应用数学和力学，第7卷第2期（1986年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

分区函数法在加权残数法中的应用*

钱 国 桢

（杭州市城建设计院，1984年4月27日收到）

摘　　要

本文提出了一个分区函数法的概念。即根据边界形状或刚度、荷载的变化，将原受力体分成若干个分区。在每个分区中设定不同的试函数，并在各分区的交界上考虑了连续协调条件。这样共建立了内部平衡、外部边界和交线协调三种残数方程。文中给出了公式和例题。

一、概　　述

自从徐次达教授首先向我国力学界系统引入加权残数法后[1]，由于它具有有限元法所不具备的优点，因此它在我国力学界得到普遍重视，并在方法与应用两方面都得到了迅速发展[2]。但以往一般常用的一些方法对边界形状复杂或刚度、荷载变化复杂的情况，会造成计算繁复或收敛性不好。由此我们提出了用分区函数法来求解，即根据边界形状或刚度、荷载的变化，将原受力体分成若干个分区，在每个分区设定不同的试函数，使其满足或不满足内部和边界条件。并在各分区的交界上考虑了连续协调条件，这样在设定的各种试函数下可得几组残数方程。文中并给出了用离散型最小二乘法来求解这类残数方程的公式和步骤，最后还给出了一个简单算例。

二、理　　论

今有某一固体力学问题，其在V区域内有平衡方程为：

$$T(\phi)-f=0 \tag{2.1}$$

并在B边界上有边界条件：

$$G(\phi)-g=0 \tag{2.2}$$

其中：T，G为算子；ϕ为待求函数；f，g为不含ϕ的函数。

因其真正的解ϕ未知，现在用近似解w（即试函数）代替，即：

$$\phi\approx w=w(c,\ x) \tag{2.3}$$

其中：c为待定参数，x为坐标向量。

若将(2.3)代入(2.1)、(2.2)就不能使上二式为零，而分别产生一个残数R_I，R_B，则有：

* 徐次达推荐。

$$\left.\begin{aligned} T(w)-f&=R_I(c,\ x) \qquad x\in V \\ G(w)-g&=R_B(c,\ x) \qquad x\in B \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

式 (2.4) 即为一般文献中常用的内部和外部残数方程。若结构边界形状比较复杂，在 V 区内用同一种试函数可能较难满足。故将 V 区可分成数目不多的 n 个分区 V_n，相应外边界 B 也分成 m 个分边界面（或线）B_m，同时还产生了 L 个交界 S_L。S_L 中第 P 个交界 S_P 为 V_i 分区与 V_{i+1} 分区的交界线，应满足：

力因素的连续条件

变形连续条件
$$\left.\begin{aligned} F_i(\phi)-F_{i+1}(\phi)&=0 \\ S_i(\phi)-S_{i+1}(\phi)&=0 \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

同样，因真正解 ϕ 未知，而用 w 代替，即以 (2.3) 式代入 (2.5) 式，一般不为零，而分别产生残数 R_F 及 R_S，于是有：

$$\left.\begin{aligned} F_i(w_i)-F_{i+1}(w_{i+1})&=R_F(c,\ x) \qquad x\in S_P \\ S_i(w_i)-S_{i+1}(w_{i+1})&=R_S(c,\ x) \qquad x\in S_P \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

(2.6) 式即为增加的交界线连续条件残数方程，简称交界协调残数方程。于是综合起来可得到下列四组残数方程：

$$\left.\begin{aligned} R_{Ii}(c,\ x)&=T(w_i)-f_i, \qquad x\in V_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \\ R_{Bj}(c,\ x)&=G(w_j)-g_j, \qquad x\in B_j \quad (j=1,2,\cdots,m) \\ R_{Fk}(c,\ x)&=F_r(w_r)-F_{r+1}(w_{r+1}), \qquad x\in S_k \quad (k=1,2,\cdots,l) \\ R_{Sk}(c,\ x)&=S_r(w_r)-S_{r+1}(w_{r+1}), \qquad x\in S_k \quad (k=1,2,\cdots,l) \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

其中力因素的交界残数方程可包括：力、力矩、扭矩，变形交界残数方程可包括：位移、转角、甚至曲率等。

若采用离散型最小二乘法，列出残数平方和式：

$$I(c)=G_1^2\sum_{i=1}^{n}R_{Ii}^2+G_2^2\sum_{j=1}^{m}R_{Bj}^2+G_3^2\sum_{k=1}^{l}R_{Fk}^2+G_4^2\sum_{k=1}^{l}R_{Sk}^2 \tag{2.8}$$

