应用数学和力学，第6卷第10期（1985年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非保守系统的积分不变量及其在现代物理中的应用

刘成群　　罗诗裕

（重庆大学）　（重庆交通学院）

（李　骊推荐，1985年2月13日收到）

摘　要

本文导出了非保守系统的庞卡勒-卡当（Poincaré-Cartan）积分不变量和庞卡勒通用积分不变量．并以积分不变量为工具，研究了三度对称螺旋扇回旋加速器中粒子的非线性振动．结果表明，该方法是成功的．

一、引　言

众所周知，庞卡勒-卡当（Poincaré-Cartan）积分不变量和庞卡勒通用积分不变量在经典力学，特别是近代物理中占有十分重要的地位[1]．但是，现有的理论只限于保守系统，而且到目前为止，尚未有人用积分不变量为工具来计算动力学响应问题．本文导出了非保守系统的庞卡勒-卡当积分不变量和庞卡勒通用积分不变量，并以积分不变量为工具，分析和计算了三度对称螺旋扇回旋加速器中粒子的非线性振动，讨论了系统的相平面特征和动力学稳定性，导出了系统的临界参数，并用劳斯-胡维茨（Routh-Hurwitz）判据导出了相同结果．本文表明，非保守系统的积分不变量在加速器物理中找到了成功的应用．

二、积分不变量

考虑一个n自由度的完整动力学系统，q^i为广义坐标，p_i为广义动量，t为时间．系统的保守部分用拉格朗日函数$L(t,q^i,\dot{q}^i)$或相应的哈密顿函数$H(t,q^i,p_i)=p_i\dot{q}^i-L$来描述，这里$\dot{q}^i=dq^i/dt$，$p_i\equiv\partial L/\partial\dot{q}^i$．广义保守力以$Q_i=Q_i(t,q^i,p_i)$表示．根据文[2]，我们假定变分算子$\delta$和微分算子$d$满足如下交换关系

$$\delta dq^i=d\delta q^i+Q_j\delta q^j dq^i/(2L_2+L_1) \tag{2.1}$$

即这两个算子是不可交换的，其中L_1和L_2分别是拉格朗日函数$L=L_2+L_1+L_0(t,q^i)$中关于广义速度的一次项和二次项，我们约定重复指标表示求和．

系统运动的控制方程是哈密顿正则方程

$$\dot{q}^i=\partial H/\partial p_i,\ \dot{p}_i=-\partial H/\partial q^i+Q_i \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.2}$$

因此，哈密顿函数对时间的全导数是

$$dH/dt=\partial H/\partial t+Q_i\partial H/\partial p_i \tag{2.3}$$

设运动的初始时刻和终了时刻，以及初始坐标和终了坐标都不是固定的，而是参数α的函数，即

$$t_0=t_0(\alpha),\ q_0^i=q_0^i(\alpha);t_1=t_1(\alpha),q_1^i=q_1^i(\alpha)$$

在这种情况下，哈密顿作用量

$$W=\int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} Ldt \tag{2.4}$$

的变分量[3]

$$\delta W=L\delta t\Big|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta\dot{q}^i\right)dt \tag{2.5}$$

利用交换关系(2.1)和端点上的变分关系[3]

$$\delta q^i|_{t=t_\lambda}=\delta q_{(\lambda)}^i-q_{(\lambda)}^i\delta t_\lambda \qquad (\lambda=0,1) \tag{2.6}$$

完成分部积分，(2.5)式变成

$$\delta W=(p_i\,\delta q^i-H\,\delta t)\Big|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}+Q_i\right)\delta q^i dt \tag{2.7}$$

在任一α值所对应的路径都是正路（即$q^i=q^i(t,\alpha)$ $(i=1,2,\cdots,n)$是一簇正路）的特殊情况下，对任一α，我们都有

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}=Q_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{2.8}$$

于是，由（2.7）式我们有

$$\delta W=(p_i\,\delta q^i-H\,\delta t)\Big|_{t_0}^{t_1} \tag{2.9}$$

采用[3]中的类似方法，我们有

定理 1 若曲线C是围绕非保守系统的正路管的任意闭曲线，则沿此闭曲线的曲线积分

$$I=\oint_C(p_i\delta q^i-H\delta t) \tag{2.10}$$

是庞卡勒-卡当型积分不变量.

若曲线C是由非保守系统的同时状态所组成，则$\delta t=0$，于是，由(2.10)式直接可得

定理 2 若围绕非保守系统的正路管的闭曲线C是由该系统的同时状态所组成，则曲线积分

$$I_1=\oint_C p_i\delta q^i \tag{2.11}$$

是庞卡勒型通用积分不变量.

