

# 陶瓷中的电-机械波——数值模拟\*

G.A. 莫金 B. 库利特 J. 波格特

(法国国家科学研究中心机械理论协会实验室, 皮埃尔-玛丽·居里大学)

(谢庆祥推荐, 1985年4月7日收到)

## 摘 要

用一维模型, 数值模拟了可形变陶瓷中线性和非线性波的传布. 给出了试件内应力(或应变)和电场之间的响应, 以及它们和电压之间的响应. 并在不同荷载下, 图示了电-机械波的传布特征. 发现在线性区域, 电压响应与实验符合很好, 非线性区域, 电-机械波变陡, 出现所谓激波现象.

## 一、引 言

压电陶瓷是一类有用的电磁可变形材料<sup>[1]</sup>, 其特点是有很高的压电耦合系数, 高的介电常数, 好的时间稳定性, 宽的温度范围和低的损耗等等, 在制造诸如转换器、滤波器、共振器、延迟线、声元件和激波激励电源等器件中有着广泛的应用<sup>[2~4]</sup>. 特别是, 利用激波压缩效应来制造电能-机械能转换器具有独特之处. 近十年来, 人们在固体非线性波的形成和传布方面的研究取得了很大的进展<sup>[5~9]</sup>, 本文也将对此进行讨论.

人们对可形变固体中的非线性运动如此感兴趣, 主要是因为激波可用来确定一些结晶固体的非线性程度很高的状态方程. 对弹性介质和铁电陶瓷等电磁材料, 线性和非线性波都同时具有力学和电学两方面的特征<sup>[10~11]</sup>. 这种电-机械耦合效应直接反映了样品的瞬时行为, 用一个经典装置就可进行说明<sup>[3]</sup>. 把一个压电材料做成的圆盘放在两个电极之间, 并将这两个电极同电阻为  $R$  的外电路连接(图1), 动力学荷载(冲力, 应力)加在圆盘的一端(所谓发射端), 信号穿过样品被另一端(接收端)反射, 记录瞬时电压  $V(t)$ , 即可从  $V(t)$  的变化看出电-机械耦合产生的电性能的变化. 下面即可看出, 电压  $V(t)$  与电阻大小有关. 本文试图对这个实验进行数值模拟, 具体些

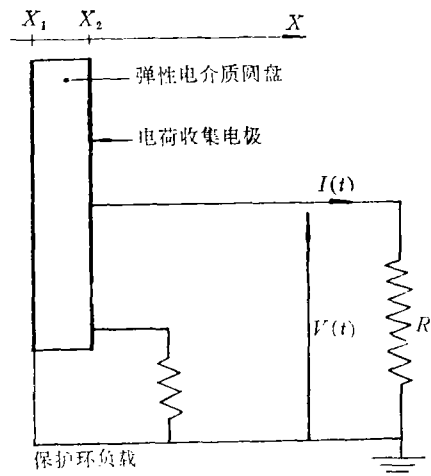


图1 电介质圆盘和外电路示意图

\* 本文原文为英文, 由邵明珠、罗诗裕译为中文.

说, 就是利用我们曾经使用过的模型和某些结果, 进一步研究不同荷载、不同电阻以及线性和非线性响应情况下陶瓷中的信号传布。对后一种情况而言, 数值模拟表明, 对于某些非线性响应, 陶瓷中出现了激波, 这正是非线性双曲型系统常见的现象。模拟上述实验的模型是非线性连续介质力学中所用过的一维模型, 只须再引入一些与力学和电学有关的内变数<sup>[12~13]</sup>, 就可描述机械损耗, 电损耗, 粘滞性和驰豫过程等, 其结果与实验定性符合。

## 二、数学模型

由于存在非线性效应, 我们必须区分拉格朗日位形和欧拉位形。设  $X$  是沿样品厚度方向的拉格朗日坐标 (图 1)。对一维运动 (即圆盘振动的轴向模式) 有

$$x = \mathcal{X}(X, t) = X + u(X, t) \quad (2.1)$$

其中  $u$  是位移场, 记号  $\partial_x = \partial/\partial X$ ,  $\partial_t = \partial/\partial t$ ; 由此可将形变梯度  $F$  和连度场  $v$  定义为

$$F = \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial X} = 1 + \partial_x u, \quad v = \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t} = \partial_t u \quad (2.2)$$

相容性运动学条件

$$\partial_t F = \partial_x v \quad (2.3)$$

由式(2.1), 形变梯度  $F$  的逆  $F^{-1}$ , 形变雅可比  $J$  和它的逆  $J^{-1}$  由公式

$$F^{-1} = (F)^{-1}, \quad J = F, \quad J^{-1} = F^{-1} \quad (2.4)$$

给出, 而拉格朗日应变

$$S = F - 1 = \partial_x u \quad (2.5)$$

在拉格朗日位形中, 设任一时刻  $t$ , 沿  $X$  方向的电场分量, 电位移分量和单位质量的电极化分量为  $E$ ,  $D$  和  $P$ , 则在参考位形中有

$$\bar{E} = FE, \quad \bar{D} = JF^{-1}D \quad (2.6)$$

它们互为热力学对偶元素, 正如非线性弹性形变中, Piola-Kirchhoff 应力  $T$  和梯度  $F$  也互为热力学对偶元素一样。在我们的情况下, 由式(2.4)和(2.5), 可将方程(2.6)化为下列简单形式

$$\bar{E} = (1+S)E, \quad \bar{D} = D \quad (2.7)$$

在准静电近似下, 对图 1 所示的圆盘样品, 有如下的全局平衡定律 (在拉格朗日位形中,  $\rho_0$  是样品密度)<sup>[11]</sup>。

### 线动量平衡

$$\frac{d}{dt} \int_{X_1}^{X_2} \rho_0 v dX = T(X_2, t) - T(X_1, t) \quad (2.8)$$

### 高斯定律

$$0 = \bar{D}(X_2, t) - \bar{D}(X_1, t) \quad (2.9)$$

### 同外电路连接

$$V(t) = \int_{X_1}^{X_2} \partial_x \phi dX = - \int_{X_1}^{X_2} \bar{E} dX = RI(t) \quad (2.10)$$

其中  $\bar{E} = -\partial_x \phi$ , 而  $\phi$  是准静电势,  $R$  是外电路电阻,  $I(t)$  是流过外电路的电流强度. 定律 (2.8) 和 (2.9) 隐含着如下局部定律

$$\rho_0 \partial_t v = \partial_x T, \quad X_1 < X < X_2 \quad (2.11)$$

$$\partial_x \bar{D} = 0, \quad X_1 < X < X_2 \quad (2.12)$$

式 (2.12) 表明,  $\bar{D}$  只与时间有关, 且  $\bar{D} = \partial_t \bar{D}$ , 这一点很容易从式 (2.9) 看出.

设  $A$  是接收端面积, 则电流强度可表示为

$$I(t) = A \partial_t \bar{D} \quad (2.13)$$

方程 (2.10) ~ (2.13) 用本构方程

$$T = \hat{T}(g(X, t)), \quad \bar{E} = \hat{E}(g(X, t)) \quad (2.14)$$

一起构成了一组完闭的方程组, 其中  $g$  是一组独立变量.

由热力学第二原理 (即 Clausius-Duhem 不等式) 可得<sup>[14][16]</sup>

$$(\theta \partial_t \mathcal{N} - \partial_t \Sigma) + T \partial_t F + \bar{E} \partial_t \bar{D} \geq 0 \quad (2.15)$$

其中热传导没有考虑,  $\mathcal{N}$  是参考位形中单位体积的熵,  $\theta$  是热力学温度.

对于无耗散情况, 在晶体的拉格朗日位形中, 内能  $\Sigma$  可表示为

$$\Sigma = \Sigma(g(X, t)), \quad g = \{\mathcal{N}, S, \bar{D}\}, \quad (2.16)$$

式 (2.15) 取等号, 可得本构方程

$$\theta = \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathcal{N}}, \quad T = \frac{\partial \Sigma}{\partial S}, \quad \bar{E} = \frac{\partial \Sigma}{\partial \bar{D}} \quad (2.17)$$

且

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{D}} = \frac{\partial \bar{E}}{\partial S} \quad (2.18)$$

对于 PZT65/35 型陶瓷材料, 在绝热近似下, 内能可表示为

$$\Sigma = \frac{1}{2} c \left( S^2 + \frac{2}{3} c_1 S^3 + \frac{1}{2} c_2 S^4 \right) - h (\bar{D} S + q \bar{D}^2 S) + \frac{1}{2} \beta (\bar{D}^2 + \frac{1}{2} f \bar{D}^4) \quad (2.19)$$

其中  $c$  是经典弹性系数,  $c_1$  和  $c_2$  是高阶弹性系数,  $h$  是压电系数,  $\beta$  是介电常数的倒数,  $f$  是描写非线性电特征的系数,  $q$  是电-机械耦合系数. 由方程 (2.17) 和 (2.19) 可得

$$T = c(S + c_1 S^2 + c_2 S^3) - h(\bar{D} + q \bar{D}^2), \quad \bar{E} = \beta(\bar{D} + f \bar{D}^3) - h(S + 2qS\bar{D}) \quad (2.20a, b)$$

考虑到机械损耗和电损耗, 还必须引入一组内变数, 其中一个  $F^{\text{int}}$  描写滞弹性, 另一个  $P^{\text{int}}$  描写电弛豫过程 (内电极化). 这时, 一般式 (2.15) 仍然不变, 而  $g$  的维数变大, 且可表示为

$$g = \{\mathcal{N}, S, \bar{D}, F^{\text{int}}, P^{\text{int}}\} \quad (2.21)$$

方程 (2.17) 也仍然成立, 只是附加了一个耗散不等式

$$T^{\text{int}} \hat{A} + E^{\text{int}} \hat{B} \geq 0 \quad (2.22)$$

$$\text{其中} \quad T^{\text{int}} = -\frac{\partial \Sigma}{\partial F^{\text{int}}}, \quad E^{\text{int}} = -\frac{\partial \Sigma}{\partial P^{\text{int}}} \quad (2.23)$$

和一个演化过程

$$\left. \begin{aligned} \partial_t F^{\text{int}} &= \hat{A}(g(X, t)), \quad F^{\text{int}}(t_1) = F_0^{\text{int}} \\ \partial_t P^{\text{int}} &= \hat{B}(g(X, t)), \quad P^{\text{int}}(t_1) = P_0^{\text{int}} \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

由式 (2.22) 给出的  $\hat{A}$  和  $\hat{B}$  可用热力学对偶元素表示 (例如线性形式), 这些元素本身由式 (2.23) 给出. 如果  $\Sigma$  和内变数之间的函数关系已知, 则这组方程也是完闭的.

上述方程一直是某些数学研究的重要课题<sup>[14,15]</sup>。在这些工作中,读者可找到加速波的传布和演化,激波的形成,还可找到单波及调制单波在有限振幅脉冲传布中的应用,以及高频小振幅脉冲的传布等等。显然,一旦激波形成,突变关系必然满足(对于无耗散情形),而所谓Hugoniot方程将起着决定作用。鉴于我们主要根据数值分析来研究电-机械波的形成,只需考虑偏微分方程(2.10)~(2.13)即可。

### 三、数值分析

我们求解的是包含三个变数  $T$  (或  $S$ ),  $\bar{E}$  和  $V$  的方程组。对于无耗散过程,可利用线性化方程或完整形式的本构方程(2.20);数值方法用线性方程进行了检验。由式(2.20b), (2.10)和(2.13)可得变数  $\bar{D}$  的常微分方程(因为  $\partial_x \bar{D} = 0$ )

$$AR\partial_t \bar{D} + a(t)\bar{D}(t) + b\bar{D}^3(t) = c(t) \quad (3.1)$$

其中

$$a(t) = \int_{X_1}^{X_2} (\beta - 2qhS) dX, \quad b = \int_{X_1}^{X_2} \beta f dX = \beta f(X_2 - X_1), \quad c(t) = \int_{X_1}^{X_2} hS dX \quad (3.2)$$

而  $S$  由解给出。注意到  $R \rightarrow \infty$  时,  $I(t) \rightarrow 0$ , 得到所谓电压模式(开路), 而当  $R \rightarrow 0$  时,  $V(t) \rightarrow 0$ , 得到所谓电流模式(闭路)。

对于无耗散情形, 偏微分方程通常是一组非线性双曲型方程, 数值结果的好坏与所选择的方法有关, 我们采用的数值方法是具有二阶精度的“Predictor-Corrector MacCormack”方法<sup>[16]</sup>, 积分(3.2)用梯形法计算, 而方程(3.1)显然是可积的。全部计算都在CDC170/750型计算机上进行, 所有图形都从计算机直接输出, 我们只选择了几张典型结果放在文中。

#### A. 线性区域

我们对样品内部的应力和电场之间的响应以及电极之间的电压响应进行了试验, 样品厚度 0.25cm, 电极面积  $A=1\text{cm}^2$ ; 当波阵面开始传布到样品内部时(初态), 相应的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} T(X_2, t) &= 0 \quad \text{任意时间 (自由端)} \\ D(0) &= 0 \\ v(X, 0), S(X, 0) &= 0, \quad X_1 \leq X \leq X_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

