应用数学和力学，第7卷第1期（1986年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

矩形薄板弯曲的近似解法——康托洛维奇-伽辽金法*

王 磊 李家宝

（湖南大学，1981年1月3日收到）

摘 要

本文从广义梁微分方程出发，推导出三次样条梁函数．由于采用了广义函数，在集中荷载，集中弯矩等得到截断多项式的解．弹性薄板偏微分方程荷载项采用了广义函数（δ函数及σ函数），无论是集中荷载、集中弯矩、均布荷载，小方块荷载都可表示成为 x、y 两个方向的截断多项式变形曲线．利用康托洛维奇法将偏微分方程转换成为常微分方程，再用伽辽金法可得良好的近似解．文内算例较为丰富，包括各种边界弹性薄板，各种荷载、变截面薄板以及悬臂板等．

一、前 言

康托洛维奇·克雷洛夫提出了康托洛维奇法的近似变分法，用来处理多变量函数的泛函变分问题．我国钱伟长[1]对于康托洛维奇法很为注意，理论与算例较为丰富，叙述颇为详细．在薄板算例中有：四边固定，三边固定一边自由，三边自由一边固定，仅限于均布荷载，梁函数仅用二端固定，一端固定一端自由，因此适用范围较窄．本文从广义梁微分方程出发，推导出三次样条梁函数，得到截断多项式的解．以此样条梁函数为基础，将偏微分方程转换成常微分方程问题，再用伽辽金法解算得近似解．弹性薄板泛函的荷载项，推导δ函数与σ函数及其他连续函数$f(x)$乘积的积分问题．因此能够解决均布荷载，小方块荷载，集中弯矩，线荷载以及任意边界条件矩形板弯曲的近似解．胡海昌[2]介绍了康托洛维奇法，并在平面应力问题[8]用康托洛维奇法推导了有限条的常微分方程组[8]解法与Y．K．Chevng有限条[6]解法比较，方法是新颖的．康托洛维奇法在力学解法中占是重要地位，各国学者都很注意它的演变与各种实际应用，因此本文作进一步发展，还是有意义的．算例较为丰富，可以做为康托洛维奇法的补充．关于中厚板问题，可参考[10][11]做类似的研究．

二、样条梁函数的推导

我们从广义梁微分方程出发

* 钱伟长推荐．

$$EI\frac{d^4w}{dx^4}=\sum_{i=1}^{N-1}P_i\delta(x-x_i) \tag{2.1}$$

此式与普通梁不同，在于右端项，$P_i(i=1,2,\cdots,N-1)$集中荷载作用在梁上，$\delta(x-x_i)$为笛而它函数，广义函数积分一次为：

$$EI\frac{d^3w}{dx^3}=c_3+\sum_{i=1}^{N-1}P_i\sigma(x-x_i) \tag{2.2}$$

它有明确的力学意义，即剪力图发生突变。$\sigma(x-x_i)$为西哥马函数，即阶梯函数。积分二次为：

$$EI\frac{d^2w}{dx^2}=c_2+c_3x+\sum_{i=1}^{N-1}P_i(x-x_i)_+^1 \tag{2.3}$$

积分三次为：

$$EI\frac{dw}{dx}=c_1+c_2x+c_3x^2 \tag{2.4}$$

积分四次为：

$$EIw=c_0+c_1x+c_2\frac{x^2}{2!}+c_3\frac{x^3}{3!}+\sum_{i=1}^{N-1}P_i\frac{(x-x_i)_+^3}{3!} \tag{2.5}$$

广义梁微分方程右端项$\delta(x-x_i)$的积分，引进“截断单项”概念，对于任一正整数k定义

$$(x-x_i)_+^k=\begin{cases}(x-x_i)^k & (\text{当}x\geqslant 0)\\ 0 & (\text{当}x<0)\end{cases}$$

当$k=0$时定义

$$(x-x_1)_+^0=\sigma(x-x_1)=\begin{cases}0 & (\text{当}x<x_1)\\ \frac{1}{2} & (\text{当}x=x_1)\\ 1 & (\text{当}x>x_1)\end{cases}$$

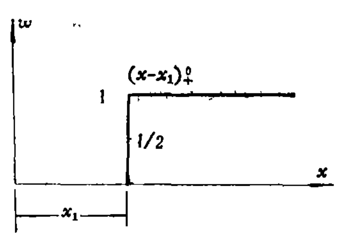


图 1

为简单起见，仅绘出x_i为x_1一个图形。

显然截断多项式$(x-x_1)_+^0$即为阶梯函数

当$k=1$时定义

$$(x-x_1)_+^1=\begin{cases}0 & (\text{当}x\leqslant x_1)\\ (x-x_1)^1 & (\text{当}x>x_1)\end{cases}$$

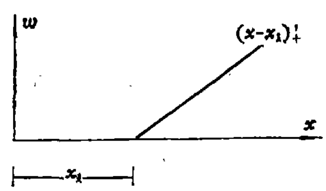


图 2

当$k=2$时定义

$$(x-x_1)_+^2=\begin{cases}0 & (\text{当}x\leqslant x_1)\\(x-x_1)^2 & (\text{当}x>x_1)\end{cases}$$

