

# 高阶非线性动力系统全局分析 ——胞胞映射法应用

徐皆苏 徐健学

(美国伯克利加利福尼亚大学) (西安交通大学)

(1985年1月5日收到)

## 摘 要

本文阐述高阶非线性动力系统全局分析和应用胞胞映射进行分析的一般特点, 以及胞胞映射方法对于高阶系统全局分析的有效性; 并具体进行了一个弱耦合 van der Pol 振荡系统的全局分析, 确定系统具有两个稳定的极限环, 并确定了整个四维空间被分为两个部分, 这两部分分别是沿两个极限环运动的渐近稳定域 (吸引域)。

## 一、引 言

近年来, 非线性振荡领域中, 一种新的方法——胞胞映射方法<sup>[1-5]</sup>被提出来了。在最初的一些应用中, 已经表明这方法具有很大的潜力去更有效地确定非线性动力系统的全局特性。

非线性动力系统的全局分析是一个重要、复杂的问题, 对于维数大于2的系统更加困难。而应用胞胞映射方法则能有效地解决。

近20多年来, 耦合非线性振荡力学受到很大注意。在保守系统情况下, R. M. Rosenberg 等学者持续研究了被称为非线性正规型的周期运动的性质, 其工程意义在于这种系统受激振动的共振恰发生于无激励系统的非线性正规型周期运动的邻近<sup>[6,7]</sup>。

耦合非线性振荡是高阶动力系统, 在实际领域中也有广泛应用, 如生物学中, 细胞内一种化学物质的浓度的振荡和扩散问题<sup>[8]</sup>。

$$\ddot{x} + x - \mu(1 - X^2)\dot{x} = \nu Ax + \sigma B\dot{x} \quad (1.1)$$

式中

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}$$
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\left(1 + \frac{\eta}{\nu}\right) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\mu \ll 1$ ,  $\frac{\nu}{\mu}$ 、 $\frac{\sigma}{\mu}$  是扩散耦合系数,  $\frac{\eta}{\mu}$  是与非耦合系统频率差有关的系数。

此问题是一个弱耦合 van der Pol 振荡系统的问题, 它是一个非保守系统. 对于它, 诸如周期运动的存在、稳定性, 渐近稳定域 (吸引域) 都是重要的全局性质. 文献[9]曾用摄动方法研究这个问题, 确定了系统的稳定和不稳定的“锁相”周期运动, 但没有讨论渐近稳定域.

本文阐述应用胞胞映射方法解决高阶非线性动力系统全局分析问题, 确定周期运动、渐近稳定域的一般方面, 并实例分析(1.1)的特殊情况:

$$\ddot{x} + x - \mu(1 - X^2)\dot{x} = \nu Ax \quad (1.2)$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\left(1 + \frac{\eta}{\nu}\right) \end{bmatrix}$$

$$\mu = 0.2 \quad \nu = 0.1 \quad \eta = 0.04$$

第二节阐述高阶非线性动力系统全局分析的一般方面和拓朴考虑. 第三节阐述胞胞映射方法解决高阶系统问题的概念. 第四节系统(1.2)的全局分析. 第五节给出数值积分检验的结果.

## 二、高阶系统分析和拓朴考虑

由于两个振荡的耦合, 非线性动力系统(1.1)、(1.2)需要在4维状态空间(相空间) ( $R^4$ ) 中进行描述, 分析. 当耦合充分小时, 可以从(1.1)或(1.2)的非耦合振荡(两个独立的 van der Pol 振荡) 系统出发, 在较少维数的空间中给出近似的描述.

(1.1)或(1.2)的非耦合振荡系统

$$\ddot{x} + x - \mu(1 - X^2)\dot{x} = 0 \quad (2.1)$$

是两个相同的简单 van der Pol 振荡. 对于小  $\mu$ , 其极限环接近于相平面  $x_i - \dot{x}_i$  中半径为2中心在原点的圆. 由于非耦合, 两个沿各自极限环的振荡具有相同的周期和由初值决定的相位差. 选振幅  $R_i$  (非常数) 和相角  $\theta_i$  (非常数) 为坐标 ( $i=1, 2$ ), 略去  $R_i$  对于圆半径2的偏差, 则非耦合振荡系统的运动可用在  $\theta_1$  和  $\theta_2$  张成的圆纹环面  $T^2 = S^1 \times S^1$  上的流动

$$\dot{\theta}_1 = -1, \quad \dot{\theta}_2 = -1, \quad R_1, R_2 = 2 + O(\mu) \quad (2.2)$$

描述. 这流动沿  $\theta_1 = \theta_2$  方向. 所有的解除  $R_1 = R_2 = 0$  外, 在  $t \rightarrow \infty$  时都趋向于此圆纹环面, 而从环面出发的解则始终留在环面上. 这环面称为不变的圆纹环面.

