应用数学和力学，第6卷第11期（1985年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 空心球体在内外压力作用下的有限位移问题*

黄 择 言

（武汉地质学院物理教研室，1983年6月5日收到）

**摘　要**

利用逐次逼近法求解了这个边值问题．我们找到一次解和二次解，从而获致位移场，应变场和应力场的二级近似公式．

文[1]用逐次逼近法处理了圆筒在内外压力作用下的有限位移问题．现在让我们来探讨空心球体或球壳在内外压力作用下的有限位移问题．本问题以采用取球心为原点的球坐标系$(R,\ \Theta,\ \Phi)$最为方便．鉴于问题的球对称性，不为零的位移分量仅径向分量，而且它只是$R$的函数．

同文[1]一样，我们在具体计算时使用物理标架，张量（包括矢量）的各个分量一概取物理分量．在这种情况下，将物质坐标系的三个单位基矢记作$\mathbf{G}_R$、$\mathbf{G}_\Theta$、$\mathbf{G}_\Phi$，而算符$\nabla_R$则为

$$\nabla_R\equiv\mathbf{G}_R\frac{\partial}{\partial R}+\frac{\mathbf{G}_\Theta}{R}\frac{\partial}{\partial\Theta}+\frac{\mathbf{G}_\Phi}{R\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Phi}$$

至于基本方程、逐次逼近解法梗概以及所用记号的意义，请参阅[1]，这里就不重复了．

## 一、一 次 解

考虑一个各向同性的空心球体或球壳（体力不计）．当内部球面上受有均匀的压力$p$，外部球面上受有均匀的压力$q$后，它在终态（已变形态）的内外半径分别为$a$和$b$．假定[1]

$$\left.\begin{array}{l}p=\varepsilon p_{(1)},\ \ q=\varepsilon q_{(1)}\\ p_{(n)}=q_{(n)}=0\quad(\text{当 } n\geqslant 2)\end{array}\right\}\tag{1.1}$$

我们首先求解下列一次$(n=1)$边值问题：

$$\nabla_R\cdot\mathbf{\Sigma}_{(1)}=\nabla_R\cdot(\mathbf{C}_{(2)}\cdot\mathbf{\mathring{E}}_{(1)})=0\tag{1.2a}$$

$$\left.\begin{array}{ll}-\mathbf{G}_R\cdot\mathbf{\Sigma}_{(1)}=p_{(1)}\mathbf{G}_R & \text{在 } R=a\\ +\mathbf{G}_R\cdot\mathbf{\Sigma}_{(1)}=-q_{(1)}\mathbf{G}_R & \text{在 } R=b\end{array}\right\}\tag{1.2b}$$

设

$$\mathbf{u}_{(1)}=U_R^{(1)}(R)\mathbf{G}_R\tag{1.3}$$

* 钱伟长推荐．

我们求得

$$\breve{\mathbf{E}}_{(1)}=\frac{1}{2}(\nabla_R\mathbf{u}_{(1)}+\mathbf{u}_{(1)}\nabla_R)$$

$$=\frac{dU_R^{(1)}}{dR}\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R+\frac{U_R^{(1)}}{R}\mathbf{G}_\theta\mathbf{G}_\theta+\frac{U_R^{(1)}}{R}\mathbf{G}_\phi\mathbf{G}_\phi \tag{1.4}$$

因此，

$$\mathbf{\Sigma}_{(1)}=\mathbf{C}_{(2)}\cdot\cdot\breve{\mathbf{E}}_{(1)}=\lambda(\mathrm{tr}\breve{\mathbf{E}}_{(1)})\mathbf{I}+2\mu\breve{\mathbf{E}}_{(1)}$$

$$=\left[(\lambda+2\mu)\frac{dU_R^{(1)}}{dR}+2\lambda\frac{R_R^{(1)}}{R}\right]\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R$$

$$+\left[2(\lambda+\mu)\frac{U_R^{(1)}}{R}+\lambda\frac{dU_R^{(1)}}{dR}\right]\mathbf{G}_\theta\mathbf{G}_\theta$$

$$+\left[2(\lambda+\mu)\frac{U_R^{(1)}}{R}+\lambda\frac{dU_R^{(1)}}{dR}\right]\mathbf{G}_\phi\mathbf{G}_\phi \tag{1.5}$$

于是方程(1.2a)给出

$$\frac{d^2U_R^{(1)}}{dR^2}+\frac{2}{R}\frac{dU_R^{(1)}}{dR}-\frac{2U_R^{(1)}}{R^2}=0 \tag{1.6}$$

这个微分方程具有通解

$$U_R^{(1)}=k'R+l'/R^2 \tag{1.7}$$

其中 $k'$ 和 $l'$ 为任意常数[1)]。将(1.7)代入(1.5)，我们有：

$$\mathbf{\Sigma}_{(1)}=\left[(3\lambda+2\mu)k'-\frac{4\mu l'}{R^3}\right]\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R$$

$$+\left[(3\lambda+2\mu)k'+\frac{2\mu l'}{R^3}\right]\mathbf{G}_\theta\mathbf{G}_\theta$$

$$+\left[(3\lambda+2\mu)k'+\frac{2\mu l'}{R^3}\right]\mathbf{G}_\phi\mathbf{G}_\phi \tag{1.8}$$

因而根据边界条件(1.2b)，有

$$\left.\begin{aligned}(3\lambda+2\mu)k'-\frac{4\mu l'}{a^3}&=-p_{(1)}\\(3\lambda+2\mu)k'-\frac{4\mu l'}{b^3}&=-q_{(1)}\end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

联立解之，得

$$k'=\frac{p_{(1)}a^3-q_{(1)}b^3}{(3\lambda+2\mu)(b^3-a^3)},\qquad l'=\frac{(p_{(1)}-q_{(1)})a^3b^3}{4\mu(b^3-a^3)} \tag{1.10a,b}$$

既然确定了 $k'$ 和 $l'$ 之值，我们便获得下列一次解：

$$\mathbf{u}_{(1)}=\left(k'R+\frac{l'}{R^2}\right)\mathbf{G}_R$$

$$=\frac{1}{b^3-a^3}\left[\frac{p_{(1)}a^3-q_{(1)}b^3}{3\lambda+2\mu}R+\frac{(p_{(1)}-q_{(1)})a^3b^3}{4\mu}\frac{1}{R^2}\right]\mathbf{G}_R \tag{1.11a}$$

1) 本文引入的常数，一律加撇号，以示与文[1]中对应的常数有别.

$$\mathbf{E}_{(1)}=\tilde{\mathbf{E}}_{(1)}=\left(k'-\frac{2l'}{R^3}\right)\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R+\left(k'+\frac{l'}{R^3}\right)\mathbf{G}_\theta\mathbf{G}_\theta+\left(k'+\frac{l'}{R^3}\right)\mathbf{G}_\phi\mathbf{G}_\phi$$

$$=\frac{1}{b^3-a^3}\left[\frac{p_{(1)}a^3-q_{(1)}b^3}{3\lambda+2\mu}-\frac{(p_{(1)}-q_{(1)})a^3b^3}{2\mu}\frac{1}{R^3}\right]\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R$$

$$+\frac{1}{b^3-a^3}\left[\frac{p_{(1)}a^3-q_{(1)}b^3}{3\lambda+2\mu}+\frac{(p_{(1)}-q_{(1)})a^3b^3}{4\mu}\frac{1}{R^3}\right]\mathbf{G}_\theta\mathbf{G}_\theta$$

$$+\frac{1}{b^3-a^3}\left[\frac{p_{(1)}a^3-q_{(1)}b^3}{3\lambda+2\mu}+\frac{(p_{(1)}-q_{(1)})a^3b^3}{4\mu}\frac{1}{R^3}\right]\mathbf{G}_\phi\mathbf{G}_\phi \qquad (1.11b)$$

$$\mathbf{\Sigma}_{(1)}=\frac{1}{b^3-a^3}\left[p_{(1)}a^3-q_{(1)}b^3-\frac{(p_{(1)}-q_{(1)})a^3b^3}{R^3}\right]\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R$$

$$+\frac{1}{b^3-a^3}\left[p_{(1)}a^3-q_{(1)}b^3+\frac{(p_{(1)}-q_{(1)})a^3b^3}{2R^3}\right]\mathbf{G}_\theta\mathbf{G}_\theta$$

$$+\frac{1}{b^3-a^3}\left[p_{(1)}a^3-q_{(1)}b^3+\frac{(p_{(1)}-q_{(1)})a^3b^3}{2R^3}\right]\mathbf{G}_\phi\mathbf{G}_\phi \qquad (1.11c)$$

从而有位移场、应变场和应力场的一级近似公式如下：

$$\mathbf{u}^{\mathrm{I}}=\varepsilon\mathbf{u}_{(1)},\quad \mathbf{E}^{\mathrm{I}}=\varepsilon\mathbf{E}_{(1)},\quad \mathbf{\Sigma}^{\mathrm{I}}=\varepsilon\mathbf{\Sigma}_{(1)} \qquad (1.12)$$

鉴于(1.1)，亦即 $\varepsilon p_{(1)}=p$ 和 $\varepsilon q_{(1)}=q$，表达式（1.12）正是经典弹性理论的结果[2-4]，其中最后一式通常称为 Lamé 的应力公式。

## 二、二 次 解

现在，我们进而求解二次 ($n=2$) 边值问题：

$$\nabla_R\cdot\mathbf{\Sigma}_{(2)}=\nabla_R\cdot(\mathbf{C}_{(2)}\cdot\cdot\tilde{\mathbf{E}}_{(2)}+\mathbf{\Sigma}^*_{(2)})=0 \qquad (2.1a)$$

$$\mathbf{G}_R\cdot(\mathbf{C}_{(2)}\cdot\cdot\tilde{\mathbf{E}}_{(2)}+\mathbf{\Sigma}^*_{(2)})=0 \qquad (\text{在}R=a,\ b) \qquad (2.1b)$$

对于各向同性材料，$\mathbf{\Sigma}^*_{(2)}$的表达式是[1]：

$$\begin{aligned}\mathbf{\Sigma}^*_{(2)}=&\left\{\frac{\lambda}{2}\mathrm{tr}\,[\nabla_R\mathbf{u}_{(1)})\cdot(\mathbf{u}_{(1)}\nabla_R)]+\frac{\nu_1}{2}(\mathrm{tr}\tilde{\mathbf{E}}_{(1)})^2+\nu_2\mathrm{tr}\tilde{\mathbf{E}}^2_{(1)}\right\}\mathbf{I}\\&+\lambda(\mathrm{tr}\,\tilde{\mathbf{E}}_{(1)})\nabla_R\mathbf{u}_{(1)}+\mu(\nabla_R\mathbf{u}_{(1)})\cdot(\mathbf{u}_{(1)}\nabla_R)\\&+2\mu\tilde{\mathbf{E}}_{(1)}\cdot(\nabla_R\mathbf{u}_{(1)})+2\nu_2(\mathrm{tr}\,\tilde{\mathbf{E}}_{(1)})\tilde{\mathbf{E}}_{(1)}+4\nu_3\tilde{\mathbf{E}}^2_{(1)}\end{aligned} \qquad (2.2a)$$

我们把用 $k'$、$l'$ 表示的 $\mathbf{u}_{(1)}$ 和 $\tilde{\mathbf{E}}_{(1)}$ 的表达式 (1.11a,b) 代入上式，经简化后可得

$$\mathbf{\Sigma}^*_{(2)}=\left[A'-2B'\frac{1}{R^3}+(3\lambda+12\mu+6\nu_2+16\nu_3)l'^2\frac{1}{R^6}\right]\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R$$

$$+\left[A'+B'\frac{1}{R^3}+(3\lambda+3\mu+6\nu_2+4\nu_3)l'^2\frac{1}{R^6}\right]\mathbf{G}_\theta\mathbf{G}_\theta$$

$$+\left[A'+B'\frac{1}{R^3}+(3\lambda+3\mu+6\nu_2+4\nu_3)l'^2\frac{1}{R^6}\right]\mathbf{G}_\phi\mathbf{G}_\phi \qquad (2.2b)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}A'&=(9\lambda/2+3\mu+9\nu_1/2+9\nu_2+4\nu_3)k'^2\\B'&=(3\lambda+6\mu+6\nu_2+8\nu_3)k'l'\end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

再由 (2.2b) 求得

$$\nabla_R\cdot\mathbf{\Sigma}^*_{(2)}=-18(\lambda+3\mu+2\nu_2+4\nu_3)l'^2\mathbf{G}_R/R^7\tag{2.4}$$