上式中 G_1，G_2，G_3，G_4 为考虑以上各残数方程量纲差别的调整系数。这可由试函数形式及各残数数量级差别而定。也可令 $G_1=1$，其他皆为相对值。

现在将 V 区域分成 p 个分区，设有 q 个未知参数。在每个分区内，分区外边界上和分区交界线上各配定若干点，其坐标为 x_i，共选用点次为 F（有时同一点在不同的残数方程中都被选用）。将 x_i 分别代入 (2.7) 式，即得到下列矩阵：

$$
\left\{\begin{array}{l}
G_1^2 R_{I1}(c,\ x_1)\\
\vdots\\
G_1^2 R_{I1}(c,\ x_k)\\
G_1^2 R_{I2}(c,\ x_{k+1})\\
\vdots\\
G_1^2 R_{I2}(c,\ x_l)\\
\vdots\\
G_1^2 R_{In}(c,\ x_{l+u})\\
\vdots\\
G_1^2 R_{In}(c,\ x_m)\\
G_2^2 R_{B1}(c,\ x_{m+1})\\
\vdots\\
G_2^2 R_{B1}(c,\ x_n)\\
\vdots\\
G_2^2 R_{Bm}(c,\ x_{n+v})\\
\vdots\\
G_2^2 R_{Bm}(c,\ x_p)\\
G_3^2 R_{F1}(c,\ x_{p+1})\\
\vdots\\
G_3^2 R_{F1}(c,\ x_q)\\
\vdots\\
G_3^2 R_{Fl}(c,\ x_{q+w})\\
\vdots\\
G_3^2 R_{Fl}(c,\ x_r)\\
G_4^2 R_{S1}(c,\ x_{r+1})\\
\vdots\\
G_4^2 R_{S1}(c,\ x_t)\\
\vdots\\
G_4^2 R_{Sl}(c,\ x_{t+z})\\
\vdots\\
G_4^2 R_{Sl}(c,\ x_F)
\end{array}\right\}
=
\left\{\begin{array}{l}
G_1^2[T(w_1(c,x_1))-f_1(x_1)]\\
\vdots\\
G_1^2[T(w_1(c,x_k))-f_1(x_k)]\\
G_1^2[T(w_2(c,x_{k+1}))-f_2(x_{k+1})]\\
\vdots\\
G_1^2[T(w_2(c,x_l))-f_2(x_l)]\\
\vdots\\
G_1^2[T(w_n(c,x_{l+u}))-f_n(x_{l+u})]\\
\vdots\\
G_1^2[T(w_n(c,x_m))-f_n(x_m)]\\
G_2^2[G(w_1(c,x_{m+1}))-g_1(x_{m+1})]\\
\vdots\\
G_2^2[G(w_1(c,x_n))-g_1(x_n)]\\
\vdots\\
G_2^2[G(w_m(c,x_{n+v}))-g_m(x_{n+v})]\\
\vdots\\
G_2^2[G(w_m(c,x_p))-g_m(x_p)]\\
G_3^2[F_1(w_1(c,x_{p+1}))-F_2(w_2(c,x_{p+1}))]\\
\vdots\\
G_3^2[F_1(w_1(c,x_q))-F_2(w_2(c,x_q))]\\
\vdots\\
G_3^2[F_l(w_{n-1}(c,x_{q+w}))-F_{l+1}(w_n(c,x_{q+w}))]\\
\vdots\\
G_3^2[F_l(w_{n-1}(c,x_r))-F_{l+1}(w_n(c,x_r))]\\
G_4^2[S_1(w_1(c,x_{r+1}))-S_2(w_2(c,x_{r+1}))]\\
\vdots\\
G_4^2[S_1(w_1(c,x_t))-S_2(w_2(c,x_t))]\\
\vdots\\
G_4^2[S_l(w_{n-1}(c,x_{t+z}))-S_{l+1}(w_n(c,x_{t+z}))]\\
\vdots\\
G_4^2[S_l(w_{n-1}(c,x_F))-S_{l+1}(w_n(c,x_F))]
\end{array}\right\}
\tag{2.9}
$$