在充分小的耦合下, 根据[10]、[11]关于正规双曲不变流形理论, 依然存在这样一个圆纹环面, 它保持光滑并接近于非耦合振荡系统的不变圆纹环面, 而仅会改变其形状和位置. 这种拓朴结构要求轨道在  $t \rightarrow \infty$  时, 渐近地趋近于2维圆纹环面. 在这面上, 轨道的样式也不同于非耦合系统情况.

应用 Poincaré 映射概念<sup>[9, 11]</sup>, 可以进一步缩减维数, 由相差  $\phi = \theta_1 - \theta_2$  一维变量来决定圆纹环面上一个极限环, 即“锁相”周期运动. 文献[9]由此确定了稳定的和不稳定的极限环的个数、相差与参数  $\mu, \nu, \sigma, \eta$  的关系.

这种近似分析, 没有具体地给出极限环, 从而未能确定  $R_i$  对于2的偏差情况. 它也没有给出沿各极限环周期运动的周期.

为了在这些方面得到进一步的结果, 本文阐述在高维状态空间 ( $R^N$ ) 中对耦合的非线性

动力系统全局分析描述的一般方面。

对于一个非线性动力系统

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{x} &= [x_1, x_2, \dots, x_M]^T \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

引入状态变量  $u_1, u_2, \dots, u_N$ , ( $N=2M$ ), 使

$$\left. \begin{aligned} u_i &= x_j & (j=1, 2, \dots, M, i=2j-1) \\ u_i &= \dot{x}_j = v_j & (j=1, 2, \dots, M, i=2j) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

则非线性动力系统可由

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{F}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u} &= [u_1, u_2, \dots, u_N]^T \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

描述。对应的空间是一  $N$  维状态空间  $R^N$ 。这空间中由矢量  $\mathbf{u}$  决定的一个代表点  $P$  的运动可描述上述非线性系统的运动。这个点在  $R^N$  中的轨道就是这个系统的轨线。

如果  $R^N$  中一曲线是封闭曲线, 则它的所有 2 维子空间  $u_1-u_2, u_1-u_3, \dots, u_{N-1}-u_N$  中的投影也都是封闭曲线。反之如果一曲线在所有 2 维子空间中投影是封闭曲线, 则它是  $R^N$  中的一条封闭曲线。这种封闭曲线称为环, 不论其形状怎样, 它们都是与圆拓扑等价的。

非线性动力系统的一个周期运动, 如果存在, 可用代表点沿一个环(线)的运动来描述, 即与一环(线)相对应。

对应于一个周期运动的环(线)在相平面  $u_i-u_{i+1}(x_j-\dot{x}_j(v_j))$  上的投影即系统所包含的各实际周期运动的相轨线, 沿这些相轨线的运动即各实际周期运动。它们具有实际的物理含义。所有这些具体的周期运动都具有相同的周期和因初始条件不同而存在的相位差。亦即它们必然都是“锁相”的周期运动。

如果从  $R^N$  中一个区域  $S \in R^N$  中任一点出发, 系统的代表点的轨线恒渐近地趋近于某一个环(线), 而由这个环(线)上任一点出发时恒留在这环(线)上, 则这个环(线)称为极限环(线), 域  $S$  称为沿此极限环的周期运动的渐近稳定域或吸引域。

显然, 上述关于  $N$  维系统的叙述可以用于前述耦合非线性振荡系统(1.1)和(1.2); 这时  $N=4$ 。

### 三、高阶非线性动力系统全局分析的 胞胞映射概念和方法

非线性动力系统全局分析的胞胞映射概念和方法的理论基础是由点点映射支配的系统或由常微分方程支配的系统的胞胞映射理论。用这种方法我们可以很有效地确定一个非线性动力系统的周期运动和在周期运动是稳定的情况下, 确定它们的渐近稳定域(吸引域)。

在胞胞映射方法中, 一个  $N$  维状态空间  $R^N$  被分成一群胞。每一个胞是一个边长为  $h_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) 的  $N$  维长方体。每个胞由  $N$  个整数  $z_i$  决定, 这  $N$  个整数构成一个胞矢量  $\mathbf{Z}$ , 它们与状态变量  $u_i$  的关系是:

$$\left(z_i - \frac{1}{2}\right)h_i \leq u_i < \left(z_i + \frac{1}{2}\right)h_i \quad (3.1)$$

