应用数学和力学，第6卷第10期（1985年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

泛系关系族的泛对称与不动泛系定理*

吴　陈

（武汉数字工程研究所，1984年6月29日收到）

摘　要

本文在泛系方法论的框架下，将泛对称与不动泛系定理的一些结果推广到了二元关系族的情形。具体地讨论了对于有限论域上的一族二元关系何时存在公共的不动子集的问题，得到了几个确定二元关系族是否存在公共的不动子集的简括的判别定理。其结果推广了传统的不动点理论中有关映射族是否存在公共的不动点的主要判别定理——Markov-Kakutani定理。

一、引　言

在数学、力学和物理学的研究中，一个十分重要的内容是探讨那些能够本质地揭示事物特征的概念，诸如各种对称性、守恒性、稳定性、周期性、等等。这是因为它们都揭示了事物这样一个客观规律，即处在运动、变化和发展过程中的事物有着保持相对静止和相对不变的性质。泛系方法论在研究了上述诸概念所揭示的这种本质涵义后，作了进一步的概括和推广，并提出了一个称之谓广义对称或泛对称的概念。其简括的数学描述表示为某些集合或结构经某个转化后保持不变或守恒。而转化的形式可以是多种多样的。一种较具体而典型的形式就是泛系关系。特别地，我们可以用二元关系来描述这种泛系关系。

不动泛系定理所研究的正是这种意义下的不变性或守恒性。它所揭示的深刻涵义是各种稳定性和守恒性的本质。

自文献[1,2,3]发表了一系列有关不动泛系定理的带本质性的结果以来，有关的研究很快就取得了可喜的进展。在这里，我们摘要地介绍一下有关的主要结果，这些结果是以下的讨论将要引用的。在此出现的符号可参见下一节或有关的文献。

在文献[1,2,3]中，证明了这样一个定理：

定理Ⅰ　设$g\subset G^2$，$F_i\subset G(d\delta_1(g))$，则$F_i\cdot g$，$g\cdot F_i\subset F_i$；若分别有$I(F_i)\leqslant g\cdot g^{-1}$和$I(F_i)\leqslant g^{-1}\cdot g$，则相应地分别有$F_i=g\cdot F_i$和$F_i=F_i\cdot g$成立。其中，$\delta_1(g)=(g\vee g^{-1}\vee g^{(0)})^t$，$F_i\subset G(d\delta_1(g))$表示$F_i\in\max\{Q|Q^2\leqslant\delta_1(g),\ Q\subset G\}$。

定理Ⅰ在很大程度上用新的形式推广了传统的不动点理论中著名的Kakutani型不动点定理。

继文献[1,2,3]，高隆颖，王书基给出了一些判定一个二元关系是否存在不动子集的判别定理，在此仅列述本文将要引用的两个定理如下：

* 吴学谋推荐。

定理Ⅱ 设$f\subset G\times G$。若$f'\wedge f^{(0)}\neq\phi$，则$F(f)\neq\phi$。反之，若$F(f)\neq\phi$且$|G|<\infty$，则$f'\wedge f^{(0)}\neq\phi$。

定理Ⅲ 若$f\in S[G)$，$G_i\subset G(d\delta_1(f))$，$|G_i|>1$，则$G_i=G_i\circ f$。有时，$G_i\subset G(d\delta_1(f))$也记成为$G=\bigcup G_i(d\delta_1(f))$。

此外，李贵华研究了论域为有限时的不动子集的数量特征和结构特征，给出了最小不动子集的存在准则及其计数公式，并把有关的结果推广到了论域为无限的情形。

受他们的工作的影响和启发，我们将有关的一些结果推广到了二元关系族的情形。在论域为有限的情况下，证明一些判别一族二元关系是否存在公共的不动子集的判别定理。其结果可视为传统的不动点理论中有关映射族是否存在公共的不动点的主要判别定理——Markov-Kakutani定理的推广、补充和发展。

对于这种推广，我们有如下的物理解释：一个复杂的大系统在经过一系列的转化后，何时还保持某种泛对称的性质？毫无疑问，这种推广后的探讨是有意义的。

二、预 备 知 识

定义 1 设$\mathscr{A}=\{f_i|f_i\in P(G^2),\ i\in\varLambda\}$为论域$G$上的一族二元关系，其中，$\varLambda$为指标集。若$D\neq\phi$ 且$D\circ f_i=D$ $(i\in\varLambda)$对所有的$f_i\in\mathscr{A}$成立，则称D为$\mathscr{A}$的或f_i的一个公共的不动子集。

