应用数学和力学，第7卷第1期（1986年1月） 应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics 重庆出版社出版

散度、旋度和梯度的统一定义*

戴 振 鐸**

（美国密西根大学电机工程和计算机科学系，1984年11月15日收到）.

摘 要

本文根据统一的共同模式导出了散度、旋度和梯度的微分表达式。所有这些量都是单位容积中某一微分量的极限值，在利用了单位矢量在度规系数加权下的某些微分共系式后，我们立刻就能导出矢量分析中这三种量的全部表达式。

本文根据下述定义，导出在某一正交坐标系中散度、旋度和梯度的微分表达式。所有这些定义，都是建立在一个共同的模式上的，在讨论这些定义之前，我们将探讨微分长度、微分面积和微分容积的概念。同时，我们将首先导出单位矢量在有关度规系数加权下的某些导数关系式。

在任一正交坐标系中，空间某一微段曲线的微分长度可以写成下式

$$d\bar{l}=h_1dx_1\mathbf{x}_1+h_2dx_2\mathbf{x}_2+h_3dx_3\mathbf{x}_3 \tag{1}$$

其中，x_1，x_2，x_3 为坐标系的坐标变量，而 h_1，h_2，h_3 为有关度规系数。$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\mathbf{x}_3$ 为任一正交坐标系中相互垂交的单位矢量，而且这些单位矢量按 $\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_3$ 这样的次序组成右手坐标系。

微分面积给出如下式

$$\left.\begin{aligned}d\bar{A}_1&=(h_2dx_2\mathbf{x}_2)\times(h_3dx_3\mathbf{x}_3)=h_2h_3dx_2dx_3\mathbf{x}_1\\ d\bar{A}_2&=(h_3dx_3\mathbf{x}_3)\times(h_1dx_1\mathbf{x}_1)=h_3h_1dx_3dx_1\mathbf{x}_2\\ d\bar{A}_3&=(h_1dx_1\mathbf{x}_1)\times(h_2dx_2\mathbf{x}_2)=h_1h_2dx_1dx_2\mathbf{x}_3\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

而微分容积则可表达如下：

$$dv=h_1h_2h_3dx_1dx_2dx_3 \tag{3}$$

从式（1），我们求得

$$\frac{\partial\bar{l}}{\partial x_1}=h_1\mathbf{x}_1,\qquad \frac{\partial\bar{l}}{\partial x_2}=h_2\mathbf{x}_2,\qquad \frac{\partial\bar{l}}{\partial x_3}=h_3\mathbf{x}_3 \tag{4}$$

于是

* 钱伟长推荐。

** 本文作者为美国密西根大学微波和天线教授，曾获美国电机电子工程学会（IEEE）1984年名誉奖状。该奖状表扬在电机工程和电子工程方面有突出贡献的科学家，

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial(h_1\mathbf{x}_1)}{\partial x_2}=\frac{\partial(h_2\mathbf{x}_2)}{\partial x_1}\\ \frac{\partial(h_2\mathbf{x}_2)}{\partial x_3}=\frac{\partial(h_3\mathbf{x}_3)}{\partial x_2}\\ \frac{\partial(h_3\mathbf{x}_3)}{\partial x_1}=\frac{\partial(h_1\mathbf{x}_1)}{\partial x_3}\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

下表列出三种常用坐标系的坐标变量和它们的度规系数

坐 标 系	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3
卡氏坐标	x	y	z	1	1	1
圆柱坐标	ρ	ϕ	z	1	ρ	1
球 坐 标	r	θ	ϕ	1	r	$r\sin\theta$

不难证明，(5)式在这些坐标系中是适用的。当然，它们对任何正交坐标系都是适用的。

一、某一矢量函数的散度

某一矢量函数的散度，用 $\nabla\cdot\bar{F}$ 表示的，其定义为

$$\nabla\cdot\bar{F}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum_i \bar{F}\cdot\Delta\bar{A}_i}{\Delta V}\tag{1.1}$$

其中 $\Delta\bar{A}_i$ 表示微分容积 ΔV 的某一典型微分表面积，而 $\Delta\bar{A}_i$ 的方向指向容积外部。设 ΔV 为正交坐标系中六个坐标面为界的微分容积（如图1），则 (1.1) 式分子中的项值可以写成