受初态约束的波前由第一列波阵面决定, 以此类推。外电阻可调, 先后取了  $R=25\Omega$ ,  $10^3\Omega$  和  $10^5\Omega$ 。发射端的输入信号-速度或者是阶跃的

$$v(X_1, t) = v_1 H(t), \quad v_1 = 0.001\text{cm}/\mu\text{s} \quad (3.4)$$

(其中  $H$  是海维赛 (Heaviside) 函数), 或者是斜坡加上一个平台

$$v(X_1, t) = \begin{cases} (v_1/t_0)t, & 0 < t < t_0 \\ v_1, & t > t_0 = 0.156\mu\text{s} \end{cases} \quad (3.5)$$

选择的最大时间间隔为  $t_{\max} = 1.009\mu\text{s}$ , 足以保证信号从  $X=X_2$  的自由端反射, 并回到发射端。图 2 和图 3 给出了应力和电场之间的响应, 选择的荷载为 (3.4), 电阻  $R=25\Omega$  和  $R=10^5\Omega$ , 分别对应于电流模式和电压模式。显然, 对于电流模式, 当波阵面在自由端  $X=X_2$  反射时, 样品内部的电场已发生了明显的变化; 但是, 电压模式却不是这样。如果选择

荷载为(3.5), 则可得到准电压模式, 如图4所示. 与图2, 3和4相应的最大电压分别为,  $V_{\max}=6.25\text{V}$ ,  $3.037 \times 10^3\text{V}$  和  $2.8 \times 10^3\text{V}$ . 为了同电场响应比较, 将电压归一化, 单位为  $V_{\max}$ , 结果如图5所示, 其中荷载为(3.4), 电阻选择与上面相同. 显然, 当  $R \rightarrow 0$  时 (电流模式), 电压呈雉堞形, 当  $R \rightarrow \infty$  时 (电压模式), 呈锯齿形. 事实上, 当  $R=10^5\Omega$  时, 电压响应已呈锯齿状了. 图6给出了输入为(3.4)和(3.5)的归一化电压响应曲线, 电阻  $R=10^5\Omega$ . 图7描写的是电压模式, 并同 Lysne 和 Bartel 的实验结果<sup>[9]</sup>进行了比较. 我们的工作描写了无耗散过程的瞬态响应, 说明在实验曲线上观察到的延迟是瞬时发生的. 在线性区域, 波阵面传布的特点是它的分布保持不变.

