第7卷第2期（1986年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

在面斜对称载荷下无限各向异性介质内的周期裂纹*

蔡海涛

（中南矿冶学院，1984年12月14日收到）

摘　要

本文试图藉助复变函数方法求解在面斜对称载荷下无限各向异性弹性介质的周期裂纹问题．这问题将化为欲确定满足某种边值条件的两个复变函数．文中假定应力、位移与边值条件是周期的，而且假定应力在无穷远处有界．这里的解答已表示为封闭形式．

一、导　引

一维奇异积分方程理论应用于求解各向同性介质内的间断曲线问题已被 Мусхелишвили[1]广泛地讨论．这种理论显得特别简单与有效，假若复变函数理论的称为 Riemann-Hilbert 问题的边值问题的解已经取得的话．Лехницкий[2] Савин[3]，Sih与Liebowitz[4]已应用推广的 Riemann-Hilbert 表达式求解各向异性平面介质内的裂纹（有限个）问题．路见可应用周期 Reimann-Hilbert 表达式已求解各向同性平面介质内的周期裂纹问题[5]．

本文，藉助于推广的 Riemann-Hilbert 表达式，考虑在关于裂纹面斜对称载荷下各向异性介质的周期裂纹问题．此问题化为欲确定满足某种边值条件的两个复变函数．

这里假定应力、位移与边界条件是周期的，而且假定应力在无限远处有界．这些解答是用封闭形式表示的．

周期 Riemann-Hilbert 问题是欲确定在已被分布在 x 轴上以 $a\pi$ 为周期的周期线段（或裂纹）所切割的复平面上分片全纯函数．假定每个线段（或裂纹）的长度等于 $2l(l<a\pi/2)$，且以 L_j 表示第 j 个线段（$j=0$，±1，±2，$\cdots$），而 $L_0=[-l,l]$（图1）．周期线段（或裂纹）的全体用下式表示：

$$L=\sum_{j=-\infty}^{\infty}L_j$$

而在 x 轴上与其相补的未切割部分记为 L^*．

在本问题讨论之前，给出以下说明．

众所周知，应力分量与位移分量可用 Goursat 函数$\varphi(z_1)$与$\psi(z_2)$表示为

* 周焕文推荐．

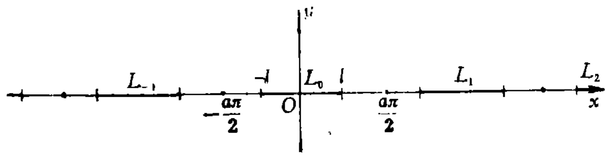

图 1

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=2\mathrm{Re}[s_1^2\varphi'(z_1)+s_2^2\psi'(z_2)]\\ \sigma_y&=2\mathrm{Re}[\varphi'(z_1)+\psi'(z_2)]\\ \sigma_{xy}&=-2\mathrm{Re}[s_1\varphi'(z_1)+s_2\psi'(z_2)]\end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

以及

$$u_x=2\mathrm{Re}[p_1\varphi(z_1)+p_2\psi(z_2)],\quad u_y=2\mathrm{Re}[q_1\varphi(z_1)+q_2\psi(z_2)] \tag{1.2}$$

其中 z_j, p_j, q_j $(j=1,\ 2)$为

$$z_1=x+\mu_1 y,\quad z_2=x+\mu_2 y$$

$$p_1=a_{11}s_1^2+a_{12}-a_{16}s_1,\quad p_2=a_{11}s_2^2+a_{12}-a_{16}s_2$$

$$q_1=\frac{a_{12}s_1^2+a_{22}-a_{26}s_1}{s_1},\quad q_2=\frac{a_{12}s_2^2+a_{22}-a_{26}s_2}{s_2}$$

而 $a_{ij}(i=1,\ 2,\ 6;\ j=1,\ 2,\ 6)$为弹性系数，$\mu_1$, $\bar{\mu}_1$, μ_2, $\bar{\mu}_2$ 为特征方程

$$a_{11}\mu^4-2a_{16}\mu^3+(2a_{12}+a_{66})\mu^2-2a_{26}\mu+a_{22}=0$$

的根。易于证明，若应力与位移是以 $a\pi$ 为周期，从方程（1.1）与（1.2），有 $\varphi'(z_1)$，与 $\psi'(z_2)$是周期为 $a\pi$ 的周期函数[6]。

二、问题的边值条件与解答

设$\Phi(z_1)=\varphi'(z_1)$，$\Psi(z_2)=\psi'(z_2)$

为相应于关于 x 轴斜对称作用且以 $a\pi$ 为周期的面剪切载荷问题的 Goursat 函数。在实轴上 $z_1=z_2=\tau$。于是，从方程（1.1），条件

$$\Phi(\tau)+\Psi(\tau)=0,\qquad 在L^*上 \tag{2.1}$$

成立。作用在周期裂纹 $L=\sum_{j=-\infty}^{\infty}L_j$ 上的 σ_{xy}^+, σ_{xy}^- 的值，假定是已知的，且是以 $a\pi$ 为周期的，其中正号（+）与负号（−）表示周期裂纹上边与下边的边界值。由方程（1.1）与（2.1），边值条件可只用$\Phi(\tau)$表示，按照周期性假定，边值条件只需在L_0上考虑，即

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xy}^+&=(s_2-s_1)\Phi^+(\tau)+(\bar{s}_2-\bar{s}_1)\bar{\Phi}^-(\tau),\qquad 在\ L_0\ 上\\ \sigma_{xy}^-&=(s_2-s_1)\Phi^-(\tau)+(\bar{s}_2-\bar{s}_1)\bar{\Phi}^+(\tau),\qquad 在\ L_0\ 上\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

相加与相减上两式，得到

$$[(s_2-s_1)\Phi(\tau)+(\bar{s}_2-\bar{s}_1)\bar{\Phi}(\tau)]^+ +[(s_2-s_1)\Phi(\tau)+(\bar{s}_2-\bar{s}_1)\bar{\Phi}(\tau)]^-=2f(\tau),\qquad 在\ L_0\ 上 \tag{2.3}$$

$$[(s_2-s_1)\Phi(\tau)-(\bar{s}_2-\bar{s}_1)\bar{\Phi}(\tau)]^+ -[(s_2-s_1)\Phi(\tau)-(\bar{s}_2-\bar{s}_1)\bar{\Phi}(\tau)]^-=2g(\tau),\qquad 在\ L_0\ 上 \tag{2.4}$$

其中

$$f(\tau)=(\sigma_{xy}^{+}+\sigma_{xy}^{-})/2,\quad g(\tau)=(\sigma_{xy}^{+}-\sigma_{xy}^{-})/2,\qquad \text{在 } L_0 \text{ 上}$$

假定 $f(\tau)$，$g(\tau)$满足 Hölder 条件。显然，$f(\tau)$，$g(\tau)$为以 $a\pi$ 为周期的函数。

因为已假定应力在无限远处有界，这样，$\Phi(z_1)$与$\Psi(z_2)$在$z=\pm\infty i$（即 $z=x+iy$，$y\to\pm\infty$）处有界

边值问题（2.4）的一般解答可由 Hilbert 核积分公式给出

$$(s_2-s_1)\Phi(z_1)-(\bar{s}_2-\bar{s}_1)\bar{\Phi}(z_1)=\frac{1}{a\pi i}\int_{-l}^{l}g(\tau)\cot\frac{\tau-z_1}{a}d\tau+2\gamma \tag{2.5}$$

其中γ为未定复常数。

引入 Plemelj-Hilbert 函数

$$X(z_1)=\sqrt{R(z_1)}$$

其中

$$R(z_1)=\tan^2\frac{l}{a}-\tan^2\frac{z_1}{a}$$

并且选取满足下列条件的一个分支

$$\lim_{z\to\pm a\pi/2}\frac{\tan(z/a)}{i\sqrt{R(z)}}=1$$

应用周期 Riemann-Hilbert 问题的解[7]，方程（2.3）的一般解（在 $z=\pm\infty i$ 处有界）为

$$(s_1-s_1)\Phi(z_1)+(\bar{s}_2-\bar{s}_1)\bar{\Phi}(z_1)$$

$$=\frac{1}{a\pi i\sqrt{R(z_1)}}\int_{-l}^{l}f(\tau)\sqrt{R(\tau)}\cot\frac{\tau-z_1}{a}d\tau+\frac{2D_0\tan(z_1/a)+2D_1}{\sqrt{R(z_1)}} \tag{2.6}$$