这样, 整数变量  $z_1, z_2, \dots, z_N$  张成一  $N$  维胞空间; 对应于连续的  $N$  维状态空间  $R^N$ 。

分析常微分方程描述的系统时, 可以将微分方程(2.5)转换为 Poincaré 点点映射的形式

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{G}(\mathbf{x}(n)) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (3.2)$$

式中  $\mathbf{x}(n)$  是具有实数元素的  $N$  维矢量,  $n=1, 2, \dots$  是与时间对应的指标. 再通过一个离散化过程, 将点点映射的系统(3.2)转换为由一个  $N$  维胞空间到一个  $N$  维胞空间的胞胞映射的系统

$$\mathbf{Z}(n+1) = \mathbf{C}(\mathbf{Z}(n)) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

式中  $\mathbf{Z}(n)$  是具有整数元素的  $N$  维胞矢量.  $\mathbf{Z}(n+1)$  是  $\mathbf{Z}(n)$  的象胞.  $\mathbf{C}$  表示这个胞胞映射. 它们分量间映射关系是

$$z_i(n+1) = C_i(\mathbf{Z}(n)) \quad (n=1, 2, \dots; i=1, 2, \dots, N) \quad (3.4)$$

我们也可以在一确定的时间间隔  $T_i$  内, 用胞中心点为起点对于系统(2.5)进行数值积分, 将其初值与终值的对应视为点点映射系统. 这样将可得到较好的精度.

### 1. 周期运动和周期胞

以  $\mathbf{C}^m$  表示  $m$  次胞映射, 并使  $\mathbf{C}^0$  作为恒等映射. 若  $K$  个不同胞  $\mathbf{Z}^*(j)$  ( $j=1, 2, \dots, K$ ) 的一个序列满足

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Z}^*(m+1) &= \mathbf{C}^m(\mathbf{Z}^*(1)) \quad (m=1, 2, \dots, K-1) \\ \mathbf{Z}^*(1) &= \mathbf{C}^K(\mathbf{Z}^*(1)) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

则说这序列构成一个周期为  $K$  的周期运动, 简称  $P-K$  运动. 序列中的每一个胞  $\mathbf{Z}^*(j)$  ( $j=1, 2, \dots, K$ ) 称为周期为  $K$  的周期胞, 简称  $P-K$  胞.

### 2. 吸引域 (渐近稳定域)

如果  $r$  是一个使胞  $\mathbf{Z}$  的  $r$  次映射成为一个  $P-K$  运动的  $P-K$  胞  $\mathbf{Z}^*(j)$ , 即  $\mathbf{C}^r(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^*(j)$  的最小正整数, 则胞  $\mathbf{Z}$  被称作是“离  $P-K$  运动  $r$  步远”. 也就是说  $\mathbf{Z}$  被映射  $r$  次后, 映射到  $P-K$  运动的一个周期胞.

一个  $P-K$  运动的  $r$  步吸引域是“离  $P-K$  运动  $r$  步或小于  $r$  步远”的全部胞的集合. 而  $P-K$  运动的全吸引域则是当  $r \rightarrow \infty$  时所有这种吸引域的总和.

### 3. 确定所有 $P-K$ 运动和 $P-K$ 运动的吸引域的算法

首先, 我们需要根据所研究的问题的情况, 选取  $N$  维状态空间的一个区域, 只在这个区域中进行非线性动力系统全局分析, 这个区域称为定义域. 之所以可以这样做, 是由于对许多自然和工程问题, 状态变量  $u_i$  的值仅在某范围内是有意义的. 在胞空间考虑问题时, 称定义域内的胞是正规胞, 而称域外的胞为陷胞 (sinkcell). 由于陷胞位于没有实际意义的区域, 就不再去讨论它们的性质了.

确定了定义域, 在域内从一个正规胞  $\mathbf{Z}(1)$  开始, 重复地计算胞胞映射, 可以得到由  $\mathbf{Z}(1)$  和一系列象胞组成的胞链:

$$\mathbf{Z}(m+1) = \mathbf{C}^m(\mathbf{Z}(1)) \quad (m=1, 2, \dots) \quad (3.6)$$

当在这映射过程中遇到一个胞  $\mathbf{Z}(p)$  就是链中前面的某个胞  $\mathbf{Z}(q)$  ( $p > q$ ) 时, 我们就找到了一个  $P-K$  运动; 周期  $K = p - q$ .  $P-K$  胞就是胞链中的  $K$  个胞  $\mathbf{Z}(m)$  ( $m = q, q+1, \dots, p-1$ ), 其余的胞  $\mathbf{Z}(m)$  ( $m = 1, 2, \dots, q-1$ ) 是“离  $P-K$  运动  $q-m$  步”的胞, 它们构成  $P-K$  运动的吸引域的一个部分. 如果这种映射过程中, 遇到一个胞  $\mathbf{Z}(s)$  是陷胞, 则这胞链的全部胞  $\mathbf{Z}(m)$  ( $m = 1, 2, \dots, s-1$ ), 被称作是走向陷胞而不再受到注意.

