

文章编号: 1000-0887(2004) 10-1033-09

# 求解粘性流体和热迁移联立方程的 迎风局部微分求积法\*

A·S·J·阿尔赛夫<sup>1,3</sup>, 朱正佑<sup>1,2</sup>

(1. 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;

2. 上海大学 数学系, 上海 200436;

3. 巴士拉大学 数学系, 伊拉克)

(周哲玮推荐)

**摘要:** 微分求积方法(DQM)已成功地应用于数值求解流体力学中的许多问题,但是已有的工作大多限于正规区域的流动问题,同时缺少用迎风机制来描述流体流动的对流特性.该文对一个不规则区域中的不可压缩层流和热迁移的耦合问题给出了一种具有迎风机制的局部微分求积方法,对通过边界和坐标不平行的收缩管道中的流体,只用少数网格点得到了比较好的数值解.和有限差分方法(FDM)相比较,这一方法具有计算工作量少、存储量小和收敛性好等优点.

**关键词:** 迎风局部微分求积方法; N-S 方程; 热方程

**中图分类号:** O357.1; O241.82 **文献标识码:** A

## 引 言

在许多工程和物理学中,非线性偏微分方程的数值解起着重要的作用.有限差分方法(FDM)和有限单元方法是最常见的两种有效的数值方法.但是,为了得到适当精度的解,在使用这些方法时需要使用大量的网格点,因此,需要比较大的工作量和存储量. Bellman<sup>[1,2]</sup> 等人在 1971 年提出了一种微分求积方法(DQM),因为在这种方法中,所有网格点上的信息都被用来拟合在各网格点处的导数,所以只要使用很少的网格点就能得到较高精度的数值解.此外,由于 DQM 具有使用方便,网格步长选取灵活等优点,近年来这一方法广泛受到了人们的重视.早期, DQM 方法仅局限于求解正规区域的问题,如矩形、平行四边形或者圆形区域、同心圆形区域等,最近使用单元和映射的技巧, DQM 已被推广到求解复杂区域的问题<sup>[3~8]</sup>. 但是为了使用这种技巧,需要一些额外的计算量.

在文献[9]、[10]和[11]中使用 DQM 方法,同时在[12]、[13]和[14]中使用了其他数值方法,对不同情形下的和热迁移耦合的不可压层流问题进行了讨论. 本文考查不可压的流场在

\* 收稿日期: 2003\_07\_10; 修订日期: 2004\_06\_15

基金项目: 上海市重点学科建设资助项目

作者简介: A. S. J. Al\_Saif(1964—), 男, 伊拉克人, 博士(E-mail: ajsaif9@hotmail.com);

朱正佑(1937—), 教授(联系人. Tel: + 86\_21\_56331454; Fax: + 86\_21\_56380560; E-mail: chjcheng@yc.shu.edu.cn).

无势且与温度有关的外力场作用下的流动问题。因为我们的求解区域是由和坐标轴不平行的收缩直线围成的不规则区域, 所以使用 DQM 来求解这个问题将会遇到一些困难。为了克服这一困难, 本文提出了一种不需要增加工作量的局部化方法。此外, 在 DQM 中, 我们还引入了迎风机制来有效地模拟流体和温度中的对流效应, 经过这种改进后的 DQM 方法, 我们称为 ULDQM。利用 ULDQM 本文求解了不规则区域中的不可压层流和热迁移的耦合问题, 得到了很好的数值解。结果表明, ULDQM 比传统的差分格式具有工作量少、存储量小及较好的收敛性等优点。

## 1 局部迎风微分求积法(ULDQM)

### 1.1 微分求积方法

DQM 的本质, 在于用整个区域上所有网格点处的函数值的线性组合, 来近似表示在网格点处函数的各阶导数。对区域  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$  ( $a$  和  $b$  是固定的) 上的光滑函数  $f(x, y)$ ,  $f$  在点  $(x_i, y_j)$  上对  $x$  的  $r$  阶偏导数以及  $f$  对  $y$  的  $s$  阶偏导数近似表示如下:

$$\frac{\partial^r f(x_i, y_j)}{\partial x^r} = \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(r)} f(x_k, y_j) \quad (i = 1, 2, \dots, N; r = 1, 2, \dots, N-1), \quad (1a)$$

$$\frac{\partial^s f(x_i, y_j)}{\partial y^s} = \sum_{l=1}^M A_{jl}^{(s)} f(x_i, y_l) \quad (j = 1, 2, \dots, M; s = 1, 2, \dots, M-1), \quad (1b)$$