其次，我们计算 $\mathbf{C}_{(2)}\cdot\cdot\mathbf{E}_{(2)}$。

设

$$\mathbf{u}_{(2)}=U_R^{(2)}(R)\mathbf{G}_R\tag{2.5}$$

由此，

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{(2)}&=(\nabla_R\mathbf{u}_{(2)}+\mathbf{u}_{(2)}\nabla_R)/2\\&=\frac{dU_R^{(2)}}{dR}\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R+\frac{U_R^{(2)}}{R}\mathbf{G}_\theta\mathbf{G}_\theta+\frac{U_R^{(2)}}{R}\mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_\Phi\end{aligned}\tag{2.6}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{(2)}\cdot\cdot\mathbf{E}_{(2)}&=\lambda(\mathrm{tr}\mathbf{E}_{(2)})\mathbf{I}+2\mu\mathbf{E}_{(2)}\\&=\left[(\lambda+2\mu)\frac{dU_R^{(2)}}{dR}+2\lambda\frac{U_R^{(2)}}{R}\right]\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R\\&\quad+\left[2(\lambda+\mu)\frac{U_R^{(2)}}{R}+\lambda\frac{dU_R^{(2)}}{dR}\right]\mathbf{G}_\theta\mathbf{G}_\theta\\&\quad+\left[2(\lambda+\mu)\frac{U_R^{(2)}}{R}+\lambda\frac{dU_R^{(2)}}{dR}\right]\mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_\Phi\end{aligned}\tag{2.7}$$

从而

$$\nabla_R\cdot(\mathbf{C}_{(2)}\cdot\cdot\mathbf{E}_{(2)})=(\lambda+2\mu)\left(\frac{d^2U_R^{(2)}}{dR^2}+\frac{2}{R}\frac{dU_R^{(2)}}{dR}-\frac{2U_R^{(2)}}{R^2}\right)\mathbf{G}_R\tag{2.8}$$

将(2.4)和(2.8)代入(2.1a)，得

$$\frac{d^2U_R^{(2)}}{dR^2}+\frac{2}{R}\frac{dU_R^{(2)}}{dR}-\frac{2U_R^{(2)}}{R^2}=\frac{18\Omega'l'^2}{R^7}\tag{2.9}$$

其中

$$\Omega'=\frac{\lambda+3\mu+2\nu_2+4\nu_3}{\lambda+2\mu}\tag{2.10}$$

微分方程 (2.9) 的通解是

$$U_R^{(2)}=\alpha'R+\frac{\beta'}{R^2}+\frac{\Omega'l'^2}{R^5}\tag{2.11}$$

其中 $\alpha'$ 和 $\beta'$ 为任意常数。把(2.11)代入(2.7)，并将所得结果与(2.2b)一起代入边界条件(2.1b)，便得下面两个方程：

$$\left.\begin{aligned}(3\lambda+2\mu)\alpha'-\frac{4\mu}{a^3}\beta'+A'-\frac{2B'}{a^3}-\frac{\omega'l'^2}{a^6}=0\\(3\lambda+2\mu)\alpha'-\frac{4\mu}{b^3}\beta'+A'-\frac{2B'}{b^3}-\frac{\omega'l'^2}{b^6}=0\end{aligned}\right\}\tag{2.12a,b}$$

其中

$$\omega'=3\lambda(\Omega'-1)+2\mu(5\Phi'-6)-6\nu_2-16\nu_3\tag{2.13}$$

联立解(2.12a,b)，得

$$\alpha'=-\frac{1}{3\lambda+2\mu}\left(A'+\frac{\omega' l'^2}{a^3b^3}\right),\qquad \beta'=-\frac{1}{4\mu}\left[2B'+\omega' l'^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right)\right] \tag{2.14}$$

既经确定了 $\alpha'$ 和 $\beta'$ 之值，我们便有下列二次解：

$$\mathbf{u}_{(2)}=U_R^{(2)}\mathbf{G}_R=\left(\alpha' R+\frac{\beta'}{R^2}+\frac{\Omega' l'^2}{R^5}\right)\mathbf{G}_R \tag{2.15a}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{(2)}&=\tilde{\mathbf{E}}_{(2)}+\frac{1}{2}(\nabla_R\mathbf{u}_{(1)})\cdot(\mathbf{u}_{(1)}\nabla_R)\\&=\left[\alpha'+\frac{k'^2}{2}-\frac{2(\beta'+k'l')}{R^3}-\frac{(5\Omega'-2)l'^2}{R^6}\right]\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R\\&\quad+\left[\alpha'+\frac{k'^2}{2}+\frac{\beta'+k'l'}{R^3}+\frac{(\Omega'+1/2)l'^2}{R^6}\right]\mathbf{G}_\theta\mathbf{G}_\theta\\&\quad+\left[\alpha'+\frac{k'^2}{2}+\frac{\beta'+k'l'}{R^3}+\frac{(\Omega'+1/2)l'^2}{R^6}\right]\mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_\Phi\end{aligned} \tag{2.15b}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{\Sigma}_{(2)}&=\mathbf{C}_{(2)}\cdot\cdot\tilde{\mathbf{E}}_{(2)}+\mathbf{\Sigma}^*_{(2)}\\&=-\frac{\omega' l'^2}{a^3b^3}\left(1-\frac{a^3+b^3}{R^3}+\frac{a^3b^3}{R^6}\right)\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R\\&\quad-\frac{\omega' l'^2}{a^3b^3}\left\{1+\frac{a^3+b^3}{2R^3}+\frac{[3\lambda(\Omega'-1)-\mu(2\Omega'+3)-6\nu_2-4\nu_3]a^3b^3}{\omega' R^6}\right\}\mathbf{G}_\theta\mathbf{G}_\theta\\&\quad-\frac{\omega' l'^2}{a^3b^3}\left\{1+\frac{a^3+b^3}{2R^3}+\frac{[3\lambda(\Omega'-1)-\mu(2\Omega'+3)-6\nu_2-4\nu_3]a^3b^3}{\omega' R^6}\right\}\mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_\Phi\end{aligned} \tag{2.15c}$$