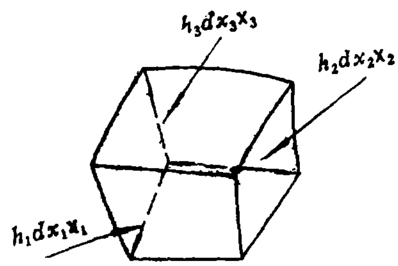

图 1 某一正交坐标系中的微分容积

$$\begin{aligned}\sum_i \bar{F}\cdot\Delta\bar{A}=&[(h_2h_3F_1)_{x_1+\Delta x_1}-(h_2h_3F_1)_{x_1}]\Delta x_2\Delta x_3\\ &+[(h_1h_3F_2)_{x_2+\Delta x_2}-(h_1h_3F_2)_{x_2}]\Delta x_1\Delta x_3\\ &+[(h_1h_2F_3)_{x_3+\Delta x_3}-(h_1h_2F_3)_{x_3}]\Delta x_1\Delta x_2\end{aligned}$$

由于 $\Delta V=h_1h_2h_3\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3$，我们得

$$\nabla\cdot\bar{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_2h_3F_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(h_1h_3F_2)}{\partial x_2}+\frac{\partial(h_1h_2F_3)}{\partial x_3}\right]$$

或

$$\nabla\cdot\bar{F}=\frac{1}{\Omega}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\Omega F_i}{h_i}\right)\tag{1.2}$$

其中 $\Omega=h_1h_2h_3$。

二、某一矢量函数的旋度

某一矢量函数的旋度，用 $\nabla\times\bar{F}$ 表示，其定义为

$$\nabla\times\bar{F}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum_i \Delta\bar{A}_i\times\bar{F}}{\Delta V}\tag{2.1}$$

其中 $\Delta\bar{A}_i$ 和 ΔV 的含义和（1.1）式中用在散度上的相同。让我们采用图 1 表示的 ΔV 形式。于是（2.1）式中的六项分子式可以写成

$$\sum_i \Delta\bar{A}_i\times\bar{F}=(h_2h_3F_2\mathbf{x}_3-h_2h_3F_3\mathbf{x}_2)_{x_1}^{x_1+\Delta x_1}\Delta x_2\Delta x_3$$
$$+(h_1h_3F_3\mathbf{x}_1-h_1h_3F_1\mathbf{x}_3)_{x_2}^{x_2+\Delta x_2}\Delta x_1\Delta x_3$$
$$+(h_1h_2F_1\mathbf{x}_2-h_1h_2F_2\mathbf{x}_1)_{x_3}^{x_3+\Delta x_3}\Delta x_1\Delta x_2$$

这里我们使用了符号

$$(h_2h_3F_2\mathbf{x}_3)_{x_1}^{x_1+\Delta x_1}=(h_2h_3F_2\mathbf{x}_3)_{x_1+\Delta x_1}-(h_2h_3F_2\mathbf{x}_3)_{x_1}$$

还有其它各项也类似。于是，我们得

$$\nabla\times\bar{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\Big[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2h_3F_2\mathbf{x}_3-h_2h_3F_3\mathbf{x}_2)+\frac{\partial}{\partial x_2}(h_1h_3F_3\mathbf{x}_1-h_1h_3F_1\mathbf{x}_3)+\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1h_2F_1\mathbf{x}_2-h_1h_2F_2\mathbf{x}_1)\Big] \tag{2.2}$$

上式可以展开为

$$\begin{aligned}\nabla\times\bar{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\Big[&h_3\mathbf{x}_3\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2F_2)+h_2F_2\frac{\partial}{\partial x_1}(h_3\mathbf{x}_3)\\&-h_2\mathbf{x}_2\frac{\partial}{\partial x_1}(h_3F_3)-h_3F_3\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2\mathbf{x}_2)\\&+h_1\mathbf{x}_1\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3F_3)+h_3F_3\frac{\partial}{\partial x_2}(h_1\mathbf{x}_1)\\&-h_3\mathbf{x}_3\frac{\partial}{\partial x_2}(h_1F_1)-h_1F_1\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3\mathbf{x}_3)\\&+h_2\mathbf{x}_2\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1F_1)+h_1F_1\frac{\partial}{\partial x_3}(h_2\mathbf{x}_2)\\&-h_1\mathbf{x}_1\frac{\partial}{\partial x_3}(h_2F_2)-h_2F_2\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1\mathbf{x}_1)\Big]\end{aligned} \tag{2.3}$$