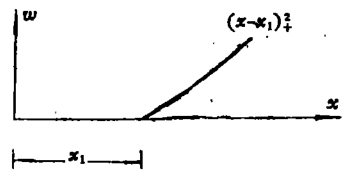


图　3

当$k=3$时定义

$$(x-x_1)_+^3=\begin{cases}0 & (\text{当}x\leqslant x_1)\\(x-x_1)^3 & (\text{当}x>x_1)\end{cases}$$

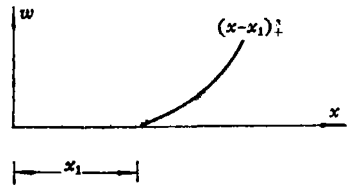


图　4

＋称为截断符号，以上四式称为半截单项式或截断单项式。$(x-x_i)_+^k$的图形($k=0,1,2,3$)如图1、2、3、4所示。这种截断单项式是样条函数的重要组成部分，而且可以通过单位阶梯函数x_+^0来表示，即$(x-x_1)_+^k=x^k(x-x_1)_+^0$

梁的微分方程右端项有集中弯矩M_i应写成：

$$EI\frac{d^4w}{dx^4}=\sum_{i=1}^{N-1}M_i\delta'(x-x_i) \tag{2.6}$$

一次积分

$$EI\frac{d^3w}{dx^3}=c_3+\sum_{i=1}^{N-1}M_i\delta(x-x_i) \tag{2.7}$$

二次积分

$$EI\frac{d^2w}{dx^2}=c_2+c_3x+\sum_{i=1}^{N-1}M_i\sigma(x-x_i),\ (\sigma(x-x_i)\text{即}(x-x_i)_+^0) \tag{2.8}$$

它有明确的力学意义，即弯矩图发生突变。三次积分

$$EI\frac{dw}{dx}=c_1+c_2x+c_3\frac{x^2}{2}+\sum_{i=1}^{N-1}M_i(x-x_i)_+^1 \tag{2.9}$$

四次积分

$$EIw=c_0+c_1x+c_2\frac{x^2}{2}+c_3\frac{x^3}{3!}+\sum_{i=1}^{N-1}M_i\frac{(x-x_i)_+^2}{2!} \tag{2.10}$$

式(2.6)与式(2.7)比较，右端项低了一阶。

用一个算例来说明广义梁微分方程，推导梁的变形曲线。

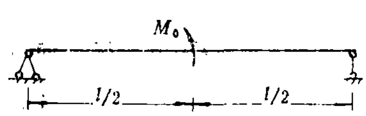


图　5

简支梁中点作用一个集中弯中弯矩M_0

$$x=0\quad w=0\quad \frac{d^2w}{dx^2}=0;\qquad x=l\quad w=0\quad \frac{d^2w}{dx^2}=0$$

求出四个积分常数

$$c_0=0 \quad c_2=0 \quad c_1=\frac{1}{24}M_0 l \quad c_3=-\frac{M_0}{l}$$

得挠度曲线为：$EIw=\frac{M_0}{24l}(l^2x-4x^3) \qquad (0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2})$

答案与铁摩辛柯[5]《材料力学》p.640完全相同.

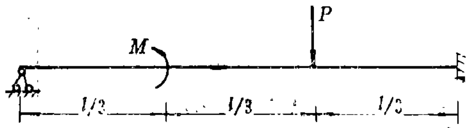


图 6

左端铰支，右端固定梁有集中弯矩M与集中荷载P的作用. 广义梁的微分方程：

$$EI\frac{d^4w}{dx^4}=M\left(x-\frac{l}{3}\right)+P\delta\left(x-\frac{2}{3}l\right) \tag{2.11}$$

$$EIw=c_0+c_1x+c_2\frac{x^2}{2}+c_3\frac{x^3}{3!}+\frac{M}{2}\left(x-\frac{l}{3}\right)_+^2+\frac{P}{3!}\left(x-\frac{2}{3}l\right)_+^3 \tag{2.12}$$

两端自由梁的挠度表达式须用五次样条梁函数推导，但也可用普通方法推导：

多项式$x^6/l^6-3x^5/l^5+5x^4/2l^4$已满足梁两端弯矩及剪力等于零的条件. 因此，可写成

$$w=\frac{x^6}{l^6}-3\frac{x^5}{l^5}+\frac{5}{2}\frac{x^4}{l^4}+A\frac{x}{l}+B$$

$$\frac{dw}{dx}=\frac{1}{l}\left(6\frac{x^5}{l^5}-15\frac{x^4}{l^4}+10\frac{x^3}{l^3}+A\right)$$

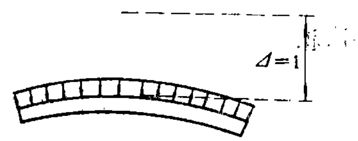


图 7

$x=\frac{l}{2}$时　$w=1$（中点相对位移）

$x=\frac{l}{2}$时　$\frac{dw}{dx}=0 \qquad A=-\frac{1}{2} \qquad B=\frac{75}{64}$

图 8 一端简支，一端自由梁函数

$$w=\frac{x^5}{l^5}-\frac{10}{3}\frac{x^4}{l^4}+\frac{10}{3}\frac{x^3}{l^3}+\frac{x}{l}$$