1—n区内部残数方程 $(x\in V)$

1—m条外边界外部残数方程 $(x\in B)$

1—l条交界线力因素协调残数方程 $(x\in S)$

1—l条交界线变形协调残数方程 $(x\in S)$

(2.9) 式可缩写为：

$$\mathbf{R}=\mathbf{AC}-\mathbf{B} \tag{2.10}$$

式中：$\mathbf{R}$ 为 $F\times1$ 阶残数列阵；$\mathbf{C}$ 为 $T\times1$ 阶待定参数列阵；$\mathbf{B}$ 为 $F\times1$ 阶常数项列阵，对交界残数方程此项为零；$\mathbf{A}$ 为 $F\times T$ 阶的待定参数前的系数矩阵 $(F\geqslant T)$。则残数平方为：

$$\mathbf{I}=\mathbf{R}^T\mathbf{R} \tag{2.11}$$

取 $$\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial C_i}=0 \tag{2.12}$$

有 $$\frac{\partial \mathbf{R}^T\mathbf{R}}{\partial C_i}=\frac{\partial \mathbf{C}^T\mathbf{A}^T\mathbf{AC}}{\partial C_i}-2\frac{\partial \mathbf{C}^T\mathbf{A}^T\mathbf{B}}{\partial C_i}=2\mathbf{A}^T\mathbf{AC}-2\mathbf{A}^T\mathbf{B}=0 \tag{2.13}$$

得 $$\mathbf{A}^T\mathbf{AC}=\mathbf{A}^T\mathbf{B} \tag{2.14}$$

令 $$\mathbf{K}=\mathbf{A}^T\mathbf{A},\quad \mathbf{F}=\mathbf{A}^T\mathbf{B} \tag{2.15}$$

则 $$\mathbf{KC}=\mathbf{F} \tag{2.16}$$

(2.16)式与有限元中的位移法公式相当，解上式线性代数方程组，即可求得各未知参数 $\mathbf{C}$。

三、例　　题

如图1所示一平板，它受到均布载的作用。已知数据如下：

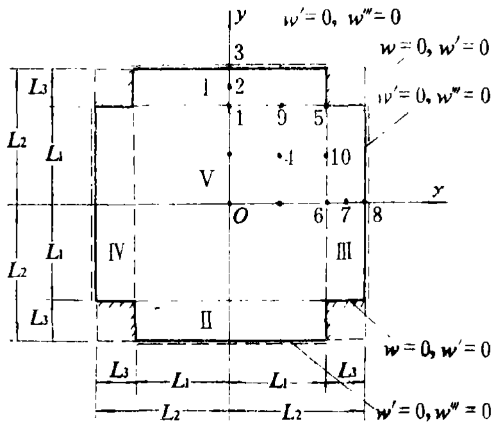

图 1

$$L_1=360\text{cm},\ L_2=390\text{cm},\ L_3=30\text{cm},\ h=25\text{cm},\ E=3.0\times10^5\text{kg/cm}^2,$$

$$\mu=0.15,\ q=1\text{t/m}^2=0.1\text{kg/cm}^2,$$

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}=3.996\times10^8\text{kg-cm},\quad \frac{q}{D}=0.25024\times10^{-9}/\text{cm}^3.$$

我们可将它按边界形状分成如图示的五个分区，因对称关系只需假设三个挠度试函数，并为计算简单起见仅取一个未知参数。

取Ⅰ区试函数为：

$$w_1=C_1(10L_2^2x^4-20L_1^2L_2^2x^2+10L_1^4L_2^2-y^6+5L_2^2y^4-7L_2^4y^2+4L_2^6)$$

它满足下列边界条件：

$$y=\pm L_2\ \text{处有}\qquad w_y'=0,\ w_y'''=0$$

考虑到结构对称，荷载对称，为简化计算起见，试函数中略去了奇次项与交叉项，并且计算仅考虑四分之一块。

考虑对称条件取Ⅲ区试函数为：

$$w_3=C_1(10L_2^2y^4-20L_1^2L_2^2y^2+10L_1^4L_2^2-x^6+5L_2^2x^4-7L_2^4x^2+4L_2^6)$$