取$\mathscr{A}=\{f^{(k)}\}$ $(k=0,1,2,\cdots)$。若f具有不动子集，则由$D\circ f=D$可推出$D\circ f^{(k)}=D\circ f^{(k-1)}=\cdots=D\circ f=D$知道$\mathscr{A}$亦有公共的不动子集。这是一个较直观的二元关系族具有公共的不动子集的例子。

但是，一般来说，一族给定的二元关系具有公共的不动子集的结论却不是成真的。例如，令$\{f_i\}=\{f_1,f_2\}$，$f_1=\{(x_1,\ x_2),\ (x_2,x_1)\}$，$f_2=\{(x_1,x_2),\ (x_2,x_3),\ (x_3,x_2)\}$。容易检验，$f_1$具有唯一的不动子集$\{x_1,x_2\}$，$f_2$具有唯一的不动子集$\{x_2,x_3\}$。因为$\{x_1,x_2\}\neq\{x_2,x_3\}$，所以$\mathscr{A}=\{f_1,f_2\}$不具有任何公共的不动子集。

对于一族给定的二元关系，在什么条件下它们才有公共的不动子集呢？这就是如下所讨论的内容。

定义 2 记$F(f)$为二元关系$f\in P(G^2)$的不动子集全体，即

$$F(f)=\{D|D\circ f=D,\ D\subset G,\ D\neq\phi\}$$

除例外声明，本文所指的某个二元关系f有一个不动子集$D(\subset G)$意为D满足条件$D\circ f=D$且$D\neq\phi$。

显然，若$\mathscr{A}=\{f_i\}$具有公共的不动子集，则它必含在$\bigcap F(f_i)$中。

定义 3 设$\mathscr{B}\subset P(G)$，$f\subset G\times G$。$\mathscr{B}$与f的复合运算$\mathscr{B}\circ f$定义如下：

$$\mathscr{B}\circ f=\{B\circ f|B\in\mathscr{B}\}$$

其中，$B\circ f=\bigcup\limits_{x\in B}x\circ f=\bigcup\limits_{x\in B}\{y|(x,y)\in f,\ y\in G\}$。

命题 1 设$\mathscr{B}\subset P(G)$，$f,g\in P(G^2)$。则$(\mathscr{B}\circ f)\circ g=\mathscr{B}\circ(f\circ g)$。

证明 任取$B\in(\mathscr{B}\circ f)\circ g$。依定义3，我们可知，存在$Q\in\mathscr{B}\circ f$使得$B=Q\circ g$。进一步地，又存在$R\in\mathscr{B}$使得$Q=R\circ f$。于是，$B=Q\circ g=(R\circ f)\circ g=R\circ(f\circ g)$。亦即$(\mathscr{B}\circ f)\circ g\subset\mathscr{B}\circ(f\circ g)$。反之，同样可证$\mathscr{B}\circ(f\circ g)\subset(\mathscr{B}\circ f)\circ g$。命题证毕。

定义 4 设$f,g\subset G\times G$为G上的两个二元关系。若$f\circ g=g\circ f\neq\phi$，则我们称$f$和$g$为可交换的。

为方便起见，我们列述本文中出现的几个引自文献[1,2,3]的数学符号如下：

设G为给定的论域，$\{f_i\}$ $(i=1,2,\cdots)$为G上的一族二元关系，则$(\circ)-\Pi f_i\triangleq f_1\circ f_2\circ\cdots$；$f_i^{(n)}\triangleq\overbrace{f_i\circ\cdots\circ f_i}^{n}$；$f_i^t\triangleq\bigvee_{k=1}^{\infty}f_i^{(k)}$；$f_i^{(0)}=I(G)\triangleq\{(x,x)\mid x\in G\}$；$f_i^{-1}\triangleq\{(x,y)\mid(y,x)\in f_i\}$；$S[G)\triangleq\{h\mid h\wedge h^{-1}\leqslant I(G),\ h\in P(G^2)\}$；$f_i\circ f_j\triangleq\{(x,y)\mid\exists t\in G$使得$(x,t)\in f_i,\ (t,y)\in f_j\}$。

三、具有公共的不动子集的泛系关系族的充分条件

在上一节中，我们介绍了一些预备定义和符号，现在，我们来证明几个判定二元关系族存在公共的不动子集的判定定理。

引理 1 设$f\subset G\times G$为G上的一个二元关系。若$F(f)\neq\phi$，则对任意的集合序列$D_1,D_2,\cdots,D_k\in F(f)$都有$\bigcup_{i=1}^{k}D_i\in F(f)$。

证明 因为$D_i\circ f=D_i(i=1,\cdots,k)$，而且，$\left(\bigcup_{i=1}^{k}D_i\right)\circ f=\bigcup_{i=1}^{k}D_i\circ f=\bigcup_{i=1}^{k}D_i$，所以，我们得知$\bigcup_{i=1}^{k}D_i\in F(f)$。

引理 2 设$f,g\subset G\times G$是G上的两个可交换的二元关系。若$f^t\wedge f^{(0)}\neq\phi$，并且对任意的$x\in G-g\circ G$，$x\circ g\not\subset G-g\circ G$，则由下面的式子：

$$A_0=D,\ A_i=A_{i-1}\circ g,\ i=1,2,\cdots$$

所确定的序列为非空的集合序列。其中，$D\in F(f)$为f的一个不动子集。

证明 我们只需证明$A_i\neq\phi$ $(i=1,2,\cdots)$。

显然，$A_0\neq\phi$，$A_1=A_0\circ g=D\circ g=D\circ f\circ g$。如果存在$x\in D$使得$x\in G-g\circ G$，那么我们从条件$x\circ f\not\subset G-g\circ G$可得，存在$y\in D$且$y\notin G-g\circ G$使得$(x,y)\in f$。于是，$y\in g\circ G$。因而$D\circ g\neq\phi$；如果对任意的$x\in D$都有$x\notin G-g\circ G$，那么此时$D\circ g\neq\phi$就是显而易见的。因此$D\circ g\neq\phi$总是成立的。$A_1\neq\phi$证毕。现在，我们归纳地假定对正整数$k$，$A_k\neq\phi$并来证明$A_{k+1}\neq\phi$。事实上，由$A_k\neq\phi$以及$A_k\circ f=(D\circ g^{(k)})\circ f=D\circ(g^{(k)}\circ f)=D\circ(f\circ g^{(k)})=(D\circ f)\circ g^{(k)}=D\circ g^{(k)}=A_k$可知$A_k\in F(f)$。再由$A_{k+1}=A_k\circ g=A_k\circ f\circ g$并仿上述证明过程可得$A_{k+1}\neq\phi$。引理证毕。

定理 1 设$f,g\in P(G^2)$。若$f\circ g=g\circ f\neq\phi$且对任意的$x\in G-g\circ G$，$x\circ f\not\subset G-g\circ G$，则$F(f)\circ g\subset F(f)$。

证明 任取$B\in F(f)$并令$Q=B\circ g$。依引理 2，我们有$Q\neq\phi$。因为$Q=B\circ g=(B\circ f)\circ g=B\circ(f\circ g)=B\circ(g\circ f)=(B\circ g)\circ f=Q\circ f$，所以我们知道$Q=B\circ g\in F(f)$。亦即$F(f)\circ g\subset F(f)$。

推论 1 设$f,g\in P(G^2)$，$f\circ g=g\circ f\neq\phi$。若$x\circ f\not\subset G-g\circ G$对任意的$x\in G-g\circ G$成立，且$f$只有唯一的不动子集$D$，则$D$也是$f$和$g$的一个公共的不动子集。

定理 2 设$|G|<\infty$，$f,g\subset G\times G$为G上的两个可交换的二元关系。若$f^t\wedge f^{(0)}\neq\phi$且对任意的$x\in G-g\circ G$，$x\circ f\not\subset G-g\circ G$，则$f$和$g$至少存在一个公共的不动子集。

证明 依条件$f^t\wedge f^{(0)}\neq\phi$及定理Ⅱ，我们知道$F(f)\neq\phi$。取$D\in F(f)$并作集合序列$\{A_i\}$

如下：

$$A_0=D,\ A_i=A_{i-1}\circ g,\ i=1,2,\cdots$$

依引理2及定理1，我们又知$A_i\neq\phi$ $(i=0,1,2,\cdots)$且$\{A_0,A_1,\cdots\}\subset F(f)$。因为$|G|<\infty$，我们有$|F(f)|<\infty$。于是，存在两个非负整数$k$，$j$使得$A_k=A_j$ $(k<j)$。令$B=\bigcup_{i=k}^{j-1}A_i$。易知$B\in F(f)$。其次，因为$B\circ g=\left(\bigcup_{i=k}^{j-1}A_i\right)\circ g=\bigcup_{j=k}^{j-1}A_i\circ g=\bigcup_{i=k}^{j-1}A_{i+1}=\bigcup_{i=k}^{j-1}A_i=B$，我们得到$B\in F(f)\cap F(g)$。定理证毕。