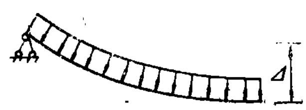


图 8

满足梁左端挠度、弯矩为零的条件，又满足梁右端弯矩与剪力为零的条件. 梁右端满足位移为指定的常数即可. 以上两种梁静定都是不平衡的，因此不可能求出绝对位移. 于是，位移只能指定为任何常数称为相对位移. 在弯曲板的计算中，利用泛函变分，只需要知道x,y两方向的梁函数(相对位移)，通过变分可以得到板的实在位移.

广义函数$\delta(x-x_i)$的积分与分部积分法.

对$\delta(x-x_i)$积分一次，便得：

$$\int\delta(x-x_i)dx=(x-x_i)_+^0$$

再积分一次，不计积分常数

$$\iint\delta(x-x_i)dxdx=(x-x_i)_+^1$$

如果对$\delta(x-x_i)$积分$k+1$次，且不计积分常数

$$\iint\cdots\int\delta(x-x_i)dx\cdot\cdots\cdot dx=\frac{(x-x_i)^k}{k!}$$

如果$0<x_1<a$则可以证明

$$\int_0^a\delta(x-x_1)dx=\sigma(x-x_1)\Big|_0^a=\sigma(a)-\sigma(0)=1$$

分部积分法的公式为：

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=f(x)\,g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)f'(x)dx \tag{2.13}$$

设$f(x)$为足够光滑的连续函数，$g(x)$广义函数

$$\int_a^b f(x)\sigma'(x-x_1)dx=f\sigma(x-x_1)\Big|_a^b-\int_a^b\sigma(x-x_1)f'(x)dx$$

根据σ函数性质

$$\int_a^b f(x)\sigma'(x-x_1)dx=f(b)\sigma(b-x_1)-\int_{x_1}^b f'(x)dx=f(b)-f(x)\Big|_{x_1}^b$$

$$=f(b)-[f(b)-f(x_1)]=f(x_1)$$

因此我们可以把$\sigma(x-x_1)$的广义导数$\delta(x-x_1)$定义为使下列积分式恒成立，$f(x)$在$x=x_1$处连续。

$$\int_a^b\delta(x-x_1)f(x)dx=f(x_1)\qquad(a<x_1<b) \tag{2.14}$$

此公式有明显的力学意义，经常用在集中荷载项乘$f(x)$的积分。式(2.14)右端可解释为单位集中荷载所做的功。

对于广义函数$\delta(x-x_1)$还可以再求导，$\delta'(x-x_1)$也是一个广义函数。

$$\int_a^b\delta'(x-x_1)f(x)dx=-f_1'(x) \tag{2.15}$$

同理可证：如果$a<x_1<b$则

$$\int_a^b\delta^{(n)}(x-x_1)f(x)dx=(-1)^n\int_a^b\delta(x-x_1)f^{(n)}(x)dx=(-1)^n f^{(n)}(x_1) \tag{2.16}$$

式中$f^n(x)$在$x=x_1$处是连续的，否则式(2.16)右端就没有意义。因此我们可以借助上式去定义上式的左端积分，故$\delta^{(n)}(x-x_1)$也是一个广义函数。设$\sigma(x-x_i)$为$[a\ b]$上的阶梯函数，其间断点$x_i(i=1,2,\cdots,n)$且$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，又设$f(x)$为$[a\ b]$上的任一连续函数，它的导数$f'(x)$可积，则

$$\int_a^b\sigma(x-x_i)f'(x)dx=\sigma f\Big|_a^b-\sum_{i=1}^n[\sigma(x_i)]f(x) \tag{2.17}$$

其中$[\sigma(x_i)]=\sigma(x_i+0)-\sigma(x_i-0)$为$\sigma(x_i)$在$x_i$的跳跃量。证明：因为在$[a\ b]$上$\sigma(x-x_i)$可表为单位跳跃函数的线性组合

$$\sigma(x-x_i)=\sum_{i=1}^n[\sigma(x_i)]\sigma(x-x_i)+\sigma(x_0+0)$$

对$\sigma(x-x_i)$求广义导数，注意到

$$\sigma'(x-x_i)=\delta(x-x_i)=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)]\delta(x-x_i) \tag{2.18}$$

因此，由分部积分法可得：

$$\int_a^b \sigma(x-x_i)f'(x)dx=\sigma f\Big|_a^b-\int_a^b \sigma'(x-x_i)f(x)dx \tag{2.19}$$

因为：
$$\int_a^b \sigma'(x-x_i)f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}[\sigma(x_i)]\int_a^b f(x)\delta(x-x_i)dx$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[\sigma(x_i)]f(x_i) \tag{2.20}$$

因此把上式代入式(2.19)可得式(2.17)定理得证。公式(2.15)有明显的力学意义，集中弯矩乘上广义函数$\delta'(x-x_i)$乘$f(x)$函数的积分，式(2.15)右方可解释为单位弯矩所做的功。