其中  $N, M$  分别是  $x$  方向和  $y$  方向网格点的个数,  $A_{ik}^{(r)}$  和  $A_{jl}^{(s)}$  分别是加权的系数, 由下式确定

$$A_{ik}^{(1)} = \frac{C^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_k) C^{(1)}(x_k)} \quad (i, k = 1, 2, \dots, N; k \neq i), \quad (2a)$$

$$A_{jl}^{(1)} = \frac{C^{(1)}(y_j)}{(y_j - y_l) C^{(1)}(y_l)} \quad (j, l = 1, 2, \dots, M; l \neq j), \quad (2b)$$

其中  $C^{(1)}(x_i) = \prod_{\mu=1, \mu \neq i}^N (x_i - x_\mu)$ ,  $C^{(1)}(y_j) = \prod_{\mu=1, \mu \neq j}^M (y_j - y_\mu)$ 。

当  $r = 2, \dots, N-1$ ;  $s = 2, \dots, M-1$  时, 有

$$A_{ik}^{(r)} = r \left[ A_{ii}^{(r-1)} A_{ik}^{(1)} - \frac{A_{ik}^{(r-1)}}{x_i - x_k} \right] \quad (i, k = 1, 2, \dots, N; k \neq i), \quad (3a)$$

$$A_{jl}^{(s)} = s \left[ A_{jj}^{(s-1)} A_{jl}^{(1)} - \frac{A_{jl}^{(s-1)}}{y_j - y_l} \right] \quad (j, l = 1, 2, \dots, M; l \neq j); \quad (3b)$$

当  $i = k, j = l$  时, 有

$$A_{ii}^{(r)} = - \sum_{\mu=1, \mu \neq i}^N A_{i\mu}^{(r)} \quad (i = 1, 2, \dots, N; 1 \leq r \leq (N-1)),$$

$$A_{jj}^{(s)} = - \sum_{\mu=1, \mu \neq j}^M A_{j\mu}^{(s)} \quad (j = 1, 2, \dots, M; 1 \leq s \leq (M-1)).$$

当网格点为均匀分布时, 公式(2)简化为

$$A_{ik}^{(1)} = (-1)^{i+k} \frac{(i-1)!(N-i)!}{\Delta x (i-k)(k-1)!(N-k)!} \quad (i, k = 1, 2, \dots, N; k \neq i), \quad (4a)$$

$$A_{jl}^{(1)} = (-1)^{j+l} \frac{(j-1)!(M-j)!}{\Delta y (j-l)(l-1)!(M-l)!} \quad (j, l = 1, 2, \dots, M; l \neq j); \quad (4b)$$

其中

$$\Delta x = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y = y_j - y_{j-1}.$$

### 1.2 具有迎风机制的局部 DQM 方法

显然, 当区域不规则时上述传统的微分求积法则很难实现. 此外, 对流体流动问题, 迎风机制是十分重要的, 但在传统的 DQM 中缺少这种机制. 下面我们引进一种适用于不正规区域的具有迎风机制的局部 DQM 方法. 考察一个不规则区域  $\Omega$ , 用  $\Delta x = \Delta y = \Delta$  的均匀网格点剖分  $\Omega$ . 这时在一个坐标方向上的两个内部节点间的距离为  $\Delta$ , 而边界结点到相邻的内部结点的距离将可能小于  $\Delta$ . 和传统的 DQM 方法不同, 现在不是用全部沿  $x$  轴或  $y$  轴方向上的结点处的函数值, 而是用部分结点上函数值的加权线性组合来近似表示沿  $x$  方向或  $y$  方向的结点处的导数. 即  $f(x, y)$  在结点  $(i, j)$  处沿  $x$  方向或  $y$  方向的导数, 近似地表示成结点  $(i, j)$  附近的  $p$  个结点沿  $x$  方向或  $y$  方向处函数值的线性组合