其中D_0与D_1为未定实常数。

由方程（2.5）与（2.6）可联立求解$\Phi(z_1)$为

$$\Phi(z_1)=\Phi^*(z_1)+\frac{1}{s_2-s_1}\frac{D_0\tan(z_1/a)+D_1}{\sqrt{R(z_1)}}+\frac{\gamma}{s_2-s_1} \tag{2.7}$$

其中

$$(s_2-s_1)\Phi^*(z_1)=\frac{1}{2a\pi i}\int_{-l}^{l}g(\tau)\cot\frac{\tau-z_1}{a}d\tau$$

$$+\frac{1}{2a\pi i\sqrt{R(z_1)}}\int_{-l}^{l}f(\tau)\sqrt{R(\tau)}\cot\frac{\tau-z_1}{a}d\tau \tag{2.8}$$

按照相似方法，求得函数$\Psi(z_2)$

$$\Psi(z_2)=\Psi^*(z_2)+\frac{1}{s_1-s_2}\frac{D_0^*\tan(z_2/a)+D_1^*}{\sqrt{R(z_2)}}+\frac{\gamma^*}{s_1-s_2} \tag{2.9}$$

其中

$$(s_1-s_2)\Psi^*(z_2)=\frac{1}{2a\pi i}\int_{-l}^{l}g(\tau)\cot\frac{\tau-z_2}{a}d\tau$$

$$+\frac{1}{2a\pi i\sqrt{R(z_2)}}\int_{-l}^{l}f(\tau)\sqrt{R(\tau)}\cot\frac{\tau-z_2}{a}d\tau \tag{2.10}$$

且D_0^*，D_1^*为未定实常数，而γ^*为未定复常数。

为确定常数D_0，D_0^*，D_1，D_1^*，γ，γ^*，必须考虑位移周期性条件，以及在$z=\pm\infty i$处的载荷情况。

首先，考虑位移周期性条件：

$$[u+iv]_{A_\pm}=0 \tag{2.11}$$

其中$A_\pm$如图 2 表示。

应用方程(1.2)，(2.7)与(2.9) 以及注意到下列等式

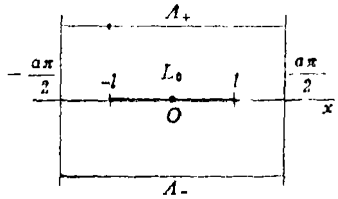

图 2

$$\frac{1}{\sqrt{R(\pm\infty i)}}=\pm\cos\frac{l}{a},\quad z^*=x+\mu_j y \quad (j=1 \text{ 或 } 2)$$

$$\int_{A_\pm}\frac{dz}{\sqrt{R(z^*)}}=\pm a\pi\cos\frac{l}{a}$$

$$\int_{A_\pm}\frac{\tan\frac{z^*}{a}}{\sqrt{R(z^*)}}dz=\int_{A_\pm}\frac{\cos\frac{\tau-z^*}{a}}{\sqrt{R(z^*)}}dz=a\pi i\cos\frac{l}{a}$$

位移周期性条件 (2.11) 可化为

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{p_1-p_2}{s_2-s_1}\left[\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}g(\tau)d\tau+\frac{\cot(l/a)}{2}\int_{-l}^{l}f(\tau)\sqrt{R(\tau)}d\tau\right]\right.$$
$$\left.+\frac{p_1}{s_2-s_1}a\pi\cos\frac{l}{a}(D_0i+D_1)+\frac{p_2}{s_1-s_2}a\pi\cos\frac{l}{a}(D_0^*i+D_1^*)+a\pi p_1\gamma+a\pi p_2\gamma^*\right\}=0 \tag{2.12}$$

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{q_1-q_2}{s_1-s_2}\left[\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}g(\tau)d\tau+\frac{\cos(l/a)}{2}\int_{-l}^{l}f(\tau)\sqrt{R(\tau)}d\tau\right]\right.$$
$$\left.+\frac{q_1}{s_2-s_1}a\pi\cos\frac{l}{a}(D_0i+D_1)+\frac{q_2}{s_1-s_2}a\pi\cos\frac{l}{a}(D_0^*i+D_1^*)+a\pi q_1\gamma+a\pi q_2\gamma^*\right\}=0 \tag{2.13}$$

