应用数学和力学，第6卷第12期（1985年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

发散积分的有限部分在弹性力学中的应用*

王 敏 中

(北京大学力学系，1984年9月19日收到)

摘 要

本文利用发散积分的有限部分，从三维的Kelvin问题的解，Boussinesq问题的解和Mindlin问题的解直接导出了相应的二维问题的解，另外也给出了在平面问题中的应用.

一、引 言

弹性力学的某些三维问题和二维问题是极其类似的. 例如，三维全空间中和二维全平面上作用集中力的Kelvin问题，弹性半空间和弹性半平面的直边上作用集中力的Boussinesq问题，以及弹性半空间和弹性半平面的内部作用集中力的Mindlin问题和Melan问题. 这些问题的解答也是十分类似的. 但是这些问题的求解，却是利用三维和二维的方程分别求得的.

能不能有一种方法，使三维的解蜕化为二维的解呢？从力学上看，当有了一个三维问题的解，然后沿着z轴从$-\infty$到$+\infty$连续分布载荷，即可得到一个平面应变问题的解，但在数学上却遇到了发散积分的困难. M. Flamant[1]曾将三维Boussinesq问题的解转变成二维问题的解，不过如第四节所指出的，他的解法并没有克服数学上的困难.

本文利用发散积分的有限部分解决了这一困难. 从三维的Kelvin问题的解，Boussinesq问题的解，Mindlin问题的解导出了相应的二维问题的解，这些将在第二节，第三节，第五节中给出. 在附录中将简单介绍由Hadamard所定义的发散积分的有限部分. 另外，在第六节中给出它在平面问题中的应用.

二、Kelvin问题

在三维全空间中，有集中力Q作用在坐标原点，力的方向为y向(图1). 它的位移场为[2,3]

* 钱伟长推荐.

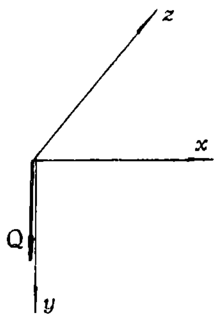

图 1

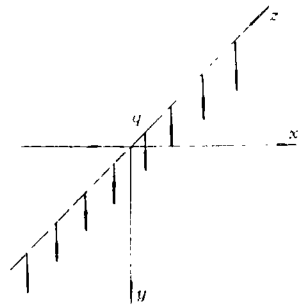

图 2

$$u^{(s)}=\alpha Q\frac{xy}{R^3},\qquad v^{(s)}=\alpha Q\frac{y^2}{R^3}+\beta Q\frac{1}{R},\qquad w^{(s)}=\alpha Q\frac{yz}{R^3} \tag{2.1}$$

其中 $\alpha=1/16\pi\mu(1-\nu)$，$\beta=(3-4\nu)/16\pi\mu(1-\nu)$，$\mu$ 为剪切模量，ν 为 Poisson 比，而 $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

今在 z 轴上从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 分布线密度为常量 q 的 y 向载荷（图 2），于是得到一个平面应变问题。其位移场可如下得到

$$\left.\begin{aligned}u^{(p)}&=\alpha q\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xy}{[r^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}d\zeta\\ v^{(p)}&=\alpha q\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^2}{[r^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}d\zeta+\beta q\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\zeta}{\sqrt{r^2+(z-\zeta)^2}}\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

其中 $r^2=x^2+y^2$。

在(2.2)式中，作变换 $t=\zeta-z$，那末 t 的积分范围也还是从 $-\infty$ 到 $+\infty$。于是 (2.2) 为

$$u^{(p)}=\alpha q\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xy}{(r^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}dt \tag{2.3}$$

$$v^{(p)}=\alpha q\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^2}{(r^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}dt+\beta q\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{r^2+t^2}} \tag{2.4}$$

(2.3)式中的积分和(2.4)中的第一个积分是容易算出的。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(r^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{r^2} \tag{2.5}$$

而(2.4)式右端的第二个积分是发散的，它的有限部分为 $-2\ln r$（见附录中的 (A.4) 式）。

因此平面应变问题中，在全平面上作用一集中力的位移场[2]为

$$u^{(p)}=2\alpha q\frac{xy}{r^2},\quad v^{(p)}=2\alpha q\frac{y^2}{r^2}-2\beta q\ln r \tag{2.6}$$

当然(2.6)式仅精确到一个刚体位移。

至于 (2.1) 式中的 $w^{(s)}$，由于它对 z 是奇函数，于是对 t 也是奇函数。那末如果也按上述办法作积分，可得在 z 向位移为零，这正是平面应变问题所要求的。

此外，当外载不是 y 向，而是 x 向时，可以类似地从三维的解导出二维的解。

三、Boussinesq问　题

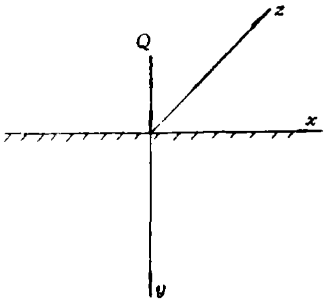

图　3

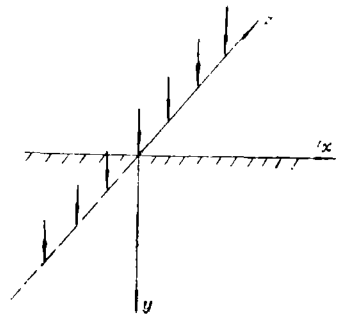

图　4

在三维弹性半空间的直边上，有集中力 Q 作用在坐标原点，力的方向为 y 向（图 3），其位移场[2,3,4]为

$$\left.\begin{aligned} u^{(s)} &= \frac{Q}{4\pi\mu}\left[\frac{xy}{R^3}-(1-2\nu)\frac{x}{R(R+y)}\right] \\ v^{(s)} &= \frac{Q}{4\pi\mu}\left[\frac{y^2}{R^3}+2(1-\nu)\frac{1}{R}\right] \\ w^{(s)} &= \frac{Q}{4\pi\mu}\left[\frac{yz}{R^3}-(1-2\nu)\frac{z}{R(R+y)}\right] \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

当在 z 轴上从 $-\infty$ 到 $+\infty$，分布 y 向线密度为 q 的载荷时（图 4），就得到一个平面应变问题。与第二节类似，我们可以得到弹性半平面的 Boussinesq 问题的解[2,4]

$$u^{(p)}=\frac{q}{2\pi\mu}\left[\frac{xy}{r^2}-(1-2\nu)\,\mathrm{arctg}\frac{x}{y}\right],\quad v^{(p)}=\frac{q}{2\pi\mu}\left[\frac{y^2}{r^2}-2(1-\nu)\ln r\right] \tag{3.2}$$

在得到（3.2）式时，除用到（2.5）式和附录中的（A.4）式以外，还用到了下述积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{r^2+t^2}\,(\sqrt{r^2+t^2}+y)}\,dt=2\,\mathrm{arctg}\frac{x}{y} \tag{3.3}$$

此外，当外载不是 y 向，而是 x 向时，可以类似地从三维的解得到二维的解。

四、关于 Flamant 的解法

M. Flamant[1]曾从三维的 Boussinesq 解导出相应的二维问题的解。今简要介绍一下。他的做法与我们的做法不同，不是在 z 轴上从 $-\infty$ 到 $+\infty$，而是从 $-l$ 到 $+l$ 分布 y 向线密度为 q 的载荷，于是位移场为

$$(u,w)=-\frac{d}{d(x,z)}\left(y\frac{d\varphi}{dy}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\varphi\right),\quad v=-y\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\frac{d\varphi}{dy} \tag{4.1}$$

这儿 λ 和 μ 是 Lame 系数，

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\mu}\int_{-l}^{l}\log\left[y+\sqrt{x^2+y^2+(\zeta-z)^2}\right]d\zeta \tag{4.2}$$

（注：为了和本文一致，这儿将 Flamant 的记号稍作了改动）。

式（4.2）的积分可以作出

$$\int \log[y+\sqrt{x^2+y^2+(\zeta-z)^2}]d\zeta$$
$$=(\zeta-z)\log[y+\sqrt{x^2+y^2+(\zeta-z)^2}]-\zeta+z+y\log[\zeta-z+\sqrt{x^2+y^2+(\zeta-z)^2}]$$
$$+2\sqrt{x^2}\operatorname{arctg}\frac{y+\zeta-z+\sqrt{x^2+y^2+(\zeta-z)^2}}{\sqrt{x^2}}+\text{const} \tag{4.3}$$

将（4.3）代入（4.2），得

$$\varphi=\frac{q}{2\pi\mu}\left[y-l(1-\log l)+y\log\frac{2l}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right]+O\left(\frac{1}{l}\right) \tag{4.4}$$

将（4.4）代入（4.1）得

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{q}{2\pi\mu}\left(\frac{xy}{r^2}-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)+O\left(\frac{1}{l}\right)\\ v&=\frac{q}{2\pi\mu}\left(\frac{y^2}{r^2}+\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\log\frac{2l}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+O\left(\frac{1}{l}\right)\\ w&=O\left(\frac{1}{l}\right)\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

从（4.5）式，可得应力场，再令 $l\to\infty$，就得到了二维 Boussinesq 解的应力分布：

$$\sigma_x^{(p)}=-\frac{2q}{\pi}\frac{x^2y}{r^4},\quad \sigma_y^{(p)}=-\frac{2q}{\pi}\frac{y^3}{r^4},\quad \tau_{xy}^{(p)}=-\frac{2q}{\pi}\frac{xy^2}{r^4} \tag{4.6}$$

从上述 M. Flamant 的做法可以看出，由于那时没有发散积分的有限部分这一数学工具，他不能得到位移的表达式，只得到了应力的表达式。

如果仅仅为了从三维的应力分量导出二维的应力分量，这用不着发散积分的有限部分，因为对应力分量而言，从三维到二维遇到的全是收敛积分。事实上，从（3.1）可导出三维的应力分量

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x^{(s)}&=\frac{Q}{2\pi}(1-2\nu)\left[\frac{2x^2}{(x^2+z^2)^2}-\frac{1}{x^2+z^2}+y\left(\frac{1}{R^3}-\frac{2x^2}{(x^2+z^2)R^3}\right.\right.\\ &\quad\left.\left.-\frac{2x^2}{(x^2+z^2)^2R}+\frac{1}{(x^2+z^2)R}\right)\right]-\frac{3Q}{2\pi}\frac{x^2y}{R^5}\\ \sigma_y^{(s)}&=-\frac{3Q}{2\pi}\frac{y^3}{R^5},\quad \tau_{xy}^{(s)}=-\frac{3Q}{2\pi}\frac{xy^2}{R^5}\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

当在 z 轴上，从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 分布线密度为 q 的 y 向载荷时，得到平面应变问题。这时将（4.7）式中的 Q 换为 q，z 换为 t，然后从对 t 从 $-\infty$ 积到 $+\infty$，即得（4.6）式。这样做时要用下述三个积分。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{2x^2}{(x^2+t^2)^2}-\frac{1}{x^2+t^2}\right]dt=0 \tag{4.8}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{(r^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{2x^2}{(x^2+t^2)(r^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{2x^2}{(x^2+t^2)^2\sqrt{r^2+t^2}}+\frac{1}{(x^2+t^2)\sqrt{r^2+t^2}}\right]dt=0 \tag{4.9}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(r^2+t^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{4}{3r^4} \tag{4.10}$$

而(4.8)、(4.9)、(4.10)可从下述三个积分分部积分得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{x^2+t^2},\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(x^2+t^2)\sqrt{r^2+t^2}},\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(r^2+t^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.11}$$

从（3.1）还可导出另外三个应力分量$\tau_{xz}^{(s)}$，$\tau_{yz}^{(s)}$和$\sigma_z^{(s)}$，不难看出$\tau_{xz}^{(s)}$，$\tau_{yz}^{(s)}$是z的奇函数，其积分为零，而将$\sigma_z^{(s)}$积分可得到$\sigma_z^{(p)}=\nu\left(\sigma_x^{(p)}+\sigma_y^{(p)}\right)$。

五、Mindlin 问题

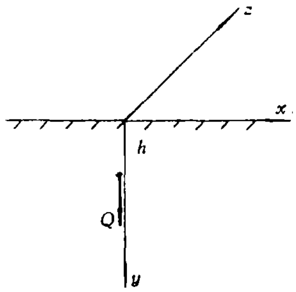

图 5

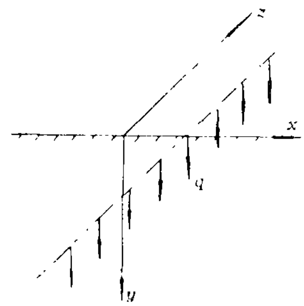

图 6

在三维弹性半空间$y\geqslant 0$的内部，有集中力Q作用在距表面深h处，力的方向为y向（图5），R. D. Mindlin[5,6]给出了该问题的位移场

$$
\left.\begin{aligned}
u^{(s)}=&\frac{Q}{4\pi\mu}\left[\frac{xy}{R_2^3}-(1-2\nu)\frac{x}{R_2(R_2+y+h)}\right]\\
&+\frac{Q}{16\pi\mu(1-\nu)}\left[\frac{(x(y-h)}{R_1^3}-\frac{x(y+h)}{R_2^3}-2(1-2\nu)\frac{hx}{R_2^3}+6h\frac{xy(y+h)}{R_2^5}\right]\\
v^{(s)}=&\frac{Q}{4\pi\mu}\left[\frac{(y+h)^2}{R_2^3}+2(1-\nu)\frac{1}{R_2}\right]+\frac{Q}{16\pi\mu(1-\nu)}\left[\frac{(y-h)^2}{R_1^3}\right.\\
&\left.-\frac{(y+h)^2}{R_2^3}-2\frac{hy}{R_2^3}+(3-4\nu)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+6h\frac{y(y+h)^2}{R_2^5}\right]\\
w^{(s)}=&\frac{Q}{4\pi\mu}\left[\frac{yz}{R_2^3}-(1-2\nu)\frac{z}{R_2(R_2+y+h)}\right]\\
&+\frac{Q}{16\pi\mu(1-\nu)}\left[\frac{z(y-h)}{R_1^3}-\frac{z(y+h)}{R_2^3}-2(1-2\nu)\frac{hz}{R_2^3}+6h\frac{(y+h)yz}{R_2^5}\right]
\end{aligned}\right\}\quad(5.1)
$$

其中 $R_1^2=x^2+(y-h)^2+z^2$，$R_2^2=x^2+(y+h)^2+z^2$

在直线$\{y=h,\ x=0\}$上，从$z=-\infty$到$z=+\infty$分布线密度为q的y向载荷（图6），按前面的方法，可以得到平面上Melan[7,8]问题的解。

$$
\left.\begin{aligned}
u^{(p)}=&\frac{q}{2\pi\mu}\left[\frac{xy}{r_2^2}-(1-2\nu)\operatorname{arctg}\frac{x}{y+h}\right]\\
&+\frac{q}{8\pi\mu(1-\nu)}\left[\frac{x(y-h)}{r_1^2}-\frac{x(y+h)}{r_2^2}-2(1-\nu)\frac{hx}{r_2^2}+4h\frac{xy(y+h)}{r_2^4}\right]\\
v^{(p)}=&\frac{q}{2\pi\mu}\left[\frac{(y+h)^2}{r_2^2}-2(1-\nu)\ln r_2\right]+\frac{q}{8\pi\mu(1-\nu)}\left[\frac{(y-h)^2}{r_1^2}-\frac{(y+h)^2}{r_2^2}\right.\\
&\left.-2\frac{hy}{r_2^2}-(3-4\nu)(\ln r_1-\ln r_2)+4h\frac{y(y+h)^2}{r_2^4}\right]
\end{aligned}\right\}\quad(5.2)
$$