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^r} \right|_{ij} = \sum_{k=1}^p A_{\sigma_1 k}^{(r)} f(i - \sigma_1 + k, j) \quad (i = 1, 2, \dots, N; r = 1, 2, \dots, N - 1), \quad (5a)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^s} \right|_{ij} = \sum_{l=1}^p A_{\sigma_2 l}^{(s)} f(i, j - \sigma_2 + l) \quad (j = 1, 2, \dots, M; s = 1, 2, \dots, M - 1), \quad (5b)$$

其中,  $\sigma_n (n = 1, 2)$  是一个正整数,  $\sigma_n \in [1, p]$ .

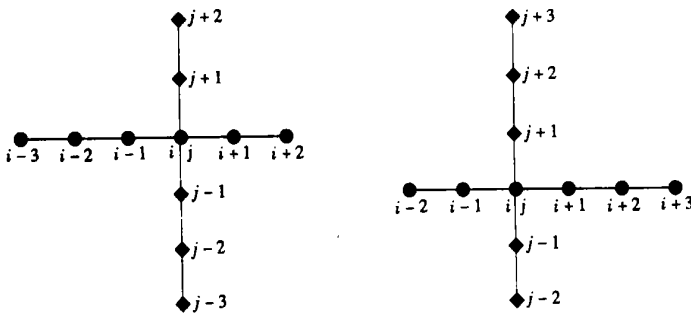
为了引进迎风机制, 按  $(i, j)$  处流体的水平速度  $u_{ij}$  和垂直速度  $v_{ij}$  的正负号,  $\sigma_n$  将由下面公式确定. 即, 当  $p$  是偶数时, 有

$$\sigma_1(\sigma_2) = \begin{cases} \frac{p}{2} + 1, & \text{当 } u_{ij} \geq 0 (v_{ij} \geq 0) \text{ 时,} \\ \frac{p}{2}, & \text{当 } u_{ij} < 0 (v_{ij} < 0) \text{ 时;} \end{cases}$$

当  $p$  是奇数时, 有

$$\sigma_1(\sigma_2) = \begin{cases} \frac{p+1}{2} + 1, & \text{当 } u_{ij} \geq 0 (v_{ij} \geq 0) \text{ 时,} \\ \frac{p+1}{2} - 1, & \text{当 } u_{ij} < 0 (v_{ij} < 0) \text{ 时;} \end{cases}$$

(参看图 1).



( I )  $\sigma = 4$ , 且  $u_{ij} \geq 0, v_{ij} \geq 0$       ( II )  $\sigma = 3$ , 且  $u_{ij} < 0, v_{ij} < 0$

图 1 ULDDQM 的网格点模型 ( $p = 6$ )

式(5)中的加权系数  $A_{\sigma_1 k}^{(1)}, A_{\sigma_1 k}^{(r)}, A_{\sigma_2 l}^{(1)}$  和  $A_{\sigma_2 l}^{(s)}$  可由  $p$  个结点的坐标确定, 它们的计算公式类似于(2)和(3), 有

$$A_{\sigma k}^{(1)} = \frac{C^{(1)}(x_\sigma)}{(x_\sigma - x_k) C^{(1)}(x_k)} \quad (k = 1, 2, \dots, p), \quad (6a)$$

$$A_{q_l}^{(l)} = \frac{C^{(l)}(y_\sigma)}{(y_\sigma - y_l) C^{(l)}(y_l)} \quad (l = 1, 2, \dots, p), \tag{6b}$$

$$A_{q_k}^{(r)} = r \left[ A_{\sigma\sigma}^{(r-1)} A_{q_k}^{(l)} - \frac{A_{q_k}^{(r-1)}}{x_\sigma - x_k} \right] \quad (k = 1, 2, \dots, p; r \geq 2), \tag{6c}$$

$$A_{q_l}^{(s)} = s \left[ A_{\sigma\sigma}^{(s-1)} A_{q_l}^{(l)} - \frac{A_{q_l}^{(s-1)}}{y_\sigma - y_l} \right] \quad (l = 1, 2, \dots, p; s \geq 2); \tag{6d}$$

其中,  $r = 1, 2, \dots, N - 1; s = 1, 2, \dots, M - 1$ , 并且

$$A_{\sigma\sigma}^{(r)} = - \sum_{\mu=1, \mu \neq \sigma}^p A_{q_\mu}^{(r)}, \quad 1 \leq r \leq (N - 1),$$

$$A_{\sigma\sigma}^{(s)} = - \sum_{\mu=1, \mu \neq \sigma}^p A_{q_\mu}^{(s)}, \quad 1 \leq s \leq (M - 1),$$

$$C^{(1)}(x_\sigma) = \prod_{\mu=1, \mu \neq \sigma}^p (x_\sigma - x_\mu), \quad C^{(1)}(y_\sigma) = \prod_{\mu=1, \mu \neq \sigma}^p (y_\sigma - y_\mu) \quad (\sigma = 1, \dots, p) \cdot$$

显然, 当结点  $(i, j)$  的位置接近边界点时, 可能没有足够的结点来引进迎风机制, 所以将会遇到一些困难. 为了克服这一困难, 下面校正  $\sigma_n$  使得(5) 中的  $p$  个结点不超出流动区域, 修正后的  $\sigma_n$  有如下公式:

$$\sigma_1 = \begin{cases} \sigma_1 - 1, & \text{当 } (i - \sigma_1 + 1, j) \notin \Omega, \\ \sigma_1 + 1, & \text{当 } (i - \sigma_1 + p, j) \notin \Omega, \\ \sigma_2 - 1, & \text{当 } (i, j - \sigma_2 + 1) \notin \Omega, \\ \sigma_2 + 1, & \text{当 } (i, j - \sigma_2 + p) \notin \Omega. \end{cases}$$

这种离散方法称为具有迎风机制的局部 DQ 方法, 记为“ULDQM”.

## 2 数学模型

考察一个不可压层流和热迁移的耦合问题. 在无量纲形式下, 用涡函数  $\omega(x, y)$  和流函数  $\phi(x, y)$  表示的 NS 方程和温度的  $T(x, y)$  的控制方程为

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = F(\phi, \omega, T, x, y), \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \omega = 0, \tag{8}$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v = - \frac{\partial \phi}{\partial x}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0, \tag{10}$$

其中,  $u$  和  $v$  是速度分量,  $F$  是由于力场无势而引起的与温度有关的函数,  $Re$  是雷诺数.

本文所讨论的流场  $\Omega$  如图 2 所示. 假定在管子入口  $FA$  处, 流体的温度和速度分别是  $T(x, y) = 1, v = 0, u = 3(4 - y^2)/16$ . 在出口  $DE$  处, 流体的温度  $T(x, y) = 0$ , 并且流体是充分发展的, 在管壁  $AB, BC, CD$  处流体是绝热的, 并且速度没有滑移. 由于问题关于  $y = 0$  是对称的, 所以我们只需对  $y \geq 0$  的区域求解问题, 于是我们有如下边界条件:

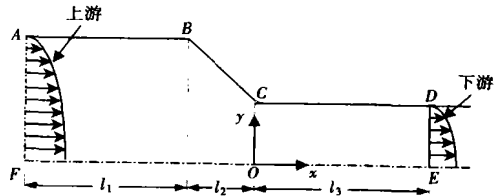


图 2 流场的示意图

我们有如下边界条件:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi = 0, u = 0, v = 0, \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \omega = -\frac{\partial u}{\partial y}, & \text{在 } AB \text{ 和 } CD \text{ 处} \\ \phi = 1, u = 0, v = 0, \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \omega = \frac{\partial v}{\partial x}, & \text{在 } BC \text{ 处,} \\ v = 0, T = 0, \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, & \text{在 } DE \text{ 处,} \\ \phi = 0, \omega = 0, v = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial T}{\partial y} = 0, & \text{在 } EF \text{ 处,} \\ v = 0, T = 1, \phi = (12y - y^3)/16, u = 3(4 - y^2)/16, \omega = 3y/8, & \text{在 } FA \text{ 处.} \end{array} \right. \quad (11)$$