现在我们来证明一个逆命题. 设非保守系统的正路由下式给定

$$\dot{q}^i=R^i,\ \dot{p}_i=\Pi_i+Q_i \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.12}$$

利用交换关系(2.1)，将(2.11)式对时间求导，可得1)

$$\frac{dI_1}{dt}=\oint_C(\Pi_i\delta q^i-R^i\delta p_i) \tag{2.13}$$

因此，由 $dI_1/dt=0$ 知表达式 $\Pi_i\delta q^i-R^i\delta p_i$ 必是某一函数的虚全微分。为方便计，我们以 $-\delta H$ 表示之，于是，我们有

$$\frac{dI_1}{dt}=\oint_c -\delta H \tag{2.14}$$

其中

$$\delta H=\frac{\partial H}{\partial q^i}\delta q^i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i \tag{2.15}$$

这就意味着下列等式成立

$$R^i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \Pi_i=-\frac{\partial H}{\partial q^i} \tag{2.16}$$

由此我们有

定理 3 如果曲线积分(2.11)是满足交换关系 (2.1) 的积分不变量 ($dI_1/dt=0$)，则其正路的微分方程就是保守系统的正则方程(2.2)。

三、加速器中粒子的非线性振动

非保守系统积分不变量的一个重要应用是分析加速器中粒子的非线性振动。本节的目的试图利用非保守系统的积分不变量来描述三度对称螺旋扇回旋加速器中粒子的动力学行为。

在具有中等能量的三度对称螺旋扇回旋加速器中，或者在能量比较低的径向扇回旋加速器中，粒子的径向自由振动频率总是接近于1。正是由于$\nu_x=3/3$非线性共振线的作用，系统的稳定性对磁场扰动表现得特别敏感。当这种扰动达到某个临界值时，系统就变得不稳定。因此，有必要对这条共振线附近的粒子运动行为作一分析，并导出扰动场的临界参数（其中包括磁场和梯度场的临界参数）。其方法是利用上面导出的非保守系统的积分不变量。

如果我们只关心系统的一次谐波解，起主要作用的扰动将是一扇磁场扰动和两扇梯度场扰动。在$\nu_x=1$共振线附近，粒子运动方程可表示为

$$\dot{x}=p,\quad \dot{p}=-\nu_x^2x+\varepsilon[kx^2\cos3\varphi+\eta_1\cos\varphi+\eta_2x\cos2\varphi] \tag{3.1}$$

其中x是粒子偏离平衡轨道的距离（以平衡轨道半径为单位），$\dot{x}=dx/d\varphi$，$\varphi=\nu_xt$，而

$$\eta_1=\frac{\eta_1'}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}\ \frac{\Delta B_1}{B},\quad \eta_2=\frac{\eta_2'}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}\ \frac{1}{B}\ \frac{\partial\Delta B_2}{\partial x} \tag{3.2}$$

是扰动场的一次谐波振幅和二次谐波梯度振幅，ΔB_1和ΔB_2是扰动场的一次谐波和二次谐波梯度公差，k'是非线性项系数，$k=k'/\varepsilon$ (ε 是小量)，它的大小决定于系统的非线性强度。为了方便，我们把$\eta_1=\eta_2=0$的系统称做无扰动系统，把$\eta_1\neq0$或 $\eta_2\neq0$ 的系统称为扰动系统。

系统的哈密顿可以表示为

$$H=p^2/2+\nu_x^2x^2/2 \tag{3.3}$$

非保守力为

$$Q=\varepsilon(kx^2\cos3\varphi+\eta_1\cos\varphi+\eta_2x\cos2\varphi) \tag{3.4}$$

在该问题中，交换关系(2.1)变为

---

1)对任意两个函数u和v，沿闭曲线C的积分恒有

$$\oint_C u\ \delta v=-\oint_C v\delta u$$

$$p\delta\dot{x}=p\frac{d\delta x}{d\varphi}+\varepsilon(kx^2\cos3\varphi+\eta_1\cos\varphi+\eta_2 x\cos2\varphi)\delta x \tag{3.5}$$

设方程(3.1)的近似解为

$$x=a(\varphi)\cos\psi,\quad p=\dot{x}=-a(\varphi)\sin\psi \tag{3.6}$$

其中

$$\psi=\varphi+\vartheta(\varphi) \tag{3.7}$$

$a(\varphi)$和$\vartheta(\varphi)$是变数φ的待定函数。现在我们考虑庞卡勒通用积分不变量(2.11)和哈密顿函数(3.3)关于变量ψ的平均值

$$\langle I_1\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\oint_c p\delta x\right)d\psi,\ \langle H\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Hd\psi \tag{3.8}$$

由(3.6)和(3.7)式可得

$$\dot{x}=\dot{a}\cos\psi-a\sin\psi-a\dot{\vartheta}\sin\psi,\quad \delta x=\delta a\cos\psi-a\delta\vartheta\sin\psi \tag{3.9}$$