其中 $r_1^2=x^2+(y-h)^2$，$r_2^2=x^2+(y+h)^2$

从（5.1）式积分得到（5.2）式时，我们利用了（2.5）式，（3.3）式和（4.10）式，以及附录中的（A.4）式。

对于载荷为 x 向的情况，可以类似从三维问题的解导致二维问题的解。

六、某些平面问题

对于半平面的直边上有载荷的 Boussinesq 问题，相应于（3.2）的位移，其 Airy 应力函数的表达式[2]为

$$\phi=\frac{q}{\pi}x\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x} \tag{6.1}$$

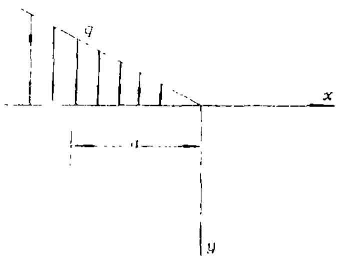

图 7

考虑图 7 所示的半无限大板的问题[2]，其中按线性分布的压力载荷向左边无限延伸。为了求其应力函数 ϕ_1，我们利用（6.1）式的应力函数进行叠加，即有

$$\phi_1=-\frac{q}{\pi a}\int_{-\infty}^{0}t(x-t)\ \mathrm{arctg}\frac{y}{x-t}dt \tag{6.2}$$

今在（6.2）式中，对 y 取微商，按附录中的概念，认为微商和积分的次序可变换，得

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial y}=-\frac{q}{\pi a}\int_{-\infty}^{0}\left[t+\frac{x-t}{y^2+(x-t)^2}y^2-\frac{xy^2}{y^2+(x-t)^2}\right]dt$$

按附录中的（A.7）式和（A.10）式，我们得到

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial y}=-\frac{q}{\pi a}\left\{c-\frac{1}{2}y^2[\ln(x^2+y^2)+f(x)]-xy\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}\right\} \tag{6.3}$$

其中 c 和 $f(x)$ 为待定常数和待定函数。

今积分（6.3）式得，

$$\phi_1=\frac{q}{3\pi a}\left[\left(\frac{1}{3}x^3+xy^2\right)\mathrm{arctg}\frac{y}{x}+\frac{1}{3}y^3\ln(x^2+y^2)-\frac{1}{3}x^2y+cy+\frac{1}{3}y^3f_1(x)+g(x)\right] \tag{6.4}$$

其中，$f_1(x)=f(x)-2/3$，而 $g(x)$ 为另一个待定函数。

我们知道 ϕ_1 应满足双调和方程，即

$$\nabla^2\nabla^2\phi_1=0 \tag{6.5}$$

其中，$\nabla^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$。将（6.4）代入（6.5）得

$$\frac{1}{3}y^3\frac{d^4f_1(x)}{qx^4}+4yf_1''(x)+\frac{d^4g}{dx^4}=0 \tag{6.6}$$

从（6.6）式，可得

$$f_1''(x)=0,\qquad \frac{d^4g}{dx^4}=0 \tag{6.7}$$

即有

$$f_1(x)=c_1x+c_2,\quad g(x)=d_1x^3+d_2x^2+d_3x+d_4 \tag{6.8}$$

为了确定（6.8）式中的常数，我们考虑边界条件：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_y|_{y=0}&=\left.\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2}\right|_{y=0}=\begin{cases}\dfrac{q}{a}x, & x<0\\ 0, & x\geqslant 0\end{cases}\\ \tau_{xy}|_{y=0}&=-\left.\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x\partial y}\right|_{y=0}=0\end{aligned}\right\}\tag{6.9}$$

将（6.4）和（6.8）代入（6.9）式，得

$$d_1=d_2=0$$

此外，注意到含 c, d_3 和 d_4 的项不产生应力，故最后得到图 7 所示问题的 Airy 应力函数为

$$\phi_1=-\frac{q}{2\pi a}\left[\left(\frac{1}{3}x^3+xy^2\right)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\frac{1}{3}y^3\ln(x^2+y^2)-\frac{1}{3}x^2y\right]+c_1'xy^3+c_2'y^3\tag{6.10}$$