它满足下列边界条件：

$$x=\pm L_2\ \text{处有}\qquad w_x'=0,\ w_x'''=0$$

w_1 与 w_3 未定常数相同，仅 x 与 y 互换。

再令Ⅴ区试函数为：

$$w_2=C_2(-x^6+5L_2^2x^4-7L_2^4x^2+4L_2^6-y^6+5L_2^2y^4-7L_2^4y^2+4L_2^6)$$

它满足下列边界条件：

$$x=\pm L_2\ \text{处},\ w_x'=0,\ w_x'''=0$$

$$y=\pm L_2\ \text{处},\ w_y'=0,\ w_y'''=0$$

即满足延伸后的外边界条件。但此三试函数皆未满足支座处的边界条件，因此存在外部残数

方程。

应用配点法，由Ⅰ区平衡条件，考虑三个配点：1(0,360)，2(0,375)，5(360,360)可得三个内部残数方程：

$$R_{I1}=8.1\times10^{6}C_1+0C_2-1$$
$$R_{I2}=4.131\times10^{6}C_1+0C_2-1$$
$$R_{I3}=8.1\times10^{6}C_1+0C_2-1$$

其中取 $q/D=1$，$G_1=1$。

由Ⅱ区平衡条件，考虑三个配点：6(360,0)，7(375,0)，5(360,360)同样可得三个内部残数方程（取$q/D=1$，$G_1=1$）：

$$R_{I4}=8.1\times10^{6}C_1+0C_2-1$$
$$R_{I5}=4.131\times10^{6}C_1+0C_2-1$$
$$R_{I6}=8.1\times10^{6}C_1+0C_2-1$$

由Ⅴ区平衡条件，考虑二个配点：0(0,0)，4(180,180) 也可得二个内部残数方程：（取$q/D=1$，$G_1=1$）

$$R_{I7}=0C_1+3.6504\times10^{7}C_2-1$$
$$R_{I8}=0C_1+1.3176\times10^{7}C_2-1$$

由Ⅰ区与Ⅴ区交界线w连续条件，考虑三个配点：1(0,360)，5(360,360)，9(180,360)可得三个交界w连续残数方程：（取 $q/D=1$，$G_2=10/L_1^4$）

$$R_{S1}=1.7403\times10^{7}C_1-1.0573\times10^{7}C_2-0$$
$$R_{S2}=2.1934\times10^{6}C_1-4.3869\times10^{6}C_2-0$$
$$R_{S3}=1.0747\times10^{7}C_1-0.7905\times10^{7}C_2-0$$

由Ⅱ区与Ⅴ区交界线w连续条件，考虑三个配点：6(360, 0)，5(360, 360)，10(360, 180) 同样可得三个交线w连续残数方程：（取$q/D=1$，$G_2=10/L_1^4$）

$$R_{S4}=1.7403\times10^{7}C_1-1.0573\times10^{7}C_2-0$$
$$R_{S5}=2.1934\times10^{6}C_1-4.3869\times10^{6}C_2-0$$
$$R_{S6}=1.0747\times10^{7}C_1-0.7905\times10^{7}C_2-0$$

再由Ⅰ区与Ⅴ区交界线w'_y连续条件，考虑同样三点可得三个交界w'_y连续残数方程：（取 $q/D=1$，$G_3=100/L_1^3$）

$$R_{S7}=2.3469\times10^{7}C_1-2.3469\times10^{7}C_2-0$$
$$R_{S8}=2.3469\times10^{7}C_1-2.3469\times10^{7}C_2-0$$
$$R_{S9}=2.3469\times10^{7}C_1-2.3469\times10^{7}C_2-0$$

同样由Ⅱ区与Ⅴ区交界线w'_x连续条件，考虑同样三点可得三个交界w'_x连续残数方程：（取$q/D=1$，$G_3=100/L_1^3$）

$$R_{S10}=2.3469\times10^{7}C_1-2.3469\times10^{7}C_2-0$$
$$R_{S11}=2.3469\times10^{7}C_1-2.3469\times10^{7}C_2-0$$
$$R_{S12}=2.3469\times10^{7}C_1-2.3469\times10^{7}C_2-0$$

由角点边界位移条件，即考虑5(360,360)处应有$w=0$，在Ⅰ区Ⅴ区可分别得：（取$q/D=1$，$G_4=10/L_1^4$）

$$R_{B1}=2.1934\times10^{6}C_1-0C_2-0$$
$$R_{B2}=0C_1-4.3869\times10^{6}C_2-0$$

以上各残数方程可归纳成下列矩阵运算式：

$$
\left\{\begin{matrix} R_{I1} \\ R_{I2} \\ R_{I3} \\ R_{I4} \\ R_{I5} \\ R_{I6} \\ R_{I7} \\ R_{I8} \\ R_{S1} \\ R_{S2} \\ R_{S3} \\ R_{S4} \\ R_{S5} \\ R_{S6} \\ R_{S7} \\ R_{S8} \\ R_{S9} \\ R_{S10} \\ R_{S11} \\ R_{S12} \\ R_{B1} \\ R_{B2} \end{matrix}\right\}_{22\times1}
=
\begin{bmatrix}
0.8100\times10^7 & 0 \\
0.4131\times10^7 & 0 \\
0.8100\times10^7 & 0 \\
0.8100\times10^7 & 0 \\
0.4131\times10^7 & 0 \\
0.8100\times10^7 & 0 \\
0 & 3.6504\times10^7 \\
0 & 1.3176\times10^7 \\
1.7403\times10^7 & -1.0573\times10^7 \\
0.2193\times10^7 & -0.4387\times10^7 \\
1.0747\times10^7 & -0.7905\times10^7 \\
1.7403\times10^7 & -1.0573\times10^7 \\
0.2193\times10^7 & -0.4387\times10^7 \\
1.0747\times10^7 & -0.7905\times10^7 \\
2.3469\times10^7 & -2.3469\times10^7 \\
2.3469\times10^7 & -2.3469\times10^7 \\
2.3469\times10^7 & -2.3469\times10^7 \\
2.3469\times10^7 & -2.3469\times10^7 \\
2.3469\times10^7 & -2.3469\times10^7 \\
2.3469\times10^7 & -2.3469\times10^7 \\
0.2193\times10^7 & 0 \\
0 & -0.4387\times10^7
\end{bmatrix}_{22\times2}
\left\{\begin{matrix} C_1 \\ C_2 \end{matrix}\right\}_{2\times1}
-
\left\{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}_{22\times1}
$$

即为： $\mathbf{R}=\mathbf{AC}-\mathbf{B}$

其中

$$I(C)=G_1^2\sum_{i=1}^{8}R_{Ii}^2+G_2^2\sum_{j=1}^{6}R_{Sj}^2+G_3^2\sum_{j=7}^{12}R_{Sj}^2+G_4^2\sum_{k=1}^{2}R_{Bk}^2$$

为计算方便把 G 相同的划为一类，

由 (2.15) 式可得

$$\mathbf{K}=\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 4.4525 & -3.8619 \\ -3.8619 & 5.1054 \end{bmatrix}\times10^{15}$$

由 (2.16) 式得：

$$\mathbf{F}=\mathbf{A}^T\mathbf{B}=\left\{\begin{matrix} 4.0662 \\ 4.9680 \end{matrix}\right\}\times10^7$$

由此得

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} 4.8383 \\ 5.1098 \end{Bmatrix} \times 10^{-8}$$

由此求得 $x=0$，$y=0$ 处

$$w=0.360\text{cm},\quad M_x=M_y=1801.46\ \text{kg-cm/cm}$$

由文[3]的程序求得同一点处：（取 1/4 区，划74个单元）

$w=0.4353\text{cm}$　　（误差　17%）

$M_x=M_y=1818\text{kg-cm/cm}$　　（误差0.91%）

可知取一个未知参数已可达到一定的精度。但当边界形状较复杂时，如需增加边角处计算结果的精度还宜增加未知参数数量。

本文写作中得到徐次达教授和金问鲁高级工程师的指导，谨致谢意。

参 考 文 献

[1] 徐次达，加权残数法解固体力学问题，力学与实践．4（1980）．

[2] 徐次达，加权残数法在固体力学中的应用——我国近年来进展情况，应用数学和力学，3，6（1982），737—742．

[3] 大连工学院工程力学研究所，多单元结构分析程序 DDJ 理论分析与程序实现（1982）．

Application of Subregion Function Method in the Method of Weighted Residuals

Qian Guo-zhen

(Hangzhou Architecture and Civil Engineering Design Institute, Hangzhou)

Abstract

In this paper, a new concept of subregion function method is suggested. According to the boundary shape and the stiffness and loading conditions of the structure, the original zone of the structure is divided into some subregions, in each of which different trial functions may be adopted. Conditions of compatibilities between subregions are considered. Finally residual equations consisted of interior residuals, boundary residuals and coboundary residuals between subregions are given.

A numerical example to illustrate the theory of this method is given.