## B. 非线性区域

预期样品内部波阵面分布不再保持不变. 为了研究这种情况, 我们取  $X=X_1$  端的输入应变为如下的正弦函数形式

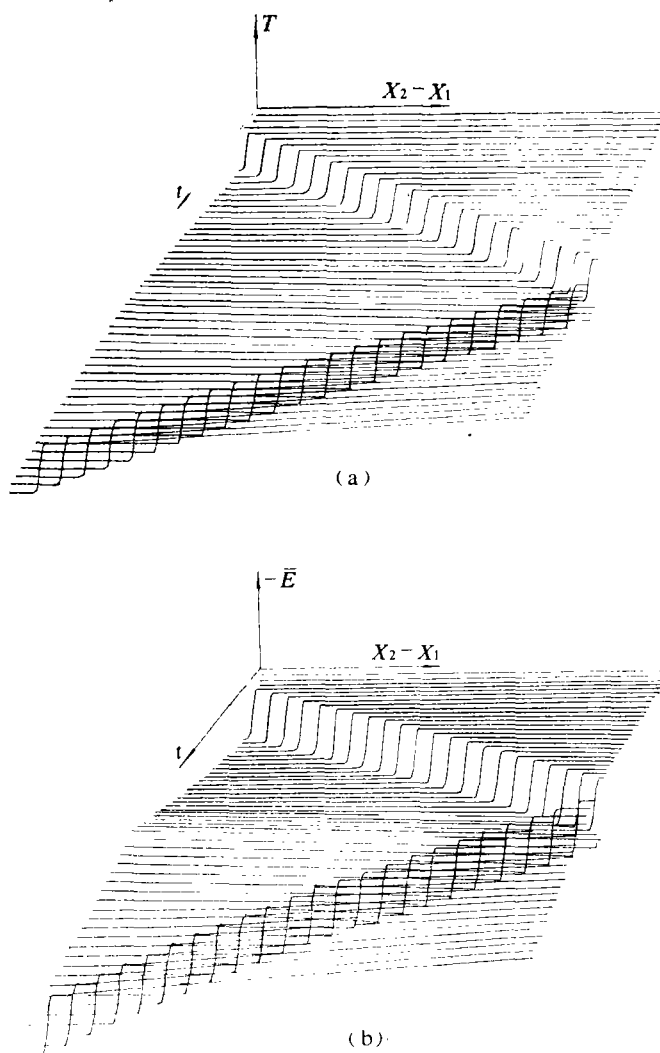


图2 在  $X=X_1$  处呈阶梯形速度输入情况下的线性响应,  $R=25\Omega$ . (a)应力, (b)电场

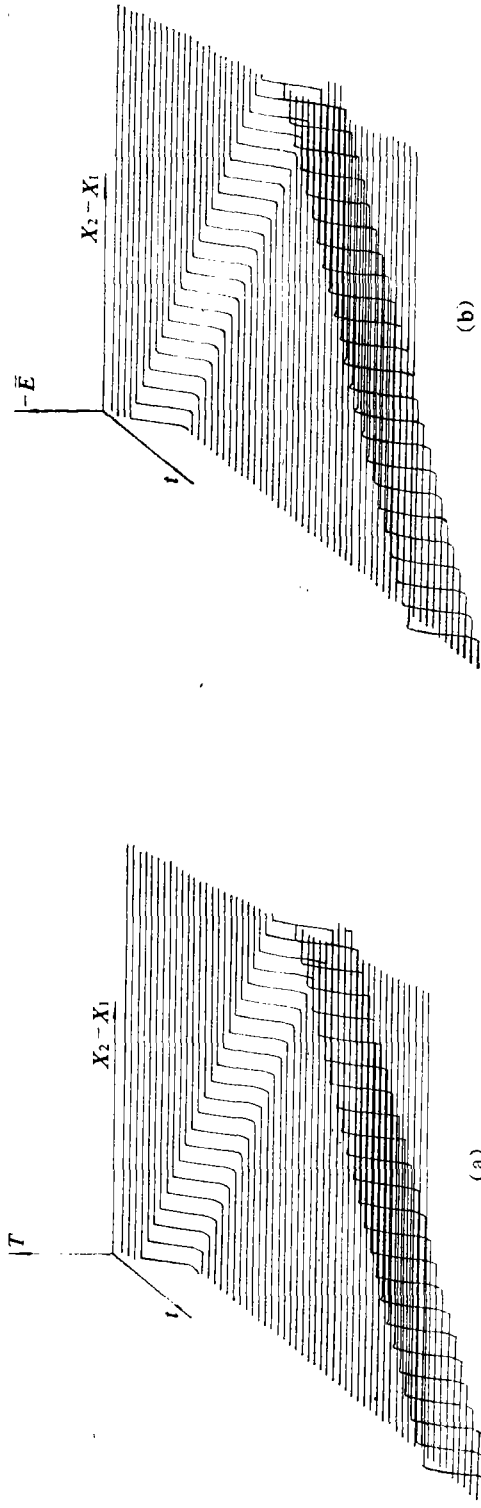


图3 在  $X = X_1$  处呈阶梯形速度输入情况下的线性响应,  $R = 10^5 \Omega$ . (a) 应力, (b) 电场

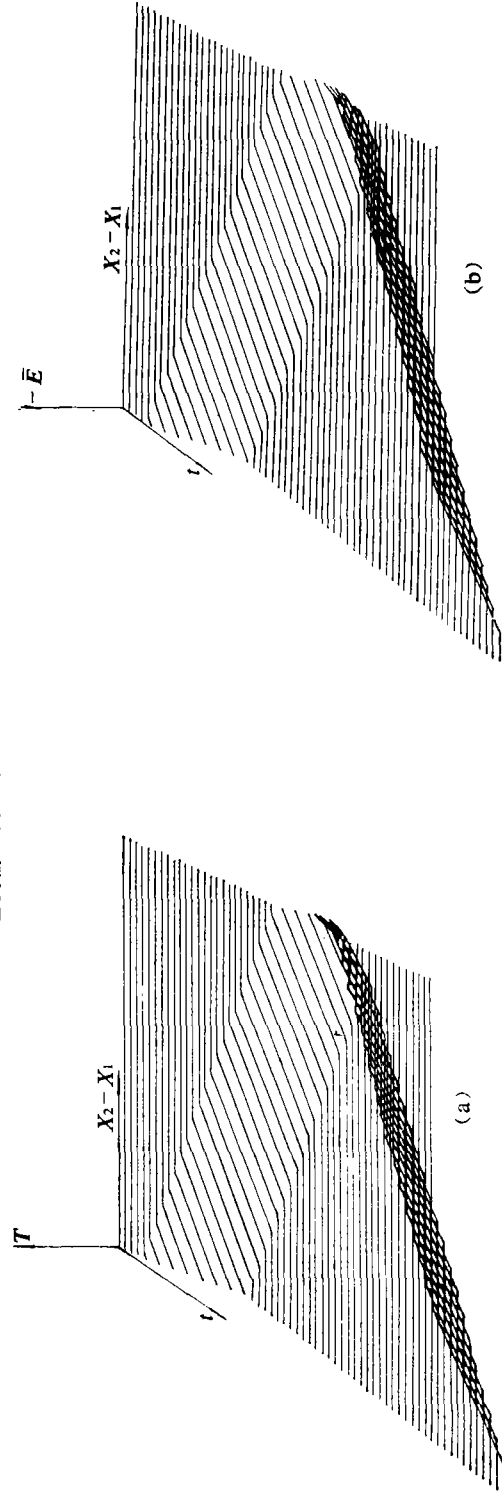


图4 在  $X = X_1$  处呈斜梯形速度输入情况下的线性响应,  $R = 10^5 \Omega$ . (a) 应力, (b) 电场

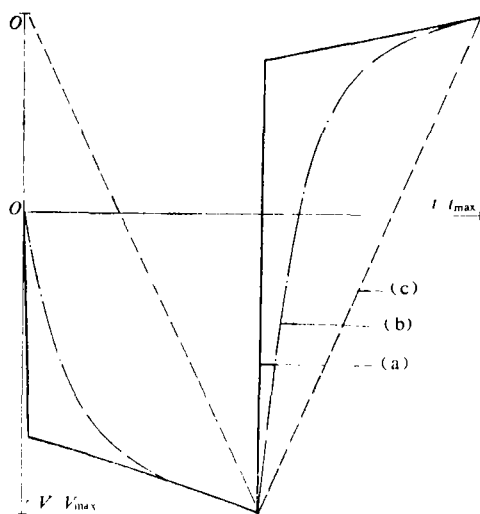