我们的控制方程由方程(7) ~ (10) 及边界条件(11) 构成。本文的目的是寻求当时间  $t \rightarrow \infty$  时控制方程的稳态解。

### 3 数值结果

在本文中,对时间变量采用向后差分格式,对空间变量采用 ULDQM 进行离散,得到如下公式:

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_{ij}^{n+1} - \omega_{ij}^n}{\Delta t} + \sum_{k=1}^{\sigma_1-1} (u_{ij}^n A_{\sigma_1 k}^{(1)} - A_{\sigma_1 k}^{(2)}/Re) \omega^{n+1}(i - \sigma_1 + k, j) + \\ & \sum_{k=\sigma_1}^p (u_{ij}^n A_{\sigma_1 k}^{(1)} - A_{\sigma_1 k}^{(2)}/Re) \omega^n(i - \sigma_1 + k, j) + \\ & \sum_{l=1}^{\sigma_2-1} (v_{ij}^n A_{\sigma_2 l}^{(1)} - A_{\sigma_2 l}^{(2)}/Re) \omega^{n+1}(i, j - \sigma_2 + l) + \\ & \sum_{l=\sigma_2}^p (v_{ij}^n A_{\sigma_2 l}^{(1)} - A_{\sigma_2 l}^{(2)}/Re) \omega^n(i, j - \sigma_2 + l) = F_{ij}^n, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{T_{ij}^{n+1} - T_{ij}^n}{\Delta t} + \sum_{k=1}^{\sigma_1-1} (u_{ij}^n A_{\sigma_1 k}^{(1)} - A_{\sigma_1 k}^{(2)}) T^{n+1}(i - \sigma_1 + k, j) + \\ & \sum_{k=\sigma_1}^p (u_{ij}^n A_{\sigma_1 k}^{(1)} - A_{\sigma_1 k}^{(2)}) T^n(i - \sigma_1 + k, j) + \\ & \sum_{l=1}^{\sigma_2-1} (v_{ij}^n A_{\sigma_2 l}^{(1)} - A_{\sigma_2 l}^{(2)}) T^{n+1}(i, j - \sigma_2 + l) + \\ & \sum_{l=\sigma_2}^p (v_{ij}^n A_{\sigma_2 l}^{(1)} - A_{\sigma_2 l}^{(2)}) T^n(i, j - \sigma_2 + l) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\sum_{k=1}^p A_{\sigma_1 k}^{(2)} \phi^{n+1}(i - \sigma_1 + k, j) + \sum_{l=1}^p A_{\sigma_2 l}^{(2)} \phi^{n+1}(i, j - \sigma_2 + l) = -\omega_{ij}^{n+1}, \quad (14)$$

$$u_{ij}^{n+1} = \sum_{l=1}^p A_{\sigma_2 l}^{(1)} \phi^{n+1}(i, j - \sigma_2 + l), \quad v_{ij}^{n+1} = -\sum_{k=1}^p A_{\sigma_1 k}^{(1)} \phi^{n+1}(i - \sigma_1 + k, j), \quad (15)$$

其中,  $(i, j)$  是区域内部的所有网格点。边界点处的导数则采用公式(6) 进行离散。从而可以得到边界条件(11) 的离散方程。

在计算中,我们取  $F = \alpha T$ , 其中  $\alpha > 0$  是常数,表示没有势的力场所引起的项(在[9] 和[11] 中取  $F = \alpha(\partial T/\partial x)$ ), 就得到通常的 Boussinesq 模型。图 2 中  $l_1 = l_3 = 2, l_2 = 1, BC$  的斜率为  $-1/2$ 。空间网格距离  $\Delta x = \Delta y = \Delta = 1/4$ , 取  $p = 5$  或  $6$ 。对不同雷诺数  $Re$  和  $\alpha >$

0 的问题进行了数值计算。在计算中对方程(12)和(13)我们采用 Gauss-Seidel 迭代法求解, 对方程(14)采用 SOR 方法求解, 其中阻尼因子  $0 < \omega < 1$ 。图3和图4给出了不同雷诺数  $Re$  时的流线和等温线, 图5给出了流线随  $\alpha$  变化的情况。从这些图可以看到: 当雷诺数很小时, 流场中出现了旋涡, 随着雷诺数的增大, 这些旋涡将会消失。为了和通常的三点差分格式相比较, 表1给出了两种方法的叠代次数和最大绝对误差。图6给出了根据两种方法得到的中心线处速度分量  $u$  的轨线。表2给出了当  $p = 6$  时达到稳态解所需的迭代次数。应该指出, 当  $Re > 100$  时, 传统的差分格式收敛十分缓慢, 或者不收敛, 而采用 ULQDM 时, 直到雷诺数  $Re = 700$  时仍然是收敛的。表3给出了管道收缩部分中心线处的速度分量  $u$  的值。由表3看到: 当  $Re = 30$  或  $50$  时, 流体在  $x = 1.75$  处达到充分发展, 而当  $Re = 70$  或  $100$  时, 流体在  $x = 1.50$  处达到充分发展。在上面的所有计算中迭代精度  $\epsilon = 10^{-5}$ ,  $1 < Re < 800$ ,  $0 < \alpha < 6$

表1 ULQDM 和 FDM 的迭代次数和最大绝对误差的比较

方法	$\max  \omega $	$\max  T $	$\max  \phi $	迭代次数
6点 ULQDM	9.953 976E-06	2.384 186E-07	3.874 302E-07	4 684
5点 ULQDM	9.894 371E-06	2.533 197E-07	5.364 418E-07	4 450
3点 FDM	9.953 976E-06	3.576 279E-07	6.556 511E-07	4 413

表2 达到稳态解所需的迭代次数

$Re$	5	10	40	100	200	300	500	700
迭代次数 ( $\Delta t = 0.025$ )	301	423	458	517	612	654	674	684
迭代次数 ( $\Delta t = 0.0025$ )	2 692	3 573	4 188	4 447	5 256	5 480	5 645	5 719

表3 对不同的  $Re$ , 在收缩平面中心线上速度分量  $u$  的值

$Re$	0.000 0	0.250 0	0.500 0	0.750 0	1.000 0	1.250 0	1.500 0	1.750 0	2.000 0
30	0.912 40	1.033 96	1.132 42	1.187 31	1.216 21	1.224 80	1.225 46	<u>1.225 60</u>	1.225 60
50	0.922 79	0.976 72	1.013 63	1.032 48	1.047 44	1.058 86	1.068 45	<u>1.068 56</u>	1.068 56
70	0.914 13	0.981 90	1.043 39	1.086 72	1.125 86	1.154 62	<u>1.183 98</u>	1.183 98	1.183 98
100	0.929 19	0.984 11	1.031 89	1.064 24	1.094 54	1.123 77	<u>1.149 08</u>	1.149 08	1.149 08