其中 c_1' 和 c_2' 为常数．这两个常数，在这里已无法确定，因为由双调和函数 ϕ_1 所确定的应力已满足 $y=0$ 直边上的条件．如果要确定它们，应该寻求新的条件．在[2]中，取定 $c_1'=c_2'=0$．

用上述方法，可以求出[2,9]中所举的半平面上类似问题的应力函数．

华中工学院庄业高教授曾与作者进行过有益的讨论，本人谨表衷心的感谢．

附录　发散积分的有限部分

发散积分的有限部分是 Hadamard[10]研究双曲型方程基本解时引入的．本文中遇到了下述发散积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{r^2+t^2}}\tag{A.1}$$

注意到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{r^2+t^2}}dt=-\frac{2}{r}\tag{A.2}$$

如果认为微分和积分的次序是可变换的，那末有

$$\frac{d}{dr}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{r^2+t^2}}=-\frac{2}{r}\tag{A.3}$$

积分（A.3）式，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{r^2+t^2}}=-2\ln r+C\tag{A.4}$$

其中C是某个常数．(A.4)式的右端即所谓发散积分(A.1)的有限部分，它被看成积分（A.1）的数值．

我们再来计算本文中所需要的另外两个积分，首先计算

$$\int_{-\infty}^{0}t\,dt\tag{A.5}$$

设 a 为某个参数，但（A.5）中不含a，故有

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_{-\infty}^{0}t\,dt=0\tag{A.6}$$

因此有

$$\int_{-\infty}^{0}t\,dt=C\tag{A.7}$$

其中C为某个常数．

其次，计算积分

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{x-t}{y^2+(x-t)^2}dt \tag{A.8}$$

因为

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{\partial}{\partial y}\frac{x-t}{y^2+(x-t)^2}dt=-\frac{y}{x^2+y^2} \tag{A.9}$$

那末有

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{x-t}{y^2+(x-t)^2}dt=-\frac{1}{2}[\ln(x^2+y^2)+f(x)] \tag{A.10}$$

其中 $f(x)$ 为某个待定函数.

关于发散积分的有限部分，在[11]中称为广义函数的泛函正则化. 这里的几个发散积分也可利用正则化方法来导出.

参 考 文 献

[1] Flamant, M., Sur la répartition des pressions dans un solide rectangulaire chargé transversalement, *Compt. Rend.*, **114** (1893), 1465—1468.

[2] 铁摩辛柯、古地尔著，«弹性理论»，徐芝纶、吴永祯译，人民教育出版社 (1965).

[3] 武际可、王敏中，«弹性力学引论»，北京大学出版社 (1981).

[4] 钱伟长、叶开沅，«弹性力学»，科学出版社 (1980).

[5] Mindlin, R. D., Force at a point in the interior of a semi-infinite solid, *Physics*, **7** (1936).

[6] Лурье А. И., *Пространственные Задачи Теории Упругости*, ГИТЛ (1955).

[7] Melan, E., Der spannungszustand der durch eine einzelkroft in beanspruchten halbscheibe, *ZAMM*, **12** (1932), 343—346.

[8] 森口繁一，«平面弹性论»，上海科学技术出版社 (1962), 79—80.

[9] 徐秉业，«弹性与塑性力学»，例题与习题，机械工业出版社 (1981).

[10] Hadamard, J. S., Le Probléme de Cauchy et Les Équations Eux' Derivées Partielles Lineaires Hyperboliques, Paris (1932).

[11] 盖尔芳特，U. M., Г. E. 希洛夫，«广义函数»，科学出版社 (1965).

Application of the Finite Part of a Divergent Integral in the Theory of Elasticity

Wang Min-zhong

(*Department of Mechanics, Peking University, Beijing*)

Abstract

Using the finite part of a divergent integral, we transform Kelvin's solutions, Boussinesq's solution and Mindlin's solutions in the three-dimensional theory of elasticity into corresponding solutions in the two-dimensional theory. Besides, its application in plane problems is also given.