引理 3 设$|G|<\infty$，$f_1,f_2,\cdots,f_n$为G上的一族两两可交换的二元关系。若对任意的$f_i(i\neq i_0,\ 1\leqslant i\leqslant n)$，由$x\in G-f_i\circ G$可以导出$x\circ f_{i_0}\not\subset G-f_i\circ G$，其中$i_0$为某个固定的整数且$1\leqslant i_0\leqslant n$，则$(\bigcap F(f_j))\circ f_k\subset\bigcap F(f_j)(1\leqslant k\leqslant n,\ j=1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n)$。

证明 设$Q\in(\bigcap F(f_j))\circ f_k\Rightarrow\forall j\exists D\in F(f_j)$ $(Q=D\circ f_k)$。根据定理1，我们有$Q\in F(f_j)$，即$Q\in\bigcap F(f_j)$。引理证毕。

定理 3 设$|G|<\infty$，$\mathcal{A}=\{f_i\}(i=1,\cdots,n)$为$G$上的一族两两可交换的二元关系。若$f_{i_0}^t\wedge f_{i_0}^{(0)}\neq\phi$ $(1\leqslant i_0\leqslant n)$对某个$f_{i_0}\in\mathcal{A}$成立，并且对任意的$f_i\in\mathcal{A}$ $(i\neq i_0)$和固定的$f_{i_0}\in\mathcal{A}$，由$x\in G-f_i\circ G$可导出$x\circ f_{i_0}\not\subset G-f_i\circ G$，则$\mathcal{A}$至少存在一个公共的不动子集。

证明 不失一般性，我们假设$i_0=1$。

现在，我们对整数n给出归纳证明。

当$n=1,2$时，命题显然成真。于是，我们归纳地假定当$n=k$时命题成立。则当$n=k+1$时，我们取$D\in\bigcap_{i=1}^{k}F(f_i)$ $\left(\bigcap_{i=1}^{k}F(f_i)\neq\phi\text{ 是归纳假设}\right)$并作一个集合序列$\{A_i\}$如下：

$$A_0=D,\ A_i=A_{i-1}\circ f_{k+1},\ i=1,2,\cdots$$

因为$A_0=D\in F(f_{i_0})$，并由引理2，我们知道$A_i\neq\phi$ $(i=0,1,\cdots)$。再由定理1，我们得到$A_i\in\bigcap_{i=1}^{k}F(f_i)$。因为$|G|<\infty$，所以我们有$|\bigcap_{i=1}^{k}F(f_i)|<\infty$。于是，存在两个非负整数$r$，$s$使得$A_r=A_s$ $(r<s)$。令$B=\bigcup_{i=r}^{s-1}A_i$。容易看出$B\in F(f_{k+1})$。显然$B\in\bigcap_{i=1}^{k}F(f_i)$。因此$B\in\bigcap_{i=1}^{k+1}F(f_i)$。即$B$是$f_1$，$f_2,\cdots,f_{k+1}$的一个公共的不动子集。因此，结论对任意的正整数$n$成立。定理得证。

定理3在某种程度上推广了著名的Markov-Kakutani定理。在这里，有关的映射和点相应地分别被换成了二元关系和子集，并且除掉了仿射连续的条件及论域为局部凸空间中的非空凸紧子集的限制。

推论 2 设$|G|<\infty$，$f,g\in P(G^2)$。若$g^{(2)}\circ f=g\circ f\circ g\neq\phi$，$g^t\wedge g^{(0)}\neq\phi$，$x\circ g\not\subset G-f\circ G$对任意的$x\in G-f\circ G$成立，则$f,g$至少存在一个公共的不动子集。

推论 3 设$|G|<\infty$，$f,g\in P(G^2)$。若$g^{(n)}\circ f=g^{(n-k)}\circ f\circ g^{(k)}\neq\phi$ $(n>k\geqslant1$，n,k为两个整数，$k|n)$，$g^t\wedge g^{(0)}\neq\phi$，$x\circ g\not\subset G-f\circ G$对任意的$x\in G-f\circ G$成立，则$f$，$g$至少存在一个公共的不动子集。

定理 4 设$|G|<\infty$，$f,g\in P(G^2)$。若$f\circ g=g\circ f\in S[G)$且$f\circ g\neq\phi$，则$f,g$至少存在一个公共的不动子集。

证明 因为$f\circ g=g\circ f\in S[G)$，$f\circ g\neq\phi$，并根据定理Ⅱ，我们得到$F(f\circ g)\neq\phi$。取$D\in$

$F(f\circ g)$并作集合序列$\{A_i\}$如下：

$$A_0=D,\ A_i=A_{i-1}\circ g,\ i=1,2,\cdots$$

因为 $A_i=A_{i-1}\circ g=\cdots=A_0\circ g^{(i)}=D\circ g^{(i)}$，所以我们可得$A_i\neq\phi$。否则，由$A_i=\phi$可导出$A_i\circ f^{(i)}=\phi$。这与$A_i\circ f^{(i)}=D\circ g^{(i)}\circ f^{(i)}=D\circ(g\circ f)^{(i)}=D\neq\phi$产生矛盾。

又因为$|G|<\infty$，所以存在两个非负整数k，j使得$A_k=A_j(k<j)$。令$B=\bigcup_{i=k}^{j-1}A_i=\bigcup_{i=k+1}^{j}A_i$。

于是，我们得到$B\in F(f)\cap F(g)$，这是因为$B\circ f=\left(\bigcup_{i=k+1}^{j}A_i\right)\circ f=\bigcup_{i=k+1}^{j}A_i\circ f=\bigcup_{i=k+1}^{j}D\circ g^{(i-1)}$

$=\bigcup_{i=k+1}^{j}A_{i-1}=\bigcup_{i=k}^{j-1}A_i=B$，$B\circ g=\left(\bigcup_{i=k}^{j-1}A_i\right)\circ g=\bigcup_{i=k}^{j-1}A_i\circ g=\bigcup_{i=k}^{j-1}A_{i+1}=\bigcup_{i=k+1}^{j}A_i=B$。定理得证。

定理 5 设$|G|<\infty$，$\mathscr{A}=\{f_i\}$ $(i=1,\cdots,n)$是G上的一族两两可交换二元关系。若$f_i\circ f_j\in S[G]$ $(i\neq j)$对任意的$f_i,f_j\in\mathscr{A}$成立且由$x\in G-f_i\circ G$可导出$x\circ f_j\not\subset G-f_i\circ G$，则$\mathscr{A}$至少存在一个公共的不动子集。

定理 5 的证明依赖于归纳法及定理 4。为节省篇幅，其证明过程省略。

定理 6 设$|G|<\infty$，$f,g\in P(G^2)$，$f\circ g=g\circ f\neq\phi$，$G=\bigcup G_i(d\delta_1(g\vee f))$。若$G_i\cap f\circ g\circ x\neq\phi(x\in G_i)$，则$f,g$有一个含于$G_i$的公共的不动子集。

证明 根据条件$G_i\cap f\circ g\circ x\neq\phi(x\in G_i)$及定理Ⅰ，我们得知$G_i=G_i\circ f\circ g$。现在，我们作集合序列$\{A_j\}$如下：

$$A_0=G_i,\ A_j=A_{j-1}\circ g,\ j=1,2,\cdots$$

因为$A_j=A_{j-1}\circ g=\cdots=A_0\circ g^{(j)}=G_i\circ g^{(j)}$，所以我们得到$A_j\neq\phi$。否则，由$A_j=\phi$可导出$A_j\circ f^{(j)}=\phi$。这与$A_j\circ f^{(j)}=G_i\circ g^{(j)}\circ f^{(j)}=G_i\circ(g\circ f)^{(j)}=G_i\neq\phi$产生矛盾。

又因为$\{A_j\}$事实上是一单调下降的集合序列（依集合的自然序关系），所以，存在一个非负整数k使得$A_k=A_{k+1}=\cdots$。容易检验，A_k是f,g的一个公共的不动子集且$A_k\subset G_i$。定理得证。