如果从一个新的正规胞开始映射的胞链，“走到”一个已找到的  $P-K$  运动，则这胞链中的胞就构成这个周期运动的吸引域的另一部分。

当我们逐个地将定义域内每一个没有在前面的胞链中出现过的正规胞作为起始胞，计算胞映射，形成胞链，确定链中的各个胞是周期胞或是一周期运动的吸引域内的胞或是走向陷胞的胞以后，就可以确定所有的周期运动、周期胞和各周期运动的吸引域。

#### 四、弱耦合 van der pol 振荡系统全局分析实例

应用胞胞映射方法对弱耦合 van der pol 振荡系统(1.2)进行全局分析时，考虑到  $\mu$  很小和弱耦合情况，选取的定义域是  $-2.525 \leq u_1(x_1) \leq 2.525$ ,  $-3.030 \leq u_2(v_1) \leq 3.030$ ,  $-2.525 \leq u_3(x_2) \leq 2.525$ ,  $-3.030 \leq u_4(v_2) \leq 3.030$ 。

为了得到胞映射分析计算的一定精度，需要将胞的尺度取得足够小。而由于系统(1.2)是一个4阶非线性动力系统，定义域中正规胞的总数就会十分巨大，从而带来较大的计算量。在多次粗分计算、分析后，我们沿4维空间每一轴将定义域内的坐标轴段划分为31个区间，从而形成总数为  $31^4 = 923,521$  个的胞，在这个离散的胞空间中进行系统(1.2)的全局分析。

此外计算时，取一次胞胞映射的点点映射的时间间隔为  $T_i = 2.68$  时间单位，数值积分的步数为4。

应用上节所述算法，经过程序计算可以求得。

(1) 几组周期胞，即  $P-K$  胞，分别表示几个周期运动，即  $P-K$  运动。它们具有相同的或不同的周期  $K$ 。这里得到的是胞映射意义下的周期运动。

(2) 所有非周期胞的正规胞中的每一个胞是“离那一个周期运动的多少步”的胞，或是“离陷胞多少步远”的胞。

(3) 从而就确定了每一个周期运动的用胞的数量和位置表示的吸引域。

##### 1. 周期胞与周期运动的轨线

由于胞胞映射是在4维离散胞空间进行的，要在各个胞内指定位置的点取值，表述结果，因而由周期胞组成的胞环与连续空间  $R^4$  中对应的周期运动的封闭轨线之间，在局部的地方就会存在一定偏差。这种偏差随着定义域分细到一定程度，将会消除。

同时，这种“函数的离散化” ( $u \rightarrow Z$ )，还会形成胞胞映射中周期运动的周期  $K$ ，即  $P-K$  胞的个数，所对应的时间  $K T_i$  近似地等于连续空间  $R^4$  中周期运动的周期  $T$  的数倍：

$$m T \approx K T_i \quad (4.1)$$

式中  $T_i$  是一次胞胞映射中点点映射的时间间隔，为便于分析，取  $T_i < T$  为好。

根据式(4.1)可以求出胞胞映射全局分析算得的每一组周期胞 ( $P-K$  胞) 对应的  $R^4$  中周期运动的周期  $T$ 。所有对应的周期为  $T$  的周期胞组内的胞集合就是胞胞映射中对应于连续空间  $R^4$  中周期为  $T$  的周期运动的周期胞环。

对于系统(1.2)，我们求得全部4组周期胞，分析其对应  $R^4$  中的周期  $T$ ，确定它们分属  $R^4$  中两个周期运动。第一个周期运动周期  $T = 6.25$  时间单位，由14个胞表示，这14个胞组成的周期胞环在2维子胞空间  $z_1-z_2$ ,  $z_1-z_3$ ,  $z_1-z_4$ ,  $z_2-z_3$ ,  $z_2-z_4$ ,  $z_3-z_4$  (对应于  $R^4$  中2维子空间  $x_1-v_1$ ,  $x_1-x_2$ ,  $x_1-v_2$ ,  $v_1-x_2$ ,  $v_1-v_2$ ,  $x_2-v_2$ ) 中的投影如图1所示。第二个周期运动周期  $T = 5.22$  时间单位，由109个胞表示，这109个胞组成的周期胞环在2维子胞空间  $z_1-z_2$ ,

$z_1-z_3, z_1-z_4, z_2-z_3, z_2-z_4, z_3-z_4$ 中的投影如图 2 所示。

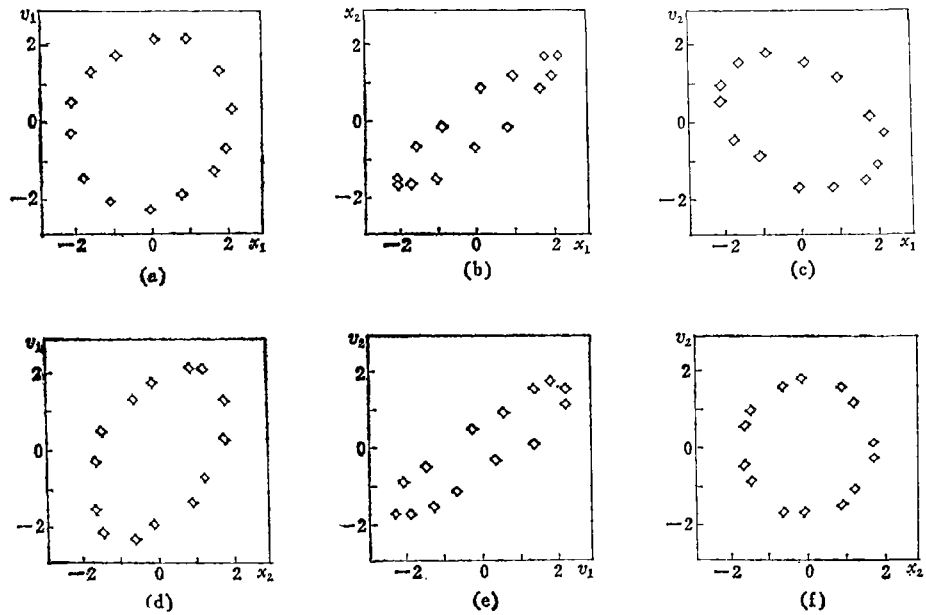


图1 耦合van der Pol振荡第一极限环  
 $\mu=0.2, \nu=0.1, \eta=0.04$ ; (胞映射法)

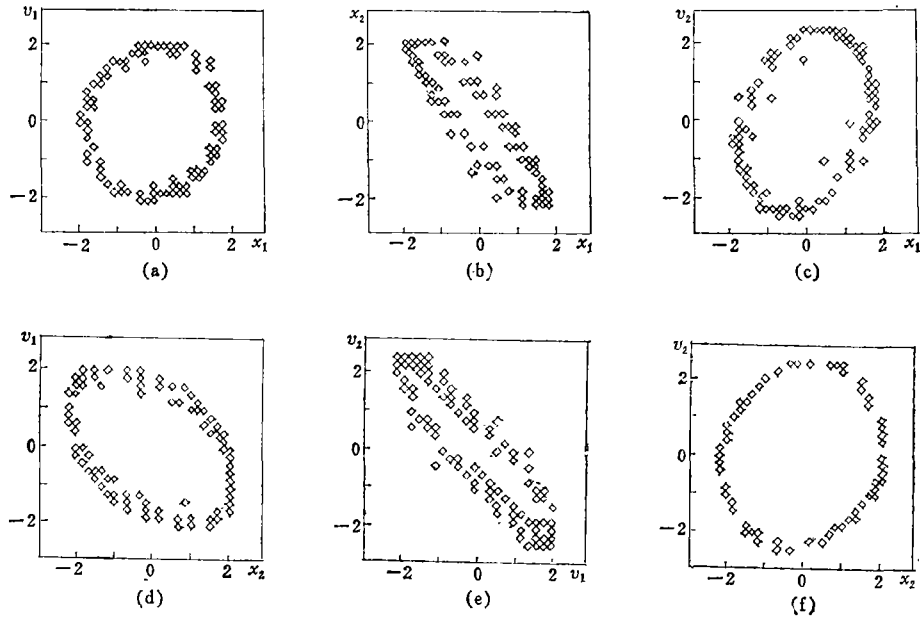


图2 耦合van der Pol振荡第二极限环  
 $\mu=0.2, \nu=0.1, \eta=0.04$ ; (胞映射法)