利用(3.6)和(3.9)式，可将$\langle I_1\rangle$化为

$$\langle I_1\rangle=\oint_c\frac{a^2\delta\vartheta}{2} \tag{3.10}$$

将(3.6)和(3.7)式代入方程(3.3)，可得

$$\langle H\rangle=\frac{\nu_x^2a^2}{2} \tag{3.11}$$

此外，由(3.5)式可知

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p\delta\dot{x}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[p\frac{d\delta x}{d\varphi}+\varepsilon(kx^2\cos3\varphi+\eta_1\cos\varphi+\eta_2x\cos2\varphi)\right]\delta x d\psi \tag{3.12}$$

将(3.6)，(3.7)和(3.9)式代入(3.12)式，积分后可得

$$a^2\,\delta\dot{\vartheta}=a^2\frac{d\delta\vartheta}{d\varphi}+\frac{1}{\pi}(A_1\delta a-aB_1\delta\vartheta) \tag{3.13}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}A_1&=\int_0^{2\pi}\varepsilon(kx^2\cos3\varphi+\eta_1\cos\varphi+\eta_2x\cos2\varphi)\cos\psi d\psi\\B_1&=\int_0^{2\pi}\varepsilon(kx^2\cos3\varphi+\eta_1\cos\varphi+\eta_2x\cos2\varphi)\sin\psi d\psi\end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

根据上面的分析可以导出

$$\frac{d\langle I_1\rangle}{d\varphi}=\oint_c(-\delta\langle H\rangle) \tag{3.15}$$

由(3.10)和(3.11)式，可将上式具体表示为

$$\oint_c\left[a\dot{a}\delta\vartheta+\frac{a^2}{2}\delta\dot{\vartheta}+\frac{a^2}{2}\frac{d\delta\vartheta}{d\varphi}\right]=\oint_c(-\nu_x^2a\delta a) \tag{3.16}$$

将(3.13)式代入(3.16)式，完成积分，再集中带δa和$\delta\vartheta$的项，可得

$$\left.\begin{aligned}\dot{a}&=-\frac{k'a^2}{8}\sin3\vartheta-\frac{\eta_1'}{2}\sin\vartheta-\frac{\eta_2'}{4}a\sin2\vartheta\\\dot{\vartheta}&=\Delta\nu_x-\frac{k'a}{8}\cos3\vartheta-\frac{\eta_1'}{2a}\cos\vartheta-\frac{\eta_2'}{4}\cos2\vartheta\end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

其中我们利用了近似关系$\nu_x^2-1\doteq2(\nu_x-1)=2\Delta\nu_x$（注意我们关心的是$\nu_x=1$共振线附近的行为）。

让我们分析下面两种情况。

（1） 无扰动系统的定常振动及其相平面特征。

定常振动的定义由 $da/d\varphi=d\vartheta/d\varphi=0$ 给出，由此可将无扰动系统的定常振动表示为

$$\frac{k'}{8}a^2\sin 3\vartheta=0,\ \Delta\nu_x-\frac{k'a}{8}\cos 3\vartheta=0 \tag{3.18}$$

定常振动给出了相平面内的奇点分布，这些奇点可能是稳定的，也可能是不稳定的。由(3.18)式可找到无扰动系统的奇点为

$$a=0 \qquad (\vartheta\text{任意}) \tag{3.19}$$

$$a=a_0=\frac{8\Delta\nu_x}{k'},\ \vartheta=0,\ \pm 2\pi/3 \tag{3.20}$$

方程(3.19)和(3.20)给出了相平面上四个奇点，(3.19)式给出的是稳定奇点，(3.20)式给出的是三个不稳定奇点。连接这三个不稳定奇点的分界线所包围的区域称为系统的稳定区，它的大小直接决定了系统的稳定性。(3.20) 式表明，稳定区的半径 a_0 与系统的非线性项系数 k'有关，它越大，系统的稳定性越差。

（2） 当$\eta_1'=0$时系统的定常振动及其相平面特征。

系统的奇点由方程

$$\frac{2a^3}{a_0}\sin 3\vartheta+2\gamma' a^2\sin 2\vartheta=0,\ 1-\frac{a}{a_0}\cos 3\vartheta-\gamma'\cos 2\vartheta=0 \tag{3.21}$$

给出，其中

$$\gamma'=\eta_2'/4\Delta\nu_x \tag{3.22}$$

由(3.21)式可得相平面上的奇点

$$\vartheta=0,\ a=0\ \text{和}\gamma'=1-\frac{a}{a_0} \tag{3.23}$$

$$\cos\vartheta=-\frac{a}{2a_0},\ \gamma'=\frac{a^2}{a_0^2}-1 \tag{3.24}$$

(3.23)式表明，相平面上的原点始终是一个奇点，随着γ'的增加，原来位于 $a=a_0$，$\vartheta=0$ 的那个奇点将沿着(3.23)式给出的轨迹运动；当 $\gamma'=\gamma_c'=1$ 时，这个奇点在原点和稳定奇点相遇，稳定区消失，相应的状态称为临界状态。当$1<\gamma'<3$时，新的稳定区形成，当$\gamma'=2$时，新稳定区的面积最大，同$\gamma'=0$时的稳定区相比，除原点沿$\vartheta=\pi$轴移动了$a=a_0$外，其它特征完全一样；如果γ'继续增加，新稳定区逐步变小，当 $\gamma'=3$ 时，新稳定区消失，系统再次处于临界状态。实际上，由于新稳定区很难形成，系统的临界状态仍由

$$\gamma_c'=1 \tag{3.25}$$

决定。由(3.22)式可导出动力学允许的临界场梯度为

$$\eta_2'=4\Delta\nu_x \tag{3.26}$$

对于$\eta_2'=0$的情形，可用完全类似的方法导出系统的临界磁场公差

$$\eta_1'=\frac{a_0}{2}\Delta\nu_x \tag{3.27}$$

四、劳斯-胡维茨判据及其系统的稳定性

现在我们从劳斯-胡维茨判据出发导出上面结果。我们以$\eta_1'=0$为例进行分析。令

$$\frac{da^2}{d\varphi}=Q(a^2,\vartheta),\quad \frac{d\vartheta}{d\varphi}=P(a^2,\vartheta) \tag{4.1}$$

根据劳斯-胡维茨判据，方程(2.8)的特征方程为[5]

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0 \tag{4.2}$$

当$\eta_1'=0$时，上式中的系数

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}&=[\partial Q(a^2,\vartheta)/\partial a^2]_s=\left(-\frac{3}{8}k'a\sin 3\vartheta-\frac{\eta_2'}{2}\sin 2\vartheta\right)_s\\
a_{12}&=[\partial Q(a^2,\vartheta)/\partial\vartheta]_s=\left(-\frac{3}{4}k'a^3\cos 3\vartheta-\eta_2'a^2\cos 2\vartheta\right)_s\\
a_{21}&=[\partial P(a^2,\vartheta)/\partial a^2]_s=\left(-\frac{k'}{16a}\cos 3\vartheta\right)_s\\
a_{22}&=[\partial P(a^2,\vartheta)/\partial\vartheta]_s=\left(\frac{3}{8}k'a\sin 3\vartheta+\frac{\eta_2'}{2}\cos 2\vartheta\right)_s
\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

其中脚标s表示取平衡轨道的值．劳斯-胡维茨判据表明，当且仅当条件

$$a_{11}+a_{22}<0,\ \ a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0 \tag{4.4}$$

满足时，系统才是稳定的，而当

$$a_{11}+a_{22}=0,\ \ a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0 \tag{4.5}$$

时，系统处于临界状态，令$\vartheta=0$，由(4.3)式可得

$$a_{11}=a_{22}=0,\ \ a_{12}=-\frac{3}{4}k'a^3,\ a_{21}=-\frac{k'}{16a} \tag{4.6}$$

将(4.6)式代入(4.5)式，可知当

$$a=0\quad 和\quad a=-\frac{2}{3}a_0\gamma' \tag{4.7}$$

时，系统处于临界状态，将(4.7)式代入(3.23)式可导出系统的临界参数

$$\gamma_c'=1\quad 和\quad \gamma_c'=3 \tag{4.8}$$

这正是前面导出的结果．

本文导出了非保守系统的积分不变量，并由此出发分析了回旋加速器的定常振动和相平面特征，进一步用劳斯-胡维茨判据讨论了系统的稳定性，导出了系统的临界参数．

参 考 文 献

[1] 刘成群、徐铭陶，非完整保守系统的积分不变量及其应用，第十六届国际理论及应用力学会议论文，丹麦（1984）．

[2] Vujanovic, B., A variational principle for nonconservative dynamical systems, *Z. Angew. Math. Mech.*, **55** (1975), 321.

[3] 甘特马赫，《分析力学讲义》，人民教育出版社（1980），93—96.

[4] Gordon, M. M., et al., Effects of imperfections on radial stability in a three-sector cyclotion, *Nuclear Instruments and Methods*, **18, 19** (1962), 243.

[5] Hayashi, C., *Nonlinear Oscillation in Physical Systems*, McGrow-Hill Book Company, New York (1964).

Integral Invariant in Noncoservative Systems and Its Application in Modern Physics

Liu Cheng-qun

(Chongqing University, Chongqing)

Luo Shi-yu

(Chongqing Jiaotong Institute, Chongqing)

Abstract

In this paper, the Poincaré and Poincaré-Cartan integral invariants in nonconservative systems are established. According to the integral invariant, the non-linear oscillation of particles in 3-folded symmetry spiral sector cyclotron is investigated. It turns out that the method is successful.