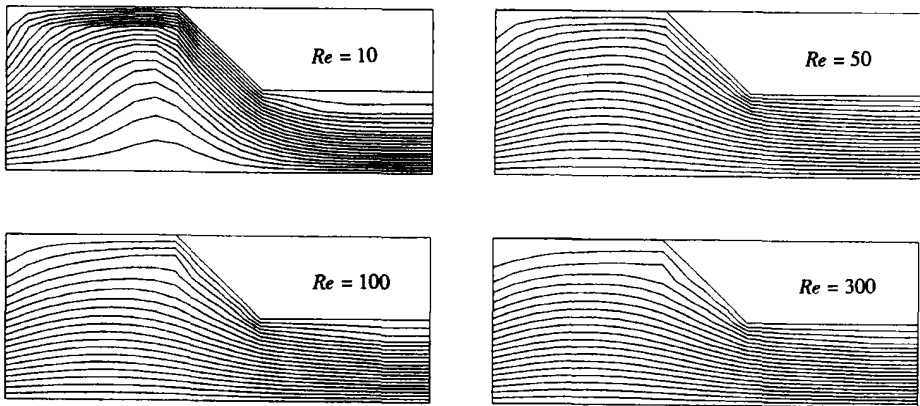


图3 对不同的  $Re$  和  $\alpha = 0.1$  流体的流线图

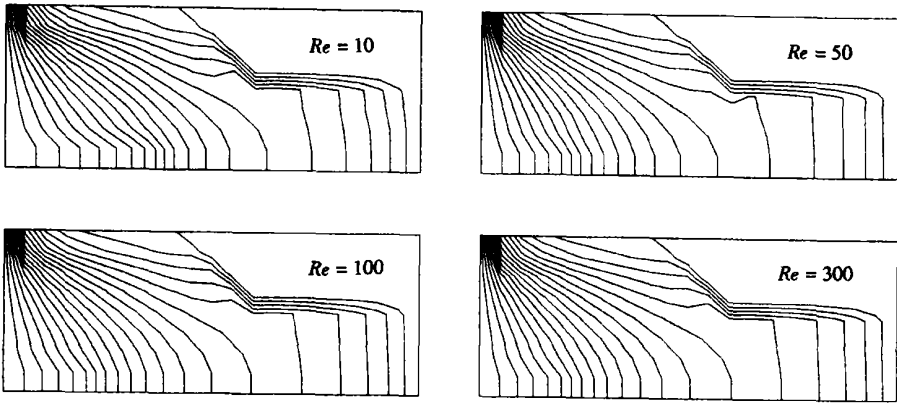


图 4 对不同的  $Re$  和  $\alpha = 0.1$  的等温线图

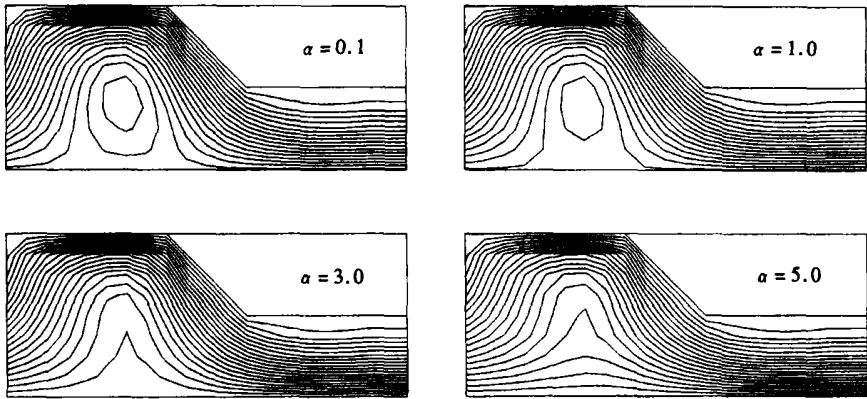


图 5 当  $Re = 4$  时对不同  $\alpha$  的流线图

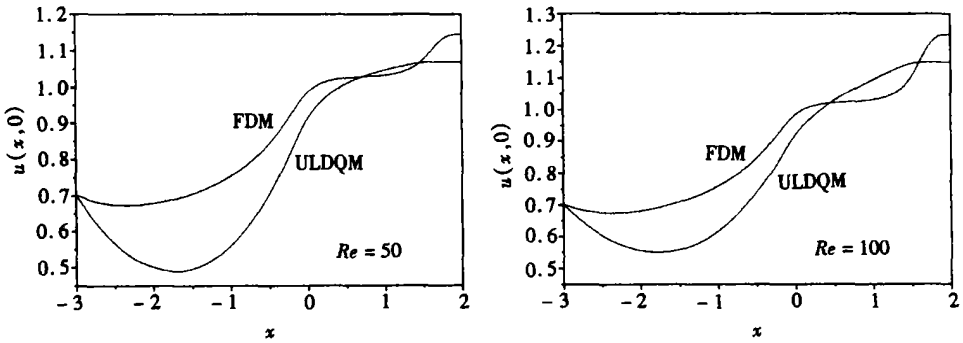


图 6 在中心线处  $u$  的轨线

## 4 结 论

为了求解不规则区域中的二维不可压层流和热迁移的耦合问题, 本文给出了一种具有迎风机制的局部微分求积法(ULDQM)。利用这种方法, 对收缩管道中的充分发展的流体进行了成功的数值计算。结果表明 ULDQM 比传统的差分方法具有工作量少, 存储量小及较好的收敛性等优点, 适用于较大雷诺数的流动问题和非正规区域问题的数值计算。因此它具有比三