## 2. 极限胞环与极限环(线)

胞胞映射分析中, 由于在离散点取值很难, 几乎不可能求得一个不稳定的周期运动和周期胞, 绝大多数情形下, 求出的周期运动都是局部稳定的, 并有一定的渐近稳定域(吸引

域)。即由一些胞出发要“走到”这个周期运动。对于系统(1.2),前面求得两个周期运动也各自都有很多由其出发“走到”这两个周期运动的胞,即许多“离它们 $r$ 步远”的胞。由此可见,这两个周期运动是稳定的,各有一定的渐近稳定域(吸引域);它们的周期胞组成稳定的极限胞环;如图1、图2所示。这极限胞环就相应于 $R^4$ 中的两个稳定的极限环(线)。即系统(1.2)具有两个稳定的极限环。

4维胞空间中极限胞环在 $z_1-z_2(x_1-v_1)$ 和 $z_3-z_4(x_2-v_2)$ 两个2维子胞空间中的投影,就是两个实际van der Pol振荡在各自胞相平面中的极限胞环。由图1、图2可见,它们与非耦合简单van der Pol振荡的极限环——半径为2的圆大小相差还是显著的,即使在 $\mu=0.2$ 的较小情形下。

### 3. 渐近稳定域(吸引域)

在系统(1.2)的胞胞映射全局分析中,只有定义域的边缘上极少数胞“走向”陷胞,共412个胞,占定义域中正规胞总数923521个的0.04%,没能进一步分析其归属;其余99.96%的正规胞分别“走到”两个周期运动。“走到”第一个和第二个周期运动的胞数分别为474260和448849,分别占总数的51.40%和48.60%;它们分别构成这两个周期运动的渐近稳定域(吸引域)。

“走向”陷胞的胞的出现是由于我们不可能取任意的定义域。这种胞的数目这样少,又都位于定义域的边缘;使我们可以断言:弱耦合van der Pol非线性振荡系统(1.2)有且只有两个稳定的极限环(线)。

计算结果可告诉我们,定义域中每一个正规胞的归宿,即:是周期胞,还是“离周期运动 $r$ 步远”的胞,还是“走向”陷胞的胞;周期胞是第几个周期运动的周期胞;“离周期运动 $r$ 步远”是离那一个周期运动 $r$ 步远等。因而能够确定地求得每个周期运动的渐近稳定域(吸引域)。它们是用域中胞的数目和位置表示的。胞的位置由胞向量 $Z=[z_1, z_2, z_3, z_4]^T$ 决定。

由于吸引域所在的胞空间是四维的,较难给以表示;但是又因离散化,在定义域中正规胞的数目是有限的,我们就可以将具有相同胞向量 $Z$ 的 $z_3, z_4$ 两个分量的胞,按照 $z_1, z_2$ 两个分量代数值的大小在 $z_1-z_2$ 平面上表示它们是属于哪一个周期运动的吸引域。按一定顺序,逐次取 $z_3, z_4$ 不同的值,作出这种平面表示的吸引域图;当穷尽定义域中 $z_3, z_4$ 所有组合后,我们就可以得到全部两个周期运动吸引域的直观描述。限于篇幅,我们不可能画出全部这种“平面”吸引域图,而只画出少数几图。

应用软件技术,我们将由其出发“走到”第一个和第二个周期运动的胞分别用符号“•”和“0”表示,给出 $z_1-z_2(z_3=0, z_4=0)$ ,  $z_1-z_2(z_3=6, z_4=0)$ ,  $z_3-z_4(z_1=0, z_2=5)$ 三个“平面”吸引域图;如图3所示。它们相应于 $R^4$ 中的 $x_1-v_1(x_2=0.0421, v_2=-0.0505)$ ,  $x_1-v_1(x_2=1.0519, v_2=-0.0505)$ ,  $x_2-v_2(x_1=-0.0421, v_1=+0.9595)$ 。