图5 在  $X=X_1$  处呈阶梯形输入情况下归一化电压响应  
(a)  $R=25\Omega$ , (b)  $R=10^3\Omega$ , (c)  $R=10^5\Omega$

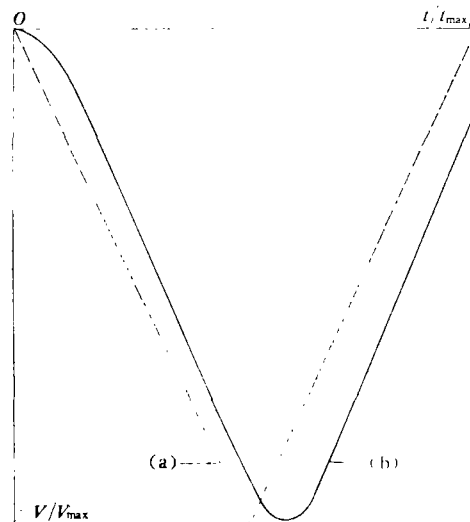


图6 阶梯形和斜坡形速度输入的归一化电压响应,  $R=10^5\Omega$   
(a) 阶梯形, (b) 斜坡形

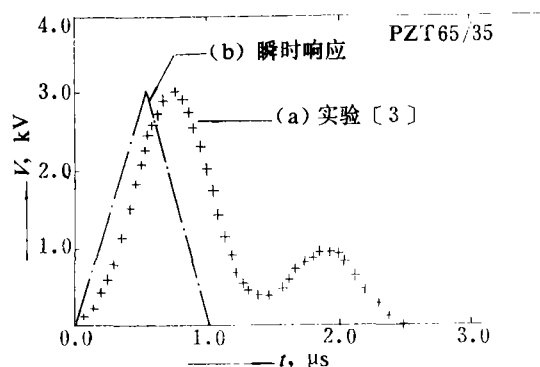


图7 对于PZT65/35型陶瓷材料的电压模式, 实验结果<sup>[3]</sup>和数值计算的比较  
(a) 实验结果, (b) 瞬时响应的数值结果

$$S(X_1, t) = \begin{cases} S_1 \sin(2\pi t/t_0), & 0 < t < t_0/2 \\ 0, & t > t_0/2 \end{cases} \quad (3.6)$$