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{p_1-p_2}{s_2-s_1}\left[-\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}g(\tau)d\tau+\frac{\cos(l/a)}{2}\int_{-l}^{l}f(\tau)\sqrt{R(\tau)}d\tau\right]\right.$$
$$\left.+\frac{p_1}{s_2-s_1}a\pi\cos\frac{l}{a}(D_0i+D_1)+\frac{p_2}{s_1-s_2}a\pi\cos\frac{l}{a}(D_0^*i+D_1^*)+a\pi p_1\gamma+a\pi p_2\gamma^*\right\}=0 \tag{2.14}$$

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{q_1-q_2}{s_2-s_1}\left[-\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}g(\tau)d\tau+\frac{\cos(l/a)}{2}\int_{-l}^{l}f(\tau)\sqrt{R(\tau)}d\tau\right.\right.$$
$$\left.+\frac{q_1}{s_2-s_1}a\pi\cos\frac{l}{a}(D_0i-D_1)+\frac{q_2}{s_1-s_2}a\pi\cos\frac{l}{a}(D_0^*i-D_1^*)+a\pi q_1\gamma+a\pi q_2\gamma^*\right\}=0 \tag{2.15}$$

其次，考虑在 $z=\pm\infty i$ 处的载荷情况：

$$\sigma_y(\pm\infty i)=\sigma_{xy}(\pm\infty i)=0 \tag{2.16}$$

由方程(1.2)，(2.7)与(2.9)，方程(2.16)可写为

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{-1}{2a\pi}\int_{-l}^{l}g(\tau)d\tau+\frac{\cos(l/a)}{2a\pi}\int_{-l}^{l}f(\tau)\sqrt{R(\tau)}d\tau\right.,$$
$$\left.-\frac{1}{s_2-s_1}(-D_0i+D_1)\cos\frac{l}{a}+\gamma-\frac{1}{s_1-s_2}(-D_0^*i+D_1^*)\cos\frac{l}{a}+\gamma^*\right\}=0 \tag{2.17}$$

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2a\pi}\int_{-l}^{l}g(\tau)d\tau+\frac{\cos(l/a)}{2}\int_{-l}^{l}f(\tau)\sqrt{R(\tau)}d\tau\right.$$

$$\left.+\frac{1}{s_2-s_1}(D_0i+D_1)\cos\frac{l}{a}+\gamma+\frac{1}{s_1-s_2}(D_0^*i+D_1^*)\cos\frac{l}{a}+\gamma^*\right\}=0 \tag{2.18}$$

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{s_2-s_1}\left[-\cos\frac{l}{a}(-D_0i+D_1)+\cos\frac{l}{a}(-D_0^*i+D_1^*)\right]+\gamma+\gamma^*\right\}=0 \tag{2.19}$$

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{s_2-s_1}\left[\cos\frac{l}{a}(D_0i+D_1)-\cos\frac{l}{a}(D_0^*i+D_1^*)\right]+\gamma+\gamma^*\right\}=0 \tag{2.20}$$

常数D_0，D_1，D_0^*，D_1^*，γ与γ^*能由方程（2.12）～(2.15)，(2.17)～(2.20) 确定。这样，本问题的解已求得。

考虑在裂纹面上作用的剪切力致

$$g(\tau)=0$$

的特殊情况。此时，解有如下简单形式

$$(s_2-s_1)\Phi(z_1)=\frac{1}{2a\pi i\sqrt{R(z_1)}}\int_{-l}^{l}f(\tau)\sqrt{R(\tau)}\cot\frac{\tau-z_1}{a}d\tau$$

$$+\frac{D_0\tan(z_1/a)+D_1}{\sqrt{R(z_1)}}+\gamma \tag{2.21}$$

$$(s_1-s_2)\Psi(z_2)=\frac{1}{2a\pi i\sqrt{R(z_2)}}\int_{-l}^{l}f(\tau)\sqrt{R(\tau)}\cot\frac{\tau-z_2}{a}d\tau$$

$$+\frac{D_0^*\tan(z_2/a)+D_1^*}{\sqrt{R(z_2)}}+\gamma^* \tag{2.22}$$

其中 D_0，D_1，D_0^*，D_1^*，γ，γ^* 由方程（2.12）～（2.15），（2.17）～（2.20）确定，此时这些方程中的 $g(\tau)=0$。