定理 7 设$|G|<\infty$，$\mathscr{A}=\{f_j\}$ $(j=1,2,\cdots,n)$是G上的一族两两可交换的二元关系，$G=\bigcup G_i(d\delta_1(\vee f_j))$。若$G_i\cap f_k\circ f_j\circ x\neq\phi(x\in G_i,\ k\neq j,\ f_k,f_j\in\mathscr{A})$，$x\circ f_k\not\subset G-f_j\circ G$对任意的$x\in G-f_j\circ G$成立，则$\mathscr{A}$具有一个含于$G_i$的公共的不动子集。

定理 7 的证明依赖于归纳法及定理 6。为节省篇幅起见，其证明过程省略。

四、例 子 与 讨 论

在上一节中，我们给出了一些判定一族给定的二元关系是否存在公共的不动子集的充分条件。现在，我们举些例子，并指出一种求公共的不动子集的方法。

例 1 设$G=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，$\mathscr{A}=\{f_1,f_2\}$，$f_1=\{(x_1,x_2),\ (x_2,x_1),\ (x_3,x_4),\ (x_4,x_3)\}$，$f_2=\{(x_1,x_4),\ (x_4,x_1),\ (x_2,x_3),\ (x_3,x_2)\}$。容易检验，$f_1^{\prime}\wedge f_1^{(0)}\neq\phi$，$f_1\circ f_2=f_2\circ f_1=\{(x_1,x_3),\ (x_3,x_1),\ (x_2,x_4),\ (x_4,x_2)\}$，$G-f_2\circ G=\phi$。于是，依定理 2，$\mathscr{A}$至少存在一个公共的不动子集。事实上，$G$是$\mathscr{A}$的唯一的公共不动子集。

例 2 设$G=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$，$\mathscr{A}=\{f_1,f_2\}$，$f_1=\{(x_1,x_2),\ (x_3,x_4),\ (x_4,x_3),\ (x_6,x_7),\ (x_7,x_6)\}$，$f_2=\{(x_3,x_6),\ (x_6,x_3),\ (x_4,x_7),\ (x_7,x_4),\ (x_5,x_8),\ (x_8,x_5)\}$。容易检验，$f_1\circ f_2=f_2\circ f_1=\{(x_3,x_7),\ (x_7,x_3),\ (x_4,x_6),\ (x_6,x_4)\}\in S[G]$。于是，依定理 4，

$\mathcal{A}$至少存在一个公共的不动子集。仿照定理4的证明过程，我们可以求得$\mathcal{A}$的一个不动子集为$\{x_3,x_4,x_6,x_7\}$。

对于两个可交换的二元关系f，$g\in P(G^2)$，若其中之一，不仿设为f，存在一个不动子集D，且对任意$x\in G-g\cdot G$，$x\cdot f\not\subset G-g\circ G$，又集合序列$\{D\cdot g^{(n)}\}$单调，则$\lim D\ g^{(n)}$就是$f,g$的一个公共的不动子集。在这种情况下，有关的讨论是很简单的。

在上一节中，我们证明了几个判定有限集合上的一族二元关系何时存在公共的不动子集的判别定理，在这一节中，我们又举出几个例子，我们的工作纯属探索性。我们相信，更多的判定定理将会在今后被人们所发现，有关这一课题的研究也会越来越深入。

致谢 作者感谢朱绪鼎同学的热情帮助！

参 考 文 献

[1] Wu Xue-mou, Pansystems methodology: Concepts, theorems and applications (Ⅰ)—(Ⅶ), *Science Exploration*, 1, 2, 4 (1982), 1, 4 (1983), 1 (1984).

[2] Wu Xue-mou, Fixed pansystems theorems and pansystems catastrophe analysis of pan-weighted network, *Journal of Mathematical Research and Exposition*, 1 (1984).

[3] 吴学谋，泛系方法论与泛系突变分析，《中国力学学会分岔、突变、稳定性学术会议论文汇编》(1983).

[4] Smart, D. R., *Fixed Point Theorems*, Combridge University Press (1980).

Pansymmetry and Fixed Pansystems Theorems of a Class of Pansystems Relations

Wu Chen

(*Wuhan Digital Engineering Institute, Wuhan*)

Abstract

In this paper, some results of pansymmetry and fixed pansystems theorems are extended to the case of a class of binary relations under the framework of pansystems methodology. It is concretely discussed when a class of binary relations has a common fixed subset on a finite universal set. Several simple but comprehensive decision theorems, which can determine, are obtained, if a class of binary relations has a common fixed subset. As a result, the main decision theorem——Markov-Kakutani Theorem——is extended to see whether there exists the common fixed point or not in the traditional fixed point theory in a class of mappings.