根据（5）式，上式中有关单位矢量在度规系数加权下的导数项正负相消。于是，我们得

$$\begin{aligned}\nabla\times\bar{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\Big\{&h_1\mathbf{x}_1\Big[\frac{\partial(h_3F_3)}{\partial x_2}-\frac{\partial(h_2F_2)}{\partial x_3}\Big]\\&+h_2\mathbf{x}_2\Big[\frac{\partial(h_1F_1)}{\partial x_3}-\frac{\partial(h_3F_3)}{\partial x_1}\Big]\\&+h_3\mathbf{x}_3\Big[\frac{\partial(h_2F_2)}{\partial x_1}-\frac{\partial(h_1F_1)}{\partial x_2}\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{2.4}$$

（2.4）式也可以写成行列式的形式如下：

$$\nabla\times\bar{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}h_1\mathbf{x}_1 & h_2\mathbf{x}_2 & h_3\mathbf{x}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3\end{vmatrix} \tag{2.5}$$

三、标量函数的梯度

某一标量函数的梯度，用 ∇f 表示，其定义为

$$\nabla f=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum_{i} f\Delta\bar{A}_i}{\Delta V} \tag{3.1}$$

用上述相同的模形，我们得到

$$\nabla f=\lim_{\Delta V\to 0}\left[\frac{(h_2h_3f\mathbf{x}_1)_{x_1}^{x_1+\Delta x_1}\Delta x_2\Delta x_3+(h_1h_3f\mathbf{x}_2)_{x_2}^{x_2+\Delta x_2}\Delta x_1\Delta x_3+(h_1h_2f\mathbf{x}_3)_{x_3}^{x_3+\Delta x_3}\Delta x_1\Delta x_2}{h_1h_2h_3\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3}\right]$$

$$=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2h_3f\mathbf{x}_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(h_1h_3f\mathbf{x}_2)+\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1h_2f\mathbf{x}_3)\right] \tag{3.2}$$

上式可以如下分解

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2h_3f\mathbf{x}_1)=h_2h_3\mathbf{x}_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+f\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2h_3\mathbf{x}_1)$$

而且

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2h_3\mathbf{x}_1)=\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2h_3\mathbf{x}_2\times\mathbf{x}_3)=h_2\mathbf{x}_2\times\frac{\partial(h_3\mathbf{x}_3)}{\partial x_1}-h_3\mathbf{x}_3\times\frac{\partial(h_2\mathbf{x}_2)}{\partial x_1}$$

同样，(3.2)式中还有相类似的两项。于是(3.2)式可以写成

$$\begin{aligned}\nabla f=\frac{1}{h_1h_2h_3}\Big[&h_2h_3\mathbf{x}_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+fh_2\mathbf{x}_2\times\frac{\partial(h_3\mathbf{x}_3)}{\partial x_1}-fh_3\mathbf{x}_3\times\frac{\partial(h_2\mathbf{x}_2)}{\partial x_1}\\&+h_1h_2\mathbf{x}_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+fh_3\mathbf{x}_3\times\frac{\partial(h_1\mathbf{x}_1)}{\partial x_2}-fh_1\mathbf{x}_1\times\frac{\partial(h_3\mathbf{x}_3)}{\partial x_2}\\&+h_2h_3\mathbf{x}_3\frac{\partial f}{\partial x_3}+fh_1\mathbf{x}_1\times\frac{\partial(h_2\mathbf{x}_2)}{\partial x_3}-fh_2\mathbf{x}_2\times\frac{\partial(h_1\mathbf{x}_1)}{\partial x_3}\Big]\end{aligned} \tag{3.3}$$

根据（5）式，上式中有关单位矢量在度规系数加权下的导数项正负相消。于是得

$$\nabla f=\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathbf{x}_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\mathbf{x}_2+\frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial x_3}\mathbf{x}_3$$

或

$$\nabla f=\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{h_i}\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathbf{x}_i \tag{3.4}$$