点差分格式高的效率·

[参 考 文 献]

- [1] Bellman R, Casti J. Differential quadrature and long\_term integration[J]. J Math Anal Appl, 1971, **34**: 235—238.
- [2] Bellman R, Kashef G, Casti J. Differential quadrature: A technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations[J]. J Comput Phys, 1972, **10**(1): 40—52.
- [3] Bert C W, Malik M. The differential quadrature method for irregular domains and application to plate vibration[J]. Internat J Mech Sci, 1996, **38**(6): 589—606.
- [4] Lam S S. Application of the differential quadrature method to two\_dimensional problems with arbitrary geometry[J]. Compu Struct, 1993, **47**(3): 459—464.
- [5] Han J B, Liew K M. An eight\_node curvilinear differential quadrature formulation for reissner/mindlin plates[J]. Compu Methods Appl Mech Engrg, 1997, **141**(3/4): 265—280.
- [6] Wang X W, Guh Z. Static analysis of frame structures by the differential quadrature element method [J]. Internat J Numer Methods Engrg, 1997, **40**(4): 759—772.
- [7] Chen W, Alfred G, Bert C W. A new approach to the differential quadrature method for fourth\_order equation[J]. Internat J Numer Methods Engrg, 1997, **40**(11): 1941—1956.
- [8] Shu C, Chen W, Du H. Free vibration analysis of curvilinear quadrilateral plates by the differential quadrature method[J]. J Comput Phys, 2000, **163**(2): 452—466.
- [9] Shu C, Xue H, Zhu Y D. Numerical study of natural convection in an eccentric annulus between a square outer cylinder and a circular inner cylinder using DQ method[J]. Internat J Heat and Mass Transfer, 2001, **44**(17): 3321—3333.
- [10] Shu C. Application of differential quadrature method to simulate natural convection in a concentric annulus[J]. Internat J Numer Methods Fluids, 1999, **30**(8): 977—993.
- [11] Shu C, Xue H. Comparison of two approaches for implementing stream function boundary conditions in DQ simulation of natural convection in a square cavity[J]. Internat J Heat and Fluid Flow, 1998, **19**(1): 59—68.
- [12] Liaqat A, Baytas A C. Conjugate natural convection in a square enclosure containing volumetric sources[J]. Internat J Heat and Mass Transfer, 2001, **44**(17): 3273—3280.
- [13] Papanicolaou E, Belessioties V. Transient natural convection in a cylindrical enclosure at high Rayleigh numbers[J]. Internat J Heat and Mass Transfer, 2002, **45**(7): 1425—1444.
- [14] Lin W X, Armfield S W. Natural convection cooling of rectangular and cylindrical containers[J]. Internat J Heat and Fluid Flow, 2001, **22**(1): 72—81.



# Upwind Local Differential Quadrature Method for Solving Coupled Viscous Flow and Heat Transfer Equations

A. S. J. Al\_Saif<sup>1,3</sup>, ZHU Zheng\_you<sup>1,2</sup>

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,  
Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China;

2. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200436, P. R. China;

3. Department of Mathematics, University of Basrah, Iraq)

**Abstract:** The differential quadrature method (DQM) has been applied successfully to solve numerically many problems in the fluid mechanics. But it is only limited to the flow problems in regular regions. At the same time, here is no upwind mechanism to deal with the convective property of the fluid flow in traditional DQ method. A local differential quadrature method owning upwind mechanism (ULDQM) was given to solve the coupled problem of incompressible viscous flow and heat transfer in an irregular region. For the problem of flow past a contraction channel whose boundary does not parallel to coordinate direction, the satisfactory numerical solutions were obtained by using ULDQM with a few grid points. The numerical results show that the ULDQM possesses advantages including well convergence, less computational workload and storage as compared with the low\_order finite difference method.

**Key words:** upwind local DQM; Navier-Stokes equation; heat equation