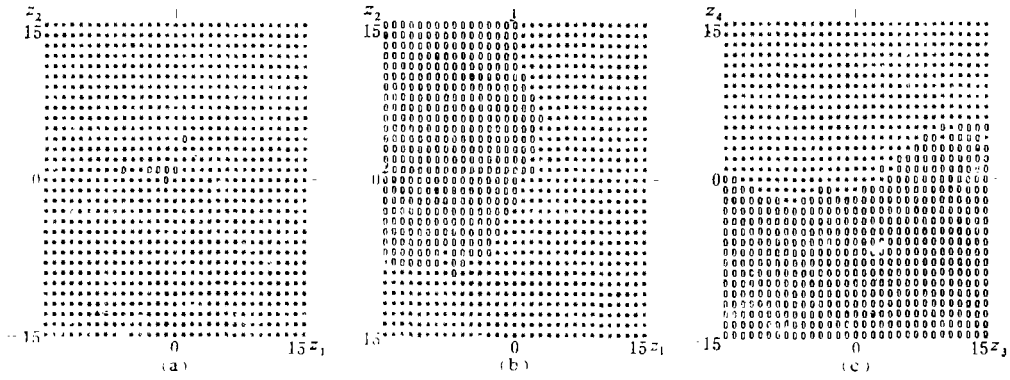


图3 耦合van der Pol振荡渐近稳定吸引域的胞截面

$\mu=0.2, \nu=0.1, \eta=0.04$ ; “\*”到第一极限环, “0”到第二极限环; (胞映射法)

### 五、数值积分检查

我们还用数值积分, 直接计算系统(1.2)的初值问题. 选取不同的初值、很大的积分步数(从而积分时间很长, 达20000时间单位)进行计算. 根据每2500个时间单位的最后一个周期的轨线都相互重合, 肯定了极限环(线)的存在. 大量初值问题计算表示, 所有轨线趋向于, 且只分别趋向于两个极限环(线). 这两个极限环(线)在 $R^4$ 中 $x_1-v_1, x_1-x_2, x_1-v_2, v_1-x_2, v_1-v_2, x_2-v_2$ 六个二维子空间的投影如图4所示.

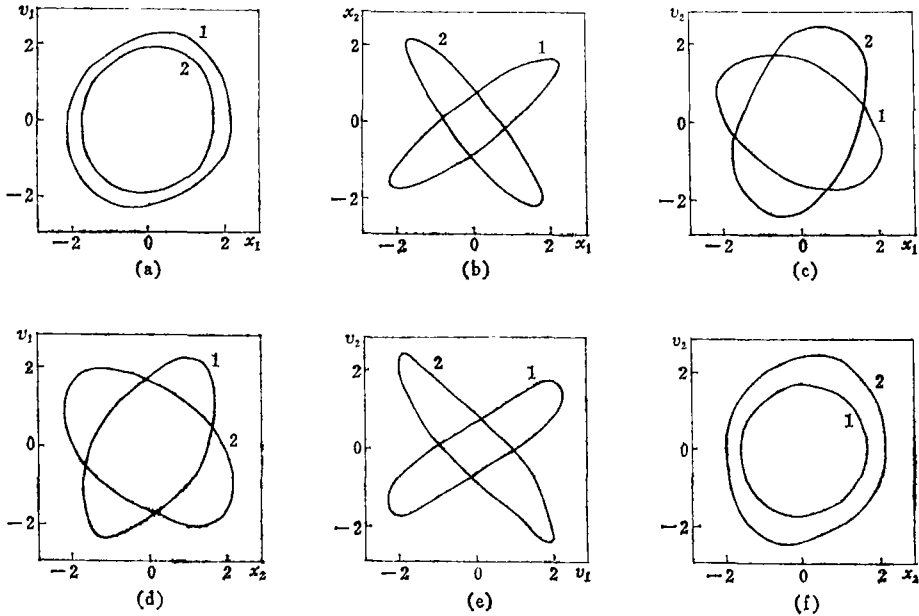


图4 耦合van der Pol振荡的两个极限环

$\mu=0.2, \nu=0.1, \eta=0.04$ ; (数值积分)

此外还计算了与图3对应的三个2维子空间内与每个胞对应的点的初值问题, 确定了这些点属于那个周期运动的吸引域. 并绘于图5.

比较两种计算结果可见, 虽然胞胞映射计算在一个维度上只较粗地划分31个区间, 结果还是较为接近数值结果的. 这也表明这方法在四阶系统全局分析方面是强有力的.