在(2.15c)里，我们已利用了(2.13)和(2.14)。

这样，我们便可写出位移场、应变场和应力场的二级近似公式如下：

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{u}^{\mathrm{I}}&=\varepsilon\mathbf{u}_{(1)}+\varepsilon^2\mathbf{u}_{(2)}=\mathbf{u}^{\mathrm{I}}+\varepsilon^2\mathbf{u}_{(2)}\\\mathbf{E}^{\mathrm{I}}&=\varepsilon\mathbf{E}_{(1)}+\varepsilon^2\mathbf{E}_{(2)}=\mathbf{E}^{\mathrm{I}}+\varepsilon^2\mathbf{E}_{(2)}\\\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{I}}&=\varepsilon\mathbf{\Sigma}_{(1)}+\varepsilon^2\mathbf{\Sigma}_{(2)}=\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{I}}+\varepsilon^2\mathbf{\Sigma}_{(2)}\end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

在这些最终结果里，考虑到(1.1)，参数 $\varepsilon$ 消失。例如，应力场的二级近似公式是：

$$\begin{aligned}\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{I}}=&\left\{\frac{1}{b^3-a^3}\left[pa^3-qb^3-\frac{(p-q)a^3b^3}{R^3}\right]-\frac{\omega'(p-q)^2a^3b^3}{16\mu^2(b^3-a^3)^2}\left(1-\frac{a^3+b^3}{R^3}\right.\right.\\&\left.\left.+\frac{a^3b^3}{R^6}\right)\right\}\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R+\left\{\frac{1}{b^3-a^3}\left[pa^3-qb^3+\frac{(p-q)a^3b^3}{2R^3}\right]-\frac{\omega'(p-q)^2a^3b^3}{16\mu^2(b^3-a^3)^2}\left[1\right.\right.\\&\left.\left.+\frac{a^3+b^3}{2R^3}+\frac{3\lambda(\Omega'-1)-\mu(2\Omega'+3)-6\nu_3-4\nu_3}{\omega'}\cdot\frac{a^3b^3}{R^6}\right]\right\}\mathbf{G}_\theta\mathbf{G}_\theta\\&+\left\{\frac{1}{b^3-a^3}\left[pa^3-qb^3+\frac{(p-q)a^3b^3}{2R^3}\right]-\frac{\omega'(p-q)^2a^3b^3}{16\mu^2(b^3-a^3)^2}\left[1\right.\right.\end{aligned}$$

$$+\frac{a^3+b^3}{2R^3}+\frac{3\lambda(\Omega'-1)-\mu(2\Omega'+3)-6\nu_2-4\nu_3}{\omega'}\cdot\frac{a^3b^3}{R^6}\Bigg]\Bigg\}\mathbf{G}_\varphi\mathbf{G}_\varphi$$

这里已将 $l'$ 之值(1.10b)代入，而 $\Omega'$ 和 $\omega'$ 之值分别由(2.10)和(2.13)给出.

## 参 考 文 献


[1] 黄择言，圆筒在内外压力作用下的有限位移问题，应用数学和力学，5, 4(1984), 589—602.

[2] 钱伟长、叶开沅，《弹性力学》，科学出版社 (1956).

[3] Saada, A. S., *Elasticity: Theory and Applications*, Pergamon, New York (1974).

[4] Sokolnikoff, I. S., *Mathematical Theory of Elasticity*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York (1956).


# On the Finite Displacement Problem of a Hollow Sphere under Internal and External Pressures


Huang Ze-yan

*(Wuhan College of Geology, Wuhan)*



**Abstract**

Taking advantage of successive approximations, the present boundary-value problem is solved. We find the first-order and second-order solutions, and therefore we obtain the formulae in the second approximation for the displacement, strain, and stress fields.