式(2.17)阶梯函数乘连续函数$f(x)$的积分，通常用在板的截面发生突变之处。

三、康托洛维奇-伽辽金近似解法

康托洛维奇·克雷洛夫提出了康托洛维奇法近似变分法，用来处理多变量函数的泛函变分问题。康托洛维奇法是选用满足边界条件的函数系列$\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$ $(k=1,2,\cdots,m)$，而把变分问题的近似解写成：

$$W(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{k=1}^{m}A_k(x_n)\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$$

其中$A_k(x_n)$为x_n的待定函数，把$W(x_1,x_2,\cdots,x_n)$代入泛函后原来是函数$W(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的泛函$\Pi(W)$，变为以$A_1(x_n),A_2(x_n),\cdots,A_m(x_n)$为函数的泛函$\Pi^*[A_1,A_2,\cdots,A_m]$它是$m$个$A_k(x_n)$的泛函，问题成为选取$A_1,A_2,\cdots,A_m(x_n)$使$\Pi^*(A_1,A_2,\cdots,A_m)$达到极值。

求$\Pi^*(A_1,A_2,\cdots,A_m)$极值的程序是：通过变分求得$A_1(x_n)$，$A_2(x_n),\cdots,A_m(x_n)$的欧拉方程和有关的边界条件。这些欧拉方程一般都是常微分方程，原来是以多变量的偏微分方程为欧拉方程的问题，变成了单变量的常微分方程的问题，这就是康托洛维奇方法的实质。如果$m\to\infty$而取极限，则在某些条件下可以得到准确解。如果m取有限数，则用这种方法将得到近似解。矩形板有固支或简支边界的弹性板的泛函用下式

$$\Pi=\int_0^a\int_0^b\left\{\frac{1}{2}D(x,y)(\nabla^2 w)^2-qw\right\}dxdy \tag{3.1}$$

矩形板有自由边边界的弹性薄板的泛函为：

$$\Pi=\int_0^a\int_0^b\frac{1}{2}D(x,y)\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2-2(1-u)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}dxdy-\int_0^a\int_0^b qw\,dxdy \tag{3.2}$$

抗弯刚度为$D(x,y)$，变刚度D为x,y的函数，均布荷载为q。

1、 集中荷载：
$$-\int_0^a\int_0^b Pw\delta(x-\varepsilon)\delta(y-\eta)dxdy \tag{3.3}$$

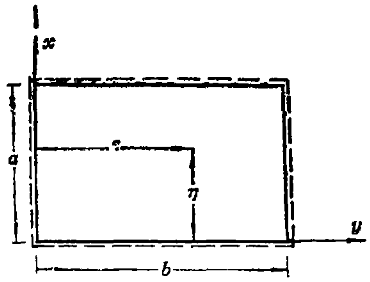


图 9

2、 小方块荷载：
$$-\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} qw\,dx\,dy \tag{3.4}$$

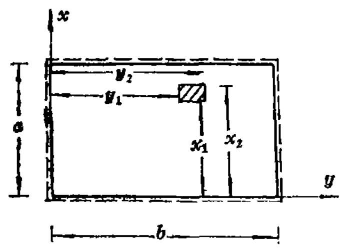


图 10

3、 长条均布荷载：
$$-\int_{0}^{a}\int_{y_1}^{y_2} qw\,dx\,dy \tag{3.5}$$

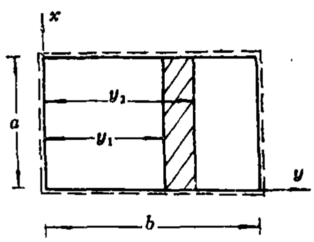


图 11

4、 线荷载：
$$-\int_{0}^{a}\int_{0}^{b} pw\delta(y-\eta)\,dx\,dy \tag{3.6}$$

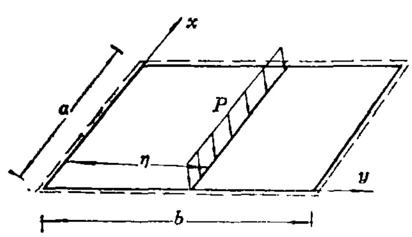


图 12

算例1、三边简支一边固支矩形板，在均布荷载作用下，求板中点挠度，建议用近似梁函数

$$w=u(x)\left(2\frac{y^4}{b^4}-5\frac{y^3}{b^3}+3\frac{y^2}{b^2}\right) \qquad (3.7)$$

$$\Pi=\int_0^a\int_0^b\left\{\frac{D}{2}(\nabla^2 w)^2-qw\right\}dxdy \qquad (3.8)$$

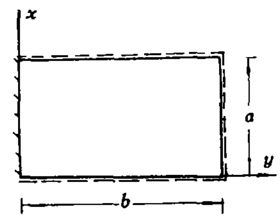


图 13

(3.7)代入(3.8)式并积分

$$\Pi=\int_0^a\left\{\frac{D}{2}\left[0.03015bu''^2(x)-2\times0.3428574\frac{1}{b}u(x)u''(x)+7.2\frac{1}{b^3}u(x)^2\right]-0.15bqu(x)\right\}dx$$

变分后利用简支边界条件　$x=0$　$x=a$　$w=0$　$w''=0$

代入欧拉方程：
$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial u''}=0$$

$$0.03015bu^{IV}-2\times0.3428574\frac{1}{b}u''+7.2\frac{1}{b^3}u-0.15b\frac{q}{D}=0$$

化简得：

$$u^{IV}-22.74344\frac{1}{b^2}u''+238.80597\frac{1}{b^4}u-4.97512\frac{q}{D}=0 \qquad (3.9)$$

利用伽辽金法解常微分方程：

设
$$u(x)=\left(\frac{x^4}{a^4}-2\frac{x^3}{a^3}+\frac{x}{a}\right)(c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots)$$

待定系数取首项 c_1，代入伽辽金方程：

$$\int_0^a\left(u^{IV}-22.74344\frac{1}{b^2}u''+238.80597\frac{1}{b^4}u-4.97512\frac{q}{D}\right)\left(\frac{x^4}{a^4}-2\frac{x^3}{a^3}+\frac{x}{a}\right)dx=0$$

积分后并整理得：

$$c_1\left[4.8\frac{1}{a^3}+11.04594\frac{1}{ab^2}+11.75059\frac{a}{b^4}\right]=0.995024\frac{qa}{D}$$

方板 $a=b$
$$c_1=0.0360561\frac{qa^4}{D}$$

于是方板的挠度方程式为：$w=c_1\left(\frac{x^4}{a^4}-2\frac{x^3}{a^3}+\frac{x}{a}\right)\left(2\frac{y^4}{a}-5\frac{y^3}{a^3}+3\frac{y^2}{a^2}\right)$

方板中点($x=\frac{a}{2},y=\frac{a}{2}$) 挠度

$$w=0.0360361\frac{qa^4}{D}\times\frac{5}{16}\times\frac{1}{4}=0.002817\frac{qa^4}{D}$$

与经典解 $0.00280\frac{qa^4}{D}$ 比较，误差极微。

以上需要一端固定一端简支及二端简支梁的梁函数有下列类型积分

$$\int_0^a X''dx,\quad \int_0^a X''^2dx,\quad \int_0^a X''Xdx,\quad \int_0^a X'^2dx,\quad \int_0^a Xdx$$

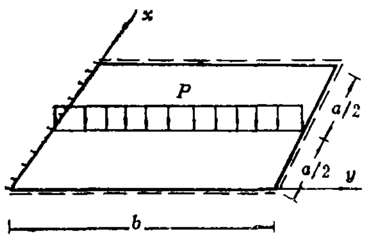


图 14

这些都无需计算，可查文末附表。

算例 2 、同上题，但均布荷载改为线均布荷载泛函方程与上相同，但荷载项应改写成：

$$\int_0^a\int_0^b P\delta\left(x-\frac{a}{2}\right)XYdxdy=P\int_0^b Ydy\,X_{x=\frac{a}{2}} \tag{3.10}$$

方程仍可用(3.8)但 $u(x)$ 必需改为与荷载及边界相适应的梁函数

$$u(x)=\left(3\frac{x}{a}-4\frac{x^3}{a^3}\right)(c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots) \tag{3.11}$$

有下列积分：

$$2\int_0^{\frac{a}{2}}X^2dx=0.5214286a,\qquad 2\int_0^{\frac{a}{2}}X''^2dx=\frac{48}{a^3},\qquad 2\int_0^{\frac{a}{2}}X''Xdx=-\frac{4.8}{a}$$

荷载项需用该点的函数值 $P\times\left(3\frac{x}{a}-4\frac{x^3}{a^3}\right)_{x=\frac{a}{2}}=P\times1$ 于是变分后积分得：

$$0.030156\times48\frac{b}{a^3}+2\times0.3428574\times4.8\frac{1}{ab}+7.2\times0.5214286\frac{a}{b^3}=0.156\frac{P}{D}$$

方板$a=b$　　$c_1=0.01766\frac{Pa^3}{D}$

方板中点挠度 $0.01766\frac{Pa^3}{D}\times1\times\frac{1}{4}=0.004415\frac{Pa^3}{D}$

算例3、两邻边简支，两邻边固支矩形板，承受均布荷载q，求板中点挠度。

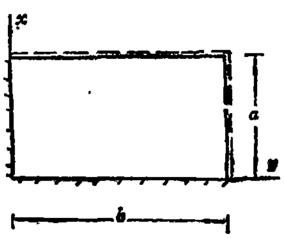


图 15

$$\text{设}\ w=u(x)\left(2\frac{y^2}{b^4}-5\frac{y^3}{b^3}+3\frac{y^2}{b^2}\right) \tag{3.12}$$

于是推导和算例 1 一样可得欧拉方程，利用伽辽金法解常微分方程。

$$\text{设}\quad u(x)=\left(2\frac{x^4}{a^4}-5\frac{x^3}{a^3}+3\frac{x^2}{a^2}\right)(c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots) \tag{3.13}$$

待定系数取首项 c_1，代入伽辽金方程：

$$\int_0^a\left(u^{IV}-22.74344\frac{1}{b^2}u''+238.80597\frac{1}{b^4}u-4.97512\frac{q}{D}\right)\left(2\frac{x^4}{a^4}-5\frac{x^3}{a^3}+3\frac{x^2}{a^2}\right)dx=0$$

积分无需计算，可查附录表。

$$c_1\left[4.8\times0.15\frac{a}{b^4}-22.74344\times(-0.3428574)\frac{1}{a}\frac{1}{b^2}\right.$$

$$\left.+238.80597\times0.03015\frac{a}{b^4}\right]-4.97512\frac{q}{D}\times0.15a=0$$

方板 $a=b$，　$c_1=0.033619\frac{qa^4}{D}$

方板中点挠度 $w=0.033619\frac{qa^4}{D}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=0.0021012\frac{qa^4}{D}$

算例4、二对边简支，一边固定，一边自由的弹性薄板。泊松比$\mu=0.3$，变分后通过分部积分简化得：

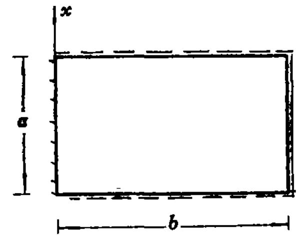


图 16

设 $$w=u(x)\left(\frac{y^4}{b^4}-4\frac{y^3}{b^3}+6\frac{y^2}{b^2}\right) \tag{3.14}$$

$$\Pi=\frac{2}{35}D\int_0^a\left\{252\frac{u^2}{b^3}+30\mu u\frac{u''}{b}+180(1-\mu)\frac{u'^2}{b}+\frac{182}{9}u''^2b-21\frac{qb}{D}u\right\}dx$$

$$\delta\Pi=\frac{2}{35}D\int_0^a\left\{504\frac{u}{b^3}-60(6-7\mu)\frac{u''}{b}+\frac{364}{9}u^{\mathrm{IV}}b-21\frac{qb}{D}\right\}\delta u dx$$

$$+\frac{4}{35}D\left[\frac{182}{9}u''+15\mu u\right]\delta u'\Big|_0^a+\frac{4}{35}D\left[15(12-13\mu)u'-\frac{182}{9}u'''\right]\delta u\Big|_0^a=0$$

欧拉方程为：

$$504\frac{u}{b^3}-60(6-7\mu)\frac{u''}{b}+\frac{364}{9}u^{\mathrm{IV}}b-21\frac{qb}{D}=0 \tag{3.15}$$

u的端点条件为： $182\frac{u''}{b}+135\mu\frac{u}{b^3}=0$ $(x=0$及$x=a)$

设二对边简支 $u(x)=\left(\frac{x^4}{a^4}-2\frac{x^3}{a^3}+\frac{x}{a}\right)(c_1+c_2x+\cdots)$

$\mu=0.3$代入

$$c_1\left[504\times0.0492056\frac{a}{b^3}-60\times3.9\times(-0.485676)\frac{1}{ab}+\frac{364}{9}\times4.8\frac{b}{a^3}\right]=21\times0.2\frac{qab}{D}$$

方板$a=b$ $c_1=0.0126285\frac{qa^4}{D}$

自由边中点位移 $w_{中}=0.0126285\frac{qa^4}{D}\times\frac{5}{16}\times3=0.0118392\frac{qa^4}{D}$

算例5、变截面薄板的计算。由于薄板的截面是变化的$D(x,y)$必须在积分号内与位移函数一并进行积分。

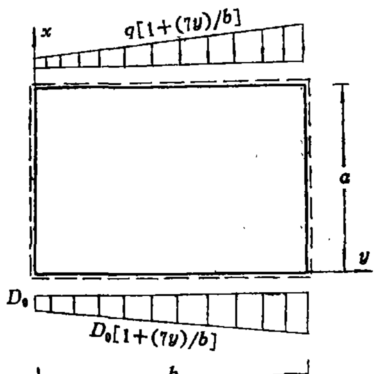


图 17

四边简支弹性薄板，设厚度在y方向为直线变化，荷载q亦在y方向按直线变化。位移函数写成：

$$w=u(x)\left(\frac{y^4}{b^4}-2\frac{y^3}{b^3}+\frac{y}{b}\right) \tag{3.16}$$

$$\Pi=\int_0^a\int_0^b\left\{\frac{D_0}{2}\left(1+7\frac{y}{b}\right)(\nabla^2w)^2-q\left(1+7\frac{y}{b}\right)w\right\}dxdy$$

代入时需用到下列几个积分，设

$$Y=\left(\frac{y^4}{b^4}-2\frac{y^3}{b^3}+\frac{y}{b}\right)$$

$$\int_0^b \left(1+7\frac{y}{b}\right)Y^2dy=0.2992063b$$

$$\int_0^b \left(1+7\frac{y}{b}\right)Y''Xdy=-2.18562\frac{1}{b}$$

$$\int_0^b \left(1+7\frac{y}{b}\right)Y''^2dy=21.6\frac{1}{b^3}$$

$$\int_0^b \left(1+7\frac{y}{b}\right)Ydy=0.9b$$

将各积分值代入，并变分得：

$$0.2992063bu^{\text{IV}}-2.18562\frac{1}{b}u''+21.6\frac{1}{b^3}u=0.9\frac{qb}{D_0}$$

设 $$u(x)=\left(\frac{x^4}{a^4}-2\frac{x^3}{a^3}+\frac{x}{a}\right)(c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots)$$

并取待定常数一项 c_1 代入

$$c_1\left[0.2992063\times4.8\frac{b}{a^3}-2.18562\times(-0.485676)\frac{1}{a}\frac{1}{b}\right.$$
$$\left.+21.6\times0.0492056\frac{a}{b^3}\right]=0.18\frac{qab}{D_0}$$

方板 $a=b$，于是 $c_1=0.0505542\dfrac{qa^4}{D_0}$

方板中点位移 $w_{中}=0.0505542\times\dfrac{5}{16}\times\dfrac{5}{16}\dfrac{qa^4}{D_0}=0.0049369\dfrac{qa^4}{D_0}$

如果荷载是均布荷载 $\int_0^b Ydy=0.2b$

公式荷载项应为 $0.04\dfrac{qab}{D_0}$ 方板 $a=b$ $c_1=0.0112343\dfrac{qa^4}{D_0}$

方板中点位移 $w_{中}=0.0112343\times\dfrac{qa^4}{D_0}\times\dfrac{5}{16}\times\dfrac{5}{16}=0.0010971\dfrac{qa^4}{D_0}$

算例6、一边固定，三边自由悬臂板，承受均布荷载q，泊松比$\mu=0.3$，求板的中点挠度。

这是一个难题，用最小势能原理来做比较方便，因为只需要满足位移边界条件，在变分过程中，应力边界条件可自动满足。泛函可写成：$w=CXY$

$$\Pi=\frac{D}{2}c^2\int_0^a\int_0^b\{X^2Y''^2+2\mu X''XY''Y+X''^2Y^2$$
$$+2(1-\mu)X'^2Y'^2\}dxdy-\int_0^a\int_0^b qcXYdxdy=0$$

两端自由梁函数可取为：

$$X=\frac{x^6}{a^6}-3\frac{x^5}{a^5}+\frac{5}{2}\frac{x^4}{a^4}-\frac{1}{2}\frac{x}{a}+\frac{75}{64} \tag{3.17}$$

$$\int_0^a X^2dx=1.1365\,a,\qquad \int_0^a X''^2dx=1.4285\frac{1}{a^3}$$

$$\int_0^a X''X\,dx=1.0301001\frac{1}{a},\qquad \int_0^a X'^2dx=0.141774\frac{1}{a}$$

$$\int_0^a X\,dx=1.0647321a$$

$$c_1\Big[1.4285\times 2.31111\frac{b}{a^3}+2\times 0.3\times 1.0301001\times 1.714285\times\frac{1}{ab}+1.1365$$

$$\times 28.8\frac{a}{b^3}+1.4\times 0.141774\times 10.285714\frac{1}{ab}=1.0647321\times 1.2\times\frac{qab}{D}$$

方板 $a=b$，$\mu=0.3$，$c_1=0.032649\dfrac{qa^4}{D}$

方板自由边中点挠度 $w_o=0.032649\times 1\times 3\dfrac{qa^4}{D}=0.09795\dfrac{qa^4}{D}$

与正确解$0.1192\dfrac{qa^4}{D}$比较，误差17.8%。如果采用康托洛维奇-伽辽金法，误差降到5%以下。

算例7、三边简支，一边自由弹性薄板。承受均布荷载q，泊松比 $\mu=0.3$，求方板中点挠度。

一端简支，一端自由梁函数可取为：

$$X=\frac{x^5}{a^5}-\frac{10}{3}\frac{x^4}{a^4}+\frac{10}{3}\frac{x^3}{a^3}+\frac{x}{a}$$

五种类型积分，都可查附录表，代入泛函方程并变分：

$$c\Big[0.0492056\times 3.80964\frac{a}{b^3}+2\times 0.3\times(-0.485676)\times 0.984132\frac{1}{a}\frac{1}{b}$$

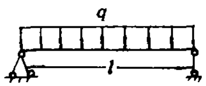
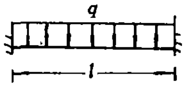
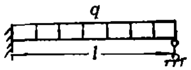
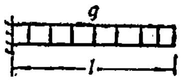
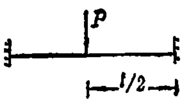
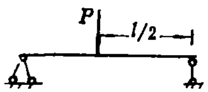
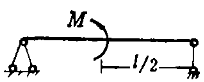
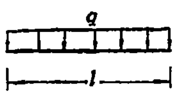
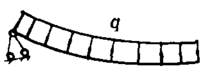
$$+4.8\times 1.050346\frac{b}{a^3}+1.4\times 0.485714\times 4.349206\frac{1}{a}\frac{1}{b}\Big]=0.833333\times 0.2\frac{q}{D}ab$$

方板$a=b$ $\quad c=0.0210976\dfrac{qa^4}{D}$

方板自由边中点位移 $w_o=0.0210976\dfrac{qa^4}{D}\times\dfrac{5}{16}\times 2=0.013186\dfrac{qa^4}{D}$

与正确解 $0.01286\dfrac{qa^4}{D}$比较，误差仅为2.47%。

附表

	计算简图	梁函数	$\int_0^a X^2dx\ (l)$	$\int_0^a X''^2dx\ \left(\frac{1}{l^3}\right)$	$\int_0^a X''Xdx\ \left(\frac{1}{l}\right)$	$\int_0^a Xdx\ (l)$	$\int_0^a X'^2dx\ \left(\frac{1}{l}\right)$	$\int_0^a X^{IV}Xdx\ \left(\frac{1}{l^3}\right)$
两端简支		$\frac{x^4}{l^4}-2\frac{x^3}{l^3}+\frac{x}{l}$	0.0492056	4.8	−0.485714	0.2	−0.485714	4.8
两端固支		$\frac{x^4}{l^4}-2\frac{x^3}{l^3}+\frac{x^2}{l^2}$	$\left(\frac{1}{630}\right)$ 0.0015873	$\left(\frac{4}{5}\right)$ 0.8	$\left(\frac{2}{105}\right)$ 0.0190476	$\left(\frac{1}{30}\right)$ 0.0333333	0.0190476	0.8
左端固支右端简支		$2\frac{x^4}{l^4}-5\frac{x^3}{l^3}+3\frac{x^2}{l^2}$	0.03015	7.2	−0.3428571	0.15	0.3428571	7.2
悬臂梁		$\frac{x^4}{l^4}-4\frac{x^3}{l^3}+6\frac{x^2}{l^2}$	$\left(\frac{104}{45}\right)$ 2.311111	28.8	$\left(\frac{60}{35}\right)$ 1.7142857	1.2	$\left(\frac{72}{7}\right)$ 10.285714	28.8
两端固支		$3\frac{x^2}{l^2}-4\frac{x^3}{l^3}$ $0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}$	0.023214285	24	−0.3	0.125	0.3	
两端简支		$3\frac{x}{l}-4\frac{x^3}{l^3}$ $0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}$	0.485714	48	−4.8	0.625	4.8	
两端简支		$\frac{x}{l}-4\frac{x^3}{l^3}$ $0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}$						
两端自由		$\frac{x^6}{l^6}-3\frac{x^5}{l^5}+\frac{5}{2}\frac{x^4}{l^4}-\frac{1}{2}\frac{x}{l}+\frac{75}{64}$	1.1365078	1.42857143	1.0301001	1.0647321	0.1417749	1.4285714
左端简支右端自由		$\frac{x^5}{l^5}-\frac{10}{3}\frac{x^4}{l^4}+\frac{10}{3}\frac{x^3}{l^3}+\frac{x}{l}$	1.050345	3.8095238	0.984126984	0.8333333	4.3492063	3.8095238

参 考 文 献

[1] 钱伟长，《变分法及有限元》(上册)，科学出版社，(1980).
[2] 胡海昌，《弹性力学变分原理及其应用》，科学出版社，(1981).
[3] 李岳生，《样条函数方法》，科学出版社，(1979).
[4] [美]S.铁摩辛柯、S.沃诺斯基著：《板壳理论》，《板壳理论》翻译组译，科学出版社，(1977).
[5] [美]S.铁摩辛柯、J.盖尔著，《材料力学》，胡人礼译，科学出版社，(1978)
[6] Cheung, Y. K.，《结构分析的有限条法》，谢秀松等译，王磊校，人民交通出版社(1980).
[7] 徐芝纶编，《弹性力学》下册，人民教育出版社，(1979).
[8] 胡海昌，以弹性力学平面应力问题为例，谈对应用有限元素法的几点建议，固体力学学报，1 (1982).
[9] 王 磊，加权残数法与试函数，湖南大学学报，3(1981).
[10] 王 磊，中厚板与试函数，工程力学，1 (1984).
[11] 王 磊，中厚板分析的边界积分法，计算结构力学及其应用，2(1985).

Approximate Solution for Bending of Rectangular Plates Kantorovich-Galerkin's Method

Wang Lei Li Jia-bao

(Hunan University, Changsha)

Abstract

This paper derives the cubic spline beam function from the generalized beam differential equation and obtains the solution of the discontinuous polynomial under concentrated loads, concentrated moment and uniform distributed by using delta function. By means of Kantorovich method of the partial differential equation of elastic plates which is transformed by the generalized function (δ function and σ function), whether concentrated load, concentrated moment, uniform distributed load or small-square load can be shown as the discontinuous polynmial deformed curve in the x-direction and the y-direction. We change the partial differential equation into the ordinary equation by using kantoroyich method and then obtain a good approximate solution by using Glerkin's method. In this paper there are more calculation examples involving elastic plates with various boundary-conditions, loads, section plates, and the classical differential problems such as cantilever plates are shown.