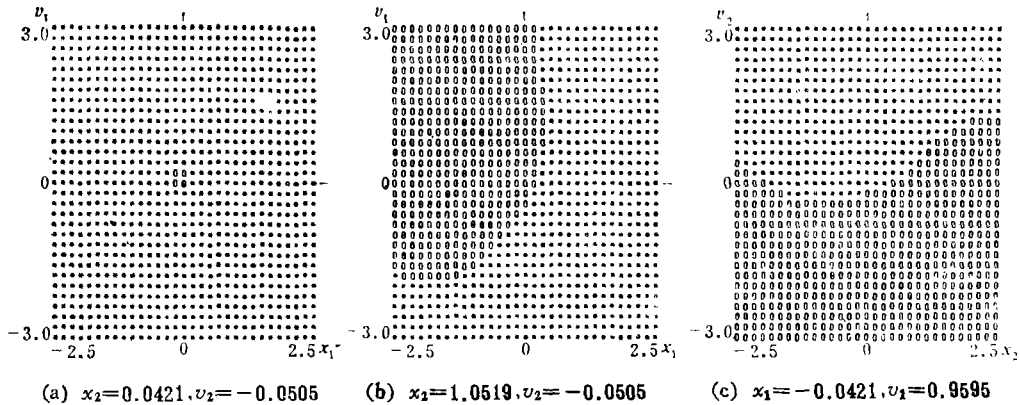


图5 耦合van der Pol振荡渐近稳定吸引域的截面

$\mu=0.2, \nu=0.1, \eta=0.04$ ; “\*”到第一极限环, “0”到第二极限环; (数值积分)

## 六、结 论

1. 胞胞映射方法可以有效地进行非线性动力系统的全局分析。
2. 弱耦合van der Pol振荡系统(1.2)具有两个在4维状态空间 $R^4$ 中稳定的极限环。每一个极限环在两个实际van der Pol振荡的相平面上的投影就是两个实际振荡的极限环。在小 $\mu(\mu=0.2)$ 情况下,两个实际振荡的四个极限环的大小都已明显不同于非耦合简单van der Pol振荡近于半径为2的圆的极限环。
3. 系统(1.2)沿两个 $R^4$ 中极限环周期运动的周期分别为6.25和5.22时间单位。
4. 整个 $R^4$ 空间被分为接近相等的两部分,分别是沿第一个和第二个极限环周期运动的渐近稳定域(吸引域)。

## 参 考 文 献

- [1] Hsu, C. S., A Theory of cell-to-cell mapping for dynamical systems, *ASME, J. Appl. Mech.*, **47**, (1980), 931—939.
- [2] Hsu, C. S., and R. S. Guttalu, An unra-velling algorithm for global analysis of dynamical systems: An application of cell-to-cell mappings, *ASME, J. Appl. Mech.*, **47**, (1980), 940—948.
- [3] Hsu, C. S., A generalized theory of cell-to-cell mapping for nonlinear dynamical systems, *ASME, J. Appl. Mech.*, **48**, (1981)634—642.
- [4] Hsu, C. S., R. S. Guttalu and W. H. Zhu, A method of analyzing generalized cell mapping, *ASME, J. Appl. Mech.*, **49**, (1982), 885—894.
- [5] Hsu, C. S., A probabilistic theory of nonlinear dynamical systems based on the cell state space concept, *ASME, J. Appl. Mech.*, **49**, (1982), 895—902.
- [6] Kauderer, H., *Nichtlineare mechanik*, Springer, (1958).
- [7] Yang T. L. and R. M. Rosenberg, On forced vibrations of a particle in the plane, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **3**, (1968)47—63.
- [8] Pavlidis, T., *Biological oscillators: Their mathematical analysis*, Academic Press, (1973).

- [9] Rand, R. H. and P. J. Holmes, Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 15, (1980), 387—399.
- [10] Hirsch, M. W., C. C. Pugh and M. Shub, *Invariant Manifolds*, Springer Lecture Notes in Math. No. 583, Springer Verlag, (1977).
- [11] Chillingworth, D. R. J., *Differential Topology with a View to Applications*, Pitman, London, (1976).

## The Global Analysis of Higher Order Non-linear Dynamical Systems and the Application of Cell-to-Cell Mapping Method

C. S. Hsu

(University of California, Berkeley, CA, U. S. A.)

Xu Jian-xue

(Xi'an Jiaotong University, Xi'an)

### Abstract

In this paper, the general characteristics and the topological consideration of the global behavior of higher order non-linear dynamical systems and the characteristics of the application of cell-to-cell mapping method in these analysis are expounded. Specifically, the global analysis of a system of two weakly coupled van der Pol oscillators using cell-to-cell mapping method is presented.

The analysis shows that for this system, there exist two stable limit cycles in 4-dimensional state space, and the whole 4-dimensional state space is divided into two almost equal parts which are, respectively, the two asymptotically stable domains of attraction of the two periodic motions of the two stable limit cycles. The validities of these conclusions about the global behavior are also verified by direct long term numerical integration. Thus, it can be seen that the cell-to-cell mapping method for global analysis of fourth order non-linear dynamical systems is quite effective.