四、$\nabla\times\bar{F}$和∇f的分量的另一定义

设我们选用厚度 Δt 为均匀的一块片状容积作为ΔV，片的表面法线指向 s，如图 2。取（2.1）式和 s 的标积，我们得

$$\mathbf{s}\cdot\nabla\times\bar{F}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\mathbf{s}\cdot\sum_{i}\Delta\bar{A}_i\times\bar{F}}{\Delta V}=\lim_{\substack{\Delta A\to 0\\ \Delta t\to 0}}\frac{\sum_{i}\bar{F}\cdot(\mathbf{s}\times\Delta\bar{A}_i)}{\Delta A\Delta t} \tag{4.1}$$

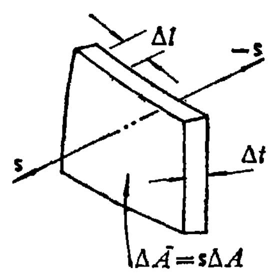

图 2　$\nabla\times\bar{F}$和∇f的分量的另一定义的模式

$\mathbf{s}\times\Delta\bar{A}_i$ 的矢积由于 $\Delta\bar{A}_i$ 和 s 在片表面上平行的缘故，应该等于零，在片的侧边上，

$$\mathbf{s}\times\Delta\bar{A}_i=\mathbf{l}\Delta l\Delta t=\Delta\bar{l}\Delta t \tag{4.2}$$

于是

$$\mathbf{s}\cdot\nabla\times\bar{F}=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\sum\bar{F}\cdot\Delta\bar{l}}{\Delta A} \tag{4.3}$$

(4.3) 式为 $\nabla\times\bar{F}$ 在 $\mathbf{s}$ 方向的分量的定义。取 $\mathbf{s}=\mathbf{x}_1$，则 $\Delta A=h_2h_3\Delta x_2\Delta x_3$ 和

$$\sum\bar{F}\cdot\Delta\bar{l}=-(h_2F_2)_{x_3}^{x_3+\Delta x_3}\Delta x_2+(h_3F_3)_{x_2}^{x_2+\Delta x_2}\Delta x_2$$

于是

$$\mathbf{x}_1\cdot\nabla\times\bar{F}=\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3F_3)-\frac{\partial}{\partial x_3}(h_2F_2)\right] \tag{4.4}$$

这和 (2.4) 式或 (2.5) 式是一致的。

∇f 的分量也可以依相同的办法讨论。取 (3.1) 式和 $\mathbf{s}$ 的标积，我们得

$$\mathbf{s}\cdot\Delta f=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum f\mathbf{s}\cdot\Delta\bar{A}_i}{\Delta V}$$

这个标积 $\mathbf{s}\cdot\Delta f$ 在片块的侧面（图 2）的值等于零。在两个片表面上

$$\sum f\mathbf{s}\cdot\Delta\dot{A}_i=(f)_t^{t+\Delta t}\Delta A$$

而且 $\Delta V=\Delta A\Delta t$。于是

$$\mathbf{s}\cdot\nabla f=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta t} \tag{4.5}$$

如果我们取 $\mathbf{x}_1$ 为 $\mathbf{s}$，则 $\Delta t=h_1\Delta x_1$，于是

$$\mathbf{x}_1\cdot\nabla f=\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} \tag{4.6}$$

这和 (3.4) 式相符。相同地取 $\mathbf{x}_3$ 或 $\mathbf{x}_2$ 为 $\mathbf{s}$，我们可以求任一正交坐标系的其它两个分量。所以，我们可以把 (4.5) 式看作为 ∇f 的某一典型分量的另一定义。这个定义给出了 ∇f 的方向导数，即

$$\mathbf{s}\cdot\nabla f=\frac{\partial f}{\partial t} \tag{4.7}$$

这里，我们把 t 认作为 $\mathbf{s}$ 方向的弧长。在 (4.6) 式中它只是 x_1 那样的一个变量。

Unified Definition of Divergence, Curl, and Gradient

Tai Chen-to

(Department of Electrical Engineering and Computem Science University of Michigan Ann An for, Michigan, U. S. A.)

Abstract

In this note the differential expressions of divergence, curl, and gradient are derived based on one common model. Each of them involves the limiting value of a differential quantity per unit volume. By taking advantage of some differential relations of the unit vectors weighted by the metric coefficients, the full expressions of these three quantities in vector analysis can be readily derived.