对于$g(\tau)=0$与$f(\tau)=-q$ 的情况，

$$(s_2-s_1)\Phi(z_1)=\frac{-q}{2a\pi i\sqrt{R(z_1)}}\int_{-l}^{l}\sqrt{R(\tau)}\cot\frac{\tau-z_1}{a}d\tau-\frac{D_0\tan(z_1/a)+D_1}{\sqrt{R(z_1)}}+\gamma \tag{2.23}$$

$$(s_1-s_2)\Psi(z_2)=\frac{-q}{2a\pi i\sqrt{R(z_2)}}\int_{-l}^{l}\sqrt{R(\tau)}\cot\frac{\tau-z_2}{a}d\tau-\frac{D_0^*\tan(z_2/a)+D_1^*}{\sqrt{R(z_2)}}+\gamma^* \tag{2.24}$$

其中D_0，D_1，D_0^*，D_1^*，γ，γ^*由方程（2.12）～（2.15)，(2.17）～(2.20）确定。此时这些方程中的$f(\tau)=-q$，$g(\tau)=0$。

三、应 力 分 析

为得到裂纹尖端的应力分布，令

$$x=l+r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

且设 r 与半裂纹相比较是很小的。极坐标 r 与 θ 分别表示自裂纹尖端的径向距离与径向线和裂纹前缘的夹角。因而方程（2.23）与（2.24）中的函数$\sqrt{R(z_j)}$ ($j=1, 2$) 可近似表示为

$$\left(\tan^2\frac{z_j}{a}-\tan^2\frac{l}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\approx\sec\frac{l}{a}[2r(\cos\theta+\mu_j\sin\theta)]^{\frac{1}{2}}\qquad(j=1,\ 2)$$

以及 $z_1 \approx z_2 \approx 1$。应用这些结果，关于斜对称载荷的周期边值问题的复变函数可为

$$\Phi(z_1)=\frac{F}{[r(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)]^{\frac{1}{2}}}+O(r^0),\quad \Psi(z_2)=\frac{G}{[r(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)]^{\frac{1}{2}}}+O(r^0) \tag{3.1}$$

其中

$$F=\frac{k\cos(l/a)}{2\sqrt{2}(s_2-s_1)},\quad G=\frac{k\cos(l/a)}{2\sqrt{2}(s_1-s_2)}=-F$$

应力强度因子 k 可以直接由复函数 $\Phi(z_1)$ 或 $\Psi(z_2)$ 计算得到。使 $z_j(j=1,\ 2)$ 趋于裂纹上的点，例如 z_0，方程 (2.23) 得到公式

$$k=2\sqrt{2}(s_2-s_1)\lim_{z_1\to z_0}\left(\tan\frac{z_1}{a}-\tan\frac{z_0}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\Phi(z_1) \tag{3.2}$$

k 也可从 $\Psi(z_2)$ 求得为

$$k=2\sqrt{2}(s_1-s_2)\lim_{z_2\to z_0}\left(\tan\frac{z_2}{a}-\tan\frac{z_0}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\Psi(z_2) \tag{3.3}$$

这里，当 $a\to\infty$ 时，由方程 (3.2) 与 (3.3) 可得与 Sih, Liebowitz[4] 一致的在 x 轴上只存在单个裂纹的结果。

参 考 文 献

[1] Мусхелишвили Н. И., 《数学弹性力学中的几个基本问题》，科学出版社 (1958).

[2] Лехницкий С. Г., 《各向异性板》，科学出版社 (1955).

[3] Савин Г. Н., 《孔附近的应力集中》，科学出版社 (1958).

[4] Sih, G. C. and H. Liebowitz, Mathematical theories of brittle fracture, in *Fracture*, H. Liebowitz ed., Academic Press, 2 (1968).

[5] 路见可，关于周期应力平面弹性基本问题，力学学报，7, 4 (1964), 316—327.

[6] 蔡海涛，平面弹性理论的周期接触问题，应用数学学报，2, 2 (1979), 181—195.

[7] 路见可，周期 Riemann 边值问题及其在弹性力学中的应用，数学学报，13, 3 (1963).

The Periodic Cracks of an Infinite Anisotropic Media for Plane Skew-Symmetric Loadings

Cai Hai-tao

(Central-South Institute of Mining and Metallurgy, Changsha, Hunan)

Abstract

This paper attempts to solve the periodic crack problems of infinitive anisotropic media for plane skew-symmetric loadings by means of the method of complex function. The problem are now reduced to the determination of two complex functions that must satisfy certain boundary conditions. In this paper, the stresses, the displacements and the boundary conditions are assumed to be periodic, and further, the streases are assumed to be bounded at infinity. The solutions are expressed in closed forms.