其中  $S_1=0.0032$ ,  $t_0=0.156\mu s$ ,  $R=8 \times 10^3\Omega$  (工作状态与电压模式接近); 当波阵面开始传布到样品内部时(初态), 相应的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} u(X_2, t) &= 0 \quad \text{任意时间} \\ D(0) &= 0 \\ v(X, 0) &= 0, \quad S(X, 0) = 0, \quad X_1 \leq X \leq X_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

时间间隔仍为  $1.009\mu s$ . 样品内应变和电场响应如图8所示. 从图8可以看出, 波阵面逐渐变陡, 以致出现激波, 这实际上是从固定端  $X=X_2$  反射到  $X=X_1$  这一过程中完成的, 所需时间大约是  $1\mu s$ . 这一结果与非线性双典型方程理论所给出的一致(见文献[9]附录 II·A·2或文献[17]第8章). 显然, 要想补偿非线性效应引起的陡峭效应, 就必须考查系统的色散, 这在一些弹性铁电材料中和非线性是同时存在的, 因而孤子和孤子波概念就自然会出现<sup>[18]</sup>.

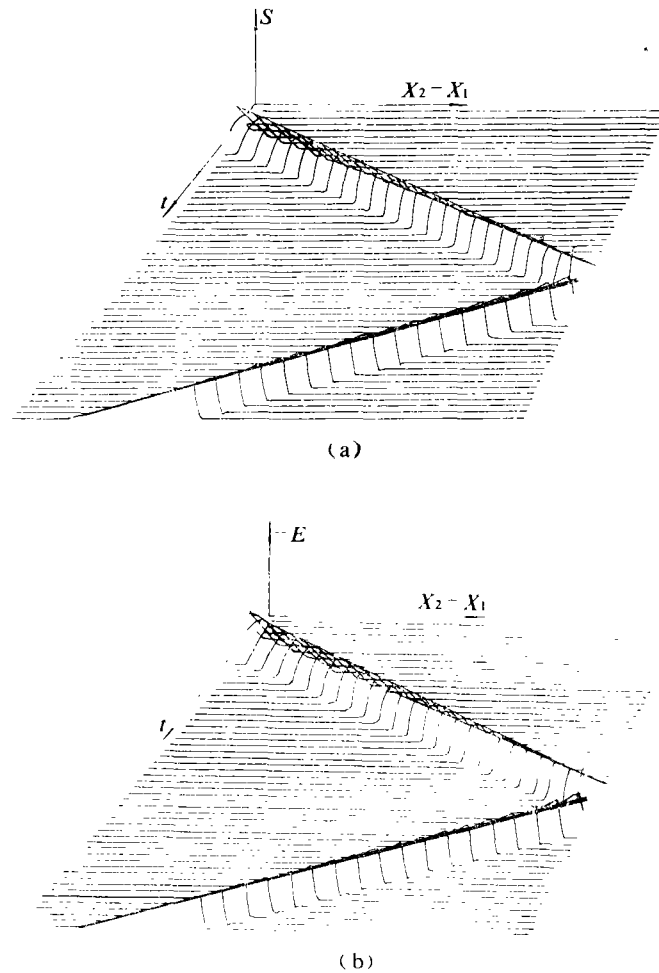


图8 PZT65/35型陶瓷材料应变和电场的非线性响应以及电-机械激波的形成,  $R=10^5\Omega$

#### 四、结 论

在陶瓷样品的线性区域检验了我们的数值方法, 结果很好, 给出的电压响应与实验相当符合. 在非线性区域, 从波阵面分布可以发现激波存在, 但它并没有呈现出明显的锯齿状. 计算表明, 粘滞性不太重要. 对(2.24)所描写的实际耗散系统进行了非线性分析, 发现第三节中所描述的非线性双曲型系统将同时受到机械损耗和电损耗的影响, 我们对此进行了数值模拟.

**致谢** 本工作是在“电磁弹性材料的非线性波”一文基础上完成的, 这篇文章发表在杂志(法)“Mathématiques Appliquées et Méthodes Numériques Performantes”上.

#### 附 录

方程(2.19)中所用PZT65/35型材料的系数表

密度

$$\rho = 7.82 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$



二阶弹性系数	$c=177 \times 10^9 \text{Pa}$
三阶弹性系数	$c_1=-1.5$
四阶弹性系数	$c_2=3.0$
电压系数	$h=4.77 \times 10^8 \text{V/m}$
介电常数倒数	$\beta=4.45 \times 10^8 \text{V/F}$
非线性电系数	$f=15 \text{m}^4/\text{C}^2$
电致伸缩反压电系数	$q=-30 \text{m}^2/\text{C}$

} 估计值

} 估计值

## 参 考 文 献

- [1] Maugin, G. A. (ed.), *The Mechanical Behavior of Electromagnetic Solid Continua* (Proceedings IUTAM-IUPAP Symposium, Paris, July 1983), North-Holland, Amsterdam (1984).
- [2] Holland, R. and E. P. Eernisse, *Design of Resonant Piezoelectric Devices*, M. I. T. Press, Cambridge, Mass. (1969).
- [3] Lysne, P. C. and L. C. Bartel, Electromechanical response of PZT 65/35 subjected to axial shock loading, *J. Applied Physics*, **46** (1975), 222—229.
- [4] Lysne, P. C. and C. M. Percival, Electric energy generation by shock compression of ferroelectric ceramics, *J. Applied Physics*, **46** (1975), 1519—1525.
- [5] Murri, W. J., D. R. Curran, C. F. Peterson and R. C. Crewdon, in *Adv. High. Press. Res.*, Vol. 4, Academic Press, New York (1974), 1—163.
- [6] Chen, P. J., Growth and decay of waves in solids, in *Handbuch der Physik*, Bd. VI-3, ed. C. A. Truesdell, Springer-Verlag, Berlin (1973), 303—402.
- [7] McCarthy, M. F., Singular surfaces and waves, in *Continuum Physics*, ed. A. C. Eringen, Vol. I, Academic Press, New York (1975), 450—521.
- [8] Brun, L., Finite shock waves in elastic solids, in *Mechanical Waves in Solids*, eds. J. Mandel and L. Brun, Springer-Verlag, Wien (1975), 63—155. (in French)
- [9] Maugin, G. A., *Nonlinear Electromechanical Interactions and Applications—A Series of Lectures*, World Scientific Publ. Singapore (in the press, 1985).
- [10] Collet, B., Shock waves in deformable piezoelectric materials, in *Proc. 11th Intern. Congress of Acoustics*, Paris, July (1983), Special Issue of *Revue d'Acoustique*, Vol. 2 (1983), 125—128.
- [11] Collet, B., On the behavior of plane shock waves in deformable dielectric materials, *Int. J. Engng. Sci.*, **21** (1983), 1145—1155.
- [12] Sidoroff, F., Internal variables in viscoelasticity and plasticity, Doctoral Thesis in Mathematics, University of Paris, VI (mimeographed, 1976). (in French).
- [13] Maugin, G. A., Electromagnetic internal variables in electromagnetic continua, *Archives of Mechanics*, **33** (1981), 927—935.
- [14] Collet, B., Shock waves in deformable ferroelectric materials, in *The Mechanical Behavior of Electromagnetic Solid Continua*, ed. G. A. Maugin, North-Holland, Amsterdam (1984), 157—163.
- [15] Collet, B., Nonlinear wave propagation in elastic dielectrics with internal variables, *J. Technical Physics* (Warsaw, Poland) (in the press, 1985).
- [16] Peyret, R., *Numerical Solution of Hyperbolic Systems: Application to Gas Dynamics*,

Publication of the Office National d'Etude et de Recherche Aérospatiale Paris (1977).  
(in French).

- [17] Nayfeh, A. H. and D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, J. Wiley-Interscience, New York (1979).
- [18] Pouget, J. and G. A. Maugin, Solitons and electroacoustic interactions in ferroelectric crystals- I: Single solitons and domain walls, *Physical Review*, **B30** (1984), 5306—5325.

## Electromechanical Waves in Ceramics—— Numerical Simulation

Gérard A. Maugin    Bernard Collet    Joël Pouget

(Laboratoire de Mécanique Théorique Associé au C. N. R. S., Université  
Pierre-et-Marie Curie, Paris, France)

### Abstract

A simple one-dimensional model is used to simulate numerically the propagation of linear and nonlinear waves in a deformable ceramic. The numerical scheme used provides the response in stress or strain and electric field within the sample and the voltage at a resistive external circuit connecting the two faces of the sample. Space-time diagrams of the propagation are obtained for various mechanical loads. The voltage response obtained agrees well with experimental results in the linear regime. In the nonlinear one, the steepening of the electromechanical wave yielding a shock wave is exhibited.