应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

二阶非线性微分方程组的正规解及极限边值问题

梁中超　陈绍著

（山东海洋学院）（济南山东大学）

（李骊推荐，1984年7月9日收到）

摘　要

本文对微分方程组

$\dot{x}=r(t)y,\ \dot{y}=-a(t)f(x)g(y)$

其中$a(t)>0$，$r(t)>0$，$t\geqslant t_0$；$f(x)$对$x>0$正值递减；$g(y)>0$，给出存在正规解，有界正规解或两类无穷区间$[c,\ \infty)$ $(c\geqslant t_0)$上边值问题解的充要条件．同时给出若干例子说明结果的条件．

一　引　言

本文研究二阶微分方程组

$$\dot{x}=r(t)y;\quad \dot{y}=-a(t)f(x)g(y) \tag{E}$$

假定

(i)　$a:[t_0,\infty)\to(0,\infty)$连续，$t_0$是某实数．

(ii)　$r:[t_0,\infty)\to(0,\infty)$连续，$\int_{t_0}^{\infty}r(t)dt=\infty$．

(iii)　$f:(0,\infty)\to(0,\infty)$和$g:(-\infty,\infty)\to(0,\infty)$均为连续函数，$f(x)$对$x$递减．函数$f$和$g$足够光滑以保证组(E)的初值问题解的唯一性和解对初值的连续相依性．

组(E)的解$z(t)=(x(t),y(t))$称为正规解，若有某常数$c\geqslant t_0$，使解$z(t)$对$t\geqslant c$有定义，否则称$z(t)$为非正规解．

设$z(t)$是组（E）在$[c,\infty)$上的正规解，则对所有的$t\geqslant c$，$x(t)>0$，从而$\dot{y}(t)\leqslant 0$，$y(t)$不增．由假定（ii）及$x(t)>0$，易证对所有$t\geqslant c$，$y(t)>0$，因而$x(t)$递增．于是，极限$y(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}y(t)$存在且有限，$0\leqslant y(\infty)<\infty$，极限$x(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}x(t)$存在，$0<x(\infty)\leqslant\infty$．这样，组（E）的所有正规解可分为下述三种类型：

A、　$0<y(\infty)<\infty$，$x(\infty)=\infty$；

B、　$y(\infty)=0$，$x(\infty)=\infty$；

C、　$y(\infty)=0$，$x(\infty)=\text{const}>0$．

设$z(t)$是组（E）在$[c,T)$上的任一非正规解，$t_0\leqslant c<T<\infty$．由于$t\to T-0$时，$x(t)$，

$y(t)$不可能趋向$+\infty$，因此，或者$x(T-0)=0$，$y(T-0)=\text{const}<0$；或者$x(T-0)=\text{const}\geqslant 0$，$y(T-0)=-\infty$。即（E）的任一非正规解的第二分量$y(t)$都是最终负值的函数。

本文研究组（E）的正规解及在半无穷区间$[c,\infty)(c\geqslant t_0)$上的极限边值问题解的存在条件。

Taliaferro[2]曾研究由边界层方程导出的二阶微分方程

$$y''+\phi(t)y^{-\lambda}=0 \quad (\lambda>0)$$

的正规解及其渐近性质。本文的定理1和3是[2]中某些结果的推广。

关于二阶常微分方程在半无穷区间上的边值问题，已有许多工作(见[1]及其文献)。本文研究两类极限边值问题，给出解存在的充要条件(见定理2和4)。

我们需要如下的引理。

引理　设$z_1(t)$和$z_2(t)$是组（E）于$[c,\omega)$，$t_0\leqslant c<\omega\leqslant\infty$，上满足$x_1(c)=x_2(c)$的两个解，则$x_1(t)-x_2(t)$是$[c,\omega)$上的单调函数，因此$y_1(t)-y_2(t)$常号。又若$g(y)$对$y$不增，则$y_1(t)-y_2(t)$是$[c,\omega)$上的单调函数。

证明　设$u(t)=x_1(t)-x_2(t)$。又不妨设$y_1(c)>y_2(c)$($y_1(c)<y_2(c)$的情况证明类似)，则$u(t)$在$t=c$右方附近为正值。下证$u(t)$在$[c,\omega)$上不减。若不然，则存在一点$b\in(c,\omega)$，使$u(t)$在$t=b$处取极大值，且$\dot u(b)=0$。另一方面，由$x_1(b)>x_2(b)$及$y_1(b)=y_2(b)$，得

$$\begin{aligned}\ddot u(b)&=\lim_{h\to 0}(\dot u(b+h)-\dot u(b))/h\\&=\lim_{h\to 0}r(b+h)(y_1(b+h)-y_2(b+h))/h\\&=r(b)a(b)g(y_1(b))(f(x_2(b))-f(x_1(b)))>0\end{aligned}$$

此与$u(t)$在$t=b$处取极大值矛盾。此矛盾证明$\dot u(t)\geqslant 0$，因此$y_1(t)\geqslant y_2(t)$，$t\in[c,\omega)$。

又若$g(y)$不增，则对任何$t\in(c,\omega)$，有

$$\dot y_1(t)-\dot y_2(t)=a(t)[f(x_2(t))g(y_2(t))-f(x_1(t))g(y_1(t))]>0$$

故$y_1(t)-y_2(t)$在$[c,\omega)$上递增。引理证毕。

二、主 要 结 果

记　$R(t)=\int_{t_0}^{t}r(s)ds\ (t\geqslant t_0)$，显然当$t\to\infty$时，$R(t)$单调趋向无穷。

定理1　组（E）存在正规解的充要条件是存在某正数λ，使

$$\int_{t_0}^{\infty}a(t)f(\lambda R(t))dt<\infty \tag{2.1}$$

证明　必要性。设$z(t)$是（E）于$[c,\infty)$上的正规解，$c\geqslant t_0$，则对$t\geqslant c$，$x(t)>0$，$y(t)>0$，$\dot y(t)\leqslant 0$，$y(\infty)$存在有限且$y(\infty)\leqslant y(t)\leqslant y(c)$。取$t_1>c$充分大，使当$t\geqslant t_1$时，$R(t)\geqslant(x(c)/y(c))-R(c)$，则由

$$y(t)=y(\infty)+\int_t^{\infty}a(s)f(x(s))g(y(s))ds \tag{2.2}$$

及当$t\geqslant t_1$时

$$\begin{aligned}x(t)&=x(c)+\int_c^t r(s)y(s)ds\leqslant x(c)+y(c)(R(t)-R(c))\\&\leqslant 2y(c)R(t)\end{aligned}$$

得

$$\int_t^{\infty} a(s)f(2y(c)R(s))ds \leqslant (y(t)-y(\infty))/m$$

其中$m=\min g(y)$，$y(\infty)\leqslant y\leqslant y(c)$。取$\lambda=2y(c)$即证得(2.1)式。

充分性。取T充分大，使

$$M\int_T^{\infty} a(s)f(\lambda R(s))ds<\lambda \tag{2.3}$$

其中 $M=\max g(y)$，$\lambda\leqslant y\leqslant 2\lambda$。作组（E）的解 $z(t)$，使 $x(T)=\lambda R(T)$，$y(T)=2\lambda$。下证$y(t)>\lambda$，$t\geqslant T$。若不然，则有$t_2>T$，使$y(t_2)=\lambda$及当$T\leqslant t<t_2$时，$y(t)>\lambda$。对$T\leqslant t\leqslant t_2$，有

$$\begin{aligned}x(t)&=x(T)+\int_T^t r(s)y(s)ds\\&\geqslant x(T)+\lambda(R(t)-R(T))=\lambda R(t)\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}y(t_2)&=2\lambda-\int_T^{t_2} a(s)f(x(s))g(y(s))ds\\&\geqslant 2\lambda-M\int_T^{t_2} a(s)f(\lambda R(s))ds>\lambda\end{aligned} \tag{2.4}$$

由(2.4)所得的矛盾证明$z(t)$是正规解。定理证毕。

定理1的充分性证明启发我们提出这样的问题：在条件(2.1)之下，是否对任意的$c\geqslant t_0$，$\alpha>0$，组（E）存在满足$x(c)=\alpha$的正规解？此问题的答案是否定的，见下例。

例1. 考虑方程组

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-(y^2+1)^2/x^2 \tag{2.5}$$

满足$x(0)=1$，$y(0)=\beta$的解，β为任意实数。从组(2.5)中第二式得

$$-2y\dot{y}/(y^2+1)^2=2\dot{x}/x^2$$

从0到$t>0$积分上式，得

$$\int_{y^2(t)}^{\beta^2} du/(u+1)^2=2(1-(x(t))^{-1}).$$

因此

$$1-(x(t))^{-1}=[(y^2(t)+1)^{-1}-(\beta^1+1)^{-1}]/2<1/2\quad(t\geqslant 0)$$

即$x(t)<2$，$\dot{y}(t)<-1/4$ $(t\geqslant 0)$。故不论$\beta>0$如何大，总存在$t_\beta>0$，使$y(t_\beta)=0$。因此组(2.5)满足$x(0)=1$的解均为非正规解。然而，对$r(t)=1$，$a(t)=1$，$f(x)=1/x^2$，易验证条件(2.1)成立。因此只要$T\geqslant 0$，$\alpha>0$充分大，组（2.5）存在满足$x(T)=\alpha$的正规解。

基于上述考虑，我们对$g(y)$加适当的限制，而得到下述关于组（E）的极限边值问题的结果。

定理2 设函数$g(y)$满足条件

$$\int_0^{\infty}\frac{dy}{g(y)}=\infty \tag{2.6}$$

则对任意的$c\geqslant t_0$，$\alpha>0$和$\lambda>0$，极限边值问题：(E)及

$$x(c)=\alpha,\quad y(\infty)=\lambda \tag{2.7}$$

存在解的充要条件是：对任何$\varepsilon>0$，

$$\int_{t_0}^{\infty} a(t)f((\lambda+\varepsilon)R(t))dt<\infty \tag{2.8}$$

证明 必要性。设$z(t)$是问题（E）及（2.7）的解。则由

$$y(t)=\lambda+\int_t^{\infty} a(s)f(x(s))g(y(s))ds \quad (t\geqslant c)$$

知，存在$t_1\geqslant c$充分大，使$t\geqslant t_1$时，

$$\int_t^{\infty} a(s)f(x(s))g(y(s))ds<\varepsilon/2$$

故当$t\geqslant t_1$时，$y(t)<\lambda+\frac{1}{2}\varepsilon$。从而

$$\begin{aligned}x(t)&\leqslant\alpha+\int_c^{t_1} r(s)y(s)ds+\left(\lambda+\frac{1}{2}\varepsilon\right)(R(t)-R(t_1))\\&=\left(\lambda+\frac{1}{2}\varepsilon\right)R(t)+\alpha+\int_c^{t_1} r(s)y(s)ds-\left(\lambda+\frac{1}{2}\varepsilon\right)R(t_1)\\&<(\lambda+\varepsilon)R(t)\end{aligned}$$

只要$t\geqslant t_2\geqslant t_1$，其中$t_2$使$R(t_2)>(2/\varepsilon)\left[\alpha+\int_c^{t_1} r(s)y(s)ds-\left(\lambda+\frac{1}{2}\varepsilon\right)R(t_1)\right]$。记$m=\min g(y)$，$\lambda\leqslant y\leqslant\lambda+\varepsilon/2$，则（2.8）式可由下面的不等式得到：

$$\int_{t_2}^{\infty} a(t)f(x(t))g(y(t))dt>m\int_{t_2}^{\infty} a(t)f((\lambda+\varepsilon)R(t))dt$$

充分性。记$z(t,\beta)=(x(t,\beta),\ y(t,\beta))$为组（E）满足$x(c,\beta)=\alpha$，$y(c,\beta)=\beta$的解。令$L=\{\beta:y(t,\beta)<0$对某个$t\geqslant c$成立，或者$y(\infty,\beta)<\lambda\}$及$U=\{\beta:y(\infty,\beta)>\lambda\}$。下证$L$和$U$均为非空开集。

L显然非空。设$\beta_1\in L$，则由引理知，$(-\infty,\ \beta_1]\subset L$。若有$\bar{t}\geqslant c$，使$y(\bar{t},\beta_1)<0$，则根据假设（iii）中解对初值的连续相依性，总能找到$\beta_2>\beta_1$，使$y(\bar{t},\beta_2)<0$，从而$\beta_2\in L$。又若β_1使$y(\infty,\beta_1)=\lambda_1<\lambda$，则可取$\delta>0$充分小，使$\lambda_1+3\delta\leqslant\lambda$并有$t_3\geqslant c$，$y(t_3,\beta_1)=\lambda_1+\delta$。由解对初值的连续性，又存在$\beta_2>\beta_1$，使$y(t_3,\beta_2)<\lambda_1+2\delta$。又由引理，$y(t,\beta_2)\geqslant y(t,\beta_1)\geqslant\lambda_1$，$t\geqslant c$，因此$z(t,\beta_2)$是正规解，故极限$y(\infty,\beta_2)$存在且$y(\infty,\beta_2)\leqslant\lambda_1+2\delta\leqslant\lambda-\delta<\lambda$，即$\beta_2\in L$。因此$\beta_1$是$L$的内点，这证明$L$是开集。

为证U非空，取$\beta>0$充分大，使

$$G(\beta)>G(\lambda+1)+\int_c^{\infty} a(s)f((\lambda+1)R(s)-(\lambda+1)R(c))ds \tag{2.9}$$

其中$G(y)=\int_0^y ds/g(s)$，$y\geqslant 0$。因当$R(t)\geqslant 2(\lambda+1)R(c)$时，$(\lambda+1)(R(t)-R(c))\geqslant(\lambda+1/2)R(t)$，故由（2.8）知（2.9）式右端有定义。下证$y(t,\beta)>\lambda+1$，$t\geqslant c$。若不然，则有$t_4>c$，使$y(t,\beta)>\lambda+1$，$c\leqslant t<t_4$，而$y(t_4,\beta)=\lambda+1$。当$c\leqslant t\leqslant t_4$时，有

$$x(t,\beta)=\alpha+\int_c^t r(s)y(s,\beta)ds>\alpha+(\lambda+1)(R(t)-R(c))$$

从而

$$\begin{aligned}G(y(t_4,\beta))&=G(\beta)-\int_c^{t_4} a(s)f(x(s,\beta))ds\\&\geqslant G(\beta)-\int_c^{t_4} a(s)f((\lambda+1)(R(s)-R(c)))ds>G(\lambda+1)\end{aligned}$$

因函数$G(y)$递增，故$y(t_4,\beta)>\lambda+1$，此与t_4的定义矛盾。此矛盾证明$y(\infty,\beta)\geqslant\lambda+1$，$\beta\in U$，$U$非空。

对任意的$\beta_3\in U$，由引理知，$[\beta_3,\infty)\subset U$。设$y(\infty,\beta_3)=\lambda_3>\lambda=\lambda_3-3\eta$，$\eta>0$，取$t_5>c$充分大，使

$$\int_{t_5}^{\infty}a(s)f((\lambda+\eta)R(s))ds<G(\lambda+3\eta)-G(\lambda+2\eta) \tag{2.10}$$

且

$$R(t_5)>|(\lambda+2\eta)R(c)-\alpha|/\eta \tag{2.11}$$

根据假设（iii）及$y(t_5,\beta_3)>\lambda_3$，可找到$\beta_4<\beta_3$，$\beta_3-\beta_4$充分小，使

$$y(t_5,\beta_4)\geqslant\lambda+3\eta \tag{2.12}$$

我们要证当$t\geqslant t_5$时，

$$y(t,\beta_4)>\lambda+2\eta \tag{2.13}$$

若不然，令$t_6=\inf\{t>t_5:y(t,\beta_4)\leqslant\lambda+2\eta\}$，则$t_6>t_5$，当$t_5\leqslant t<t_6$时，$y(t,\beta_4)>\lambda+2\eta$，而

$$y(t_6,\beta_4)=\lambda+2\eta \tag{2.14}$$

当$t_5\leqslant t\leqslant t_6$时，由（2.11）式得

$$\begin{aligned}x(t,\ \beta_4)&=\alpha+\int_c^t r(s)y(s,\beta_4)ds\\&\geqslant\alpha+(\lambda+2\eta)(R(t)-R(c))\\&\geqslant(\lambda+\eta)R(t)\end{aligned} \tag{2.15}$$

又由(2.10)，(2.12)和(2.15)诸式，得

$$\begin{aligned}G(y(t_6,\beta_4))&=G(y(t_5,\ \beta_4))-\int_{t_5}^{t_6}a(s)f(x(s,\beta_4))ds\\&\geqslant G(\lambda+3\eta)-\int_{t_5}^{t_6}a(s)f((\lambda+\eta)R(s))ds\\&>G(\lambda+2\eta)\end{aligned}$$

与（2.14）式矛盾。(2.13)式说明$\beta_4\in U$，因此U是开集。这证明集$B=\{\beta:y(\infty,\beta)=\lambda\}$非空。定理得证。

推论 若$g(y)$对$y\geqslant0$不增，则极限边值问题：组（E）及（2.7）的解存在唯一的充要条件是（2.8）式对任何$\varepsilon>0$成立。

证明 实际上从引理知，若集$B=\{\beta:y(\infty,\beta)=\lambda\}$非空，则必为单点集。故由定理2直接得此推论。

例2． 考察二阶方程组

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-\exp(t-x)/t\qquad(t\geqslant1) \tag{2.16}$$

这里$r(t)=1$，$R(t)=t-1$，$a(t)=e^t/t$和$f(x)=e^{-x}$，因此对$\lambda=1$及任何$\varepsilon>0$，(2.8) 式成立。根据定理2后面的推论，对任何$c\geqslant1$，$\alpha>0$，组（2.16）满足$x(c)=\alpha$，$y(\infty)=1$的解存在唯一，例如，满足$x(1)=1$，$y(\infty)=1$的解是$x(t)=t+\log t$，$y(t)=1+\dfrac{1}{t}$。但因为对$\varepsilon=0$，条件(2.8)不再成立，故（2.16）不存在使$0\leqslant y(\infty)<1$的正规解。

此例说明，在定理2中，条件（2.8）对$\varepsilon=0$成立是不必要的。

下面我们研究组（E）的有界正规解。

定理3 组（E）存在有界正规解的充要条件是

$$\int_{t_0}^{\infty}a(t)R(t)dt<\infty \tag{2.17}$$

证明 必要性。设$z(t)$是在$[c,\infty)$上的有界正规解，$x(c)=\alpha>0$，$y(c)=\beta>0$，$x(\infty)=A$，$y(\infty)=0$。由于对一切$t\geqslant c$，

$$y(t)=\int_t^\infty a(s)f(x(s))g(y(s))ds$$

$$x(t)=A-\int_t^\infty (R(s)-R(t))a(s)f(x(s))g(y(s))ds$$

及$\alpha\leqslant x(t)\leqslant A$，$0\leqslant y(t)\leqslant\beta$，我们有

$$A-\alpha\geqslant mf(A)\int_c^\infty (R(t)-R(c))a(t)dt \tag{2.18}$$

其中$m=\min g(y)$，$0\leqslant y\leqslant\beta$。从（2.18）立即知（2.17）成立。

充分性。对任意的$\alpha>0$，$\beta_0>0$，由条件（2.17）可取$c\geqslant t_0$充分大，使

$$M_0f(\alpha)\int_c^\infty a(t)dt<\frac{1}{2}\beta_0 \tag{2.19}$$

其中$M_0=\max g(y)$，$0\leqslant y\leqslant\beta_0$。记$z(t,\beta)$为组（E）满足$x(c,\beta)=\alpha$和$y(c,\beta)=\beta$的解。再记$L=\{\beta$: 存在某个$t\geqslant c$，使$y(t,\beta)<0\}$，$U=\{\beta:y(\infty,\beta)>0\}$。用与定理2中类似的方法，可证$L$是非空开集，且若$\beta\in L$，则$(-\infty,\beta]\subset L$。下证$\beta_0\in U$。实际上对一切$t\geqslant c$，$y(t,\beta_0)>\beta_0/2$。若不然，设$t_1=\inf\{t\geqslant c:y(t,\beta_0)\leqslant\beta_0/2\}$，则$t_1>c$，$y(t_1,\beta_0)=\beta_0/2$，且对$c\leqslant t<t_1$，$\beta_0/2<y(t,\beta_0)\leqslant\beta_0$。另一方面，当$c\leqslant t\leqslant t_1$时，$x(t,\beta_0)\geqslant\alpha$，故

$$y(t_1,\beta_0)=\beta_0-\int_c^{t_1} a(s)f(x(s,\beta_0))g(y(s,\beta_0))ds$$

$$\geqslant\beta_0-f(\alpha)M_0\int_c^{t_1} a(s)ds>\frac{1}{2}\beta_0$$

此与t_1的定义矛盾。这证明集U非空。又类似定理2的证法，可证U是开集，且若$\beta\in U$，则$[\beta,\infty)\subset U$。于是，集$B=\{\beta:y(\infty,\beta)=0\}$非空。

任取$\beta\in B$，为简单计，记$z(t)=z(t,\beta)$。由$y(\infty)=0$及$x(t)\geqslant\alpha$，$t\geqslant c$，得

$$y(t)=\int_t^\infty a(s)f(x(s))g(y(s))ds\leqslant Mf(\alpha)\int_t^\infty a(s)ds,$$

其中$M=\max g(y)$，$0\leqslant y\leqslant\beta$。对任意两点$t'$和$t''$，$t''>t'\geqslant c$，有

$$x(t'')-x(t')=\int_{t'}^{t''}r(s)y(s)ds$$

$$\leqslant Mf(\alpha)\int_{t'}^{t''}r(s)\left(\int_s^\infty a(u)\,du\right)ds$$

$$\leqslant Mf(\alpha)\int_{t'}^\infty (R(u)-R(t'))a(u)du$$

因此，由条件（2.17）及 Cauchy 收敛原理知，极限$x(\infty)$存在且有限，即$z(t)$是组（E）的有界正规解。定理证毕。

下面的例子说明：条件（2.17）并不能保证对任何$c\geqslant t_0$，$\alpha>0$，组（E）均有满足$x(c)=\alpha$的有界正规解。

例 3. 在二阶方程组

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-\frac{8}{t^3}(1+y^2)\left(1+\frac{1}{x}\right)(t\geqslant1) \tag{2.19}$$

中，对应的$r(t)=1$，$R(t)=t-1$，$a(t)=8/t^3$，因此条件（2.17）成立。由定理3，对充分大的$c>1$，组（2.19）存在于$[c,\infty)$上的有界正规解。但取$c=1$，对任何的$\alpha>0$，组(2.19)满足$x(1)=\alpha$的解，均为非正规解。实际上，设$z(t)$是这样一个解，在（2.19）的第二式两端同除以$-(1+y^2)$，再从1到$t>1$积分，得

$$\pi>\int_{y(t)}^{y(1)}\frac{dy}{y^2+1}=\int_1^t\frac{8}{s^3}\left(1+\frac{1}{x(s)}\right)ds\geqslant 4\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$$

因此 $t<2/\sqrt{4-\pi}$，即$z(t)$是非正规解。这证明组（2.19）不存在满足$x(1)=\alpha$的有界正规解。

考虑到例3中的情形，我们在下面的关于组（E）的极限边值问题的结果中，对$g(y)$加适当的限制。

定理4 设函数$g(y)$满足条件(2.6)，则对任何$c\geqslant t_0$，$\alpha>0$，极限边值问题：(E)及

$$x(c)=\alpha,\ y(\infty)=0,\ x(\infty)=\mathrm{const}>0 \tag{2.20}$$

存在解的充要条件是（2.17）式成立。

证明 由于问题（E）及（2.20）的解是一个有界正规解，故必要性由定理3直接得到。而对充分性，只要证明集$U=\{\beta:y(\infty,\beta)>0\}$非空就够了，这里$z(t,\beta)$定义如定理3之中。取$\beta$充分大，使$G(\beta)>G(1)+f(\alpha)\int_0^\infty a(s)ds$，用定理3充分性证明中的方法，可证$y(t,\beta)>1$，$t\geqslant c$。因此$\beta\in U$，$U$非空。证明的其他部分完全与定理3的证明类似，故从略。

推论 若函数$g(y)$对$y\geqslant 0$不增，则极限边值问题：组（E）及（2.20）的解存在唯一的充要条件是（2.17）式成立。

参考文献

[1] 梁中超，二阶非线性微分方程在无穷区间上的边值问题，应用数学学报，4(1981)，272—279.

[2] Taliaferro, S., On the positive solutions of $y''+\phi(t)y^{-\lambda}=0$, *Nonlinear Analysis*, 2(1978), 437—446.

Proper Solutions and Limit Boundary Value Problems of Nonlinear Second-Order Systems of Differential Equations

Liang Zhong-chao

(*Shandong Oceanography College, Qingdao*)

Chen Shao-zhu

(*Shandong University, Jinan*)

Abstract

For the system of differential equations

$$\dot{x}=r(t)y,\ \dot{y}=-a(t)f(x)g(y),$$

where $a(t)>0$, $r(t)>0$ for $t\geqslant t_0$, $f(x)>0$, and is decreasing for $x>0$, $g(y)>0$, we give necessary and sufficient conditions of the existence of a proper solution, a bounded proper solution or solutions of two kinds of boundary value problems on an infinite interval $[c,\infty)$, $c\geqslant t_0$. Several examples are given to illustrate the conditions of these results.