应用数学和力学，第6卷第10期（1985年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

周期外力作用下某些二阶非线性微分方程的调和解*

葛 渭 高

（北京工业学院，1984年7月31日收到）

摘 要

本文给出了某些二阶非线性微分方程在周期外力作用下存在调和解的若干定理．这些定理推广了文[1]～[8]的有关结果．

周期外力 $p(t)\equiv p(t+T)$ 作用下二阶非线性微分方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=p(t) \tag{1}$$

$$\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=p(t) \tag{2}$$

$$\ddot{x}+F(\dot{x})+g(x)=p(t) \tag{3}$$

调和解的存在性问题，很早就受到重视．本文用常微分方程定性理论的方法，首先给出方程（1）在周期外力作用下存在调和解的一个充分条件，即定理1，它推广了 S. Lefshitz[1], N. Levinson[2], De Castro[3], G.E.H. Reuter[4], S. Mizohata（沟畑）-M. Yamaguti（山口）[5], J.R. Graef[6], 李曾淑-王慕秋[7]的有关结果．此定理推广应用到方程（2）和（3），又得到若干新的定理．

我们先对方程

$$\frac{dz}{dy}=F(z)-y \qquad (z\geqslant 0) \tag{4}$$

给出一个引理，其中 $F(z)$ 连续，除原点外保证初值问题解的存在唯一性．

引理 当 $z>z_0\geqslant 0$ 时，对某个正常数 $a<\sqrt{8}$ 使 $|F(z)|\leqslant a\sqrt{z}$ 成立，则

（i）过 $z\geqslant z_0$ 半平面上任一点 (z,y) 的上行和下行积分曲线必和 $z=z_0$ 相交；

（ii）从 $z=z_0$ 位于 $(z_0,F(z_0))$ 上方的一点 (z_0, y_1) 出发的下行积分曲线交 $z=z_0$ 于 (z_0, y_2)，则 $y_1\to\infty$ 时，$y_2\to-\infty$，反之亦然．

引理的第一个结论只要将方程(4)在 $z\geqslant z_0$ 上分别和方程

$$\frac{dz}{dy}=\pm a\sqrt{z}-y$$

* 樊大钧推荐．

比较即可，后者的每一积分曲线位于 $z\geqslant z_0$ 的部分和直线 $z=z_0$ 有两交点。第二个结论可由第一个结论直接推出。因为设若不然，即可在半平面 $z\geqslant z_0$ 上找到一点，过该点作方程(4)的积分曲线，上行和下行两个方向上至少有一方和直线 $z=z_0$ 不交。

方程(4)中，记 $F(x)=\int_0^x f(\xi)d\xi$，$z=G(x)=\int_0^x g(\xi)d\xi$ 如果 $z=G(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$，$(-\infty, -x_0)$ 上严格单调，则 $x=G_1^{-1}(z)$，$x=G_2^{-1}(z)$ 分别表示 $z=G(x)$ 在上列两个区间上的反函数，这时记

$$F_1(z)=F(G_1^{-1}(z)),\quad F_2(z)=F(G_2^{-1}(z))$$

定理 1 在方程(1)中，$f(x)$，$g(x)\in C^0$，$p(t)$ 为 Lebesgue 可积，保证初值问题解的存在唯一和对初值的连续依赖

(i) $p(t+T)\equiv p(t)$，$|P(t)|=|\int_0^t p(s)ds|\leqslant M$；

(ii) $\exists x_0>0$，$|x|\geqslant x_0$ 时，$xg(x)>0$；

(iii) $\exists$ 非负常数 $a<\sqrt{8}$，$x>x_0$ 时 $F(x)\geqslant M-a\sqrt{\max\{G(x), 0\}}$；$x<-x_0$ 时，$F(x)\leqslant -M+a\sqrt{\max\{G(x),0\}}$；

(iv) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[G(x)+F(x)\operatorname{sgn}x]=+\infty$；

(v) 当 $G(\pm\infty)=+\infty$ 时，$\exists z_0\geqslant\max\{G(x_0), G(-x_0), 0\}$，在 $z\geqslant z_0$ 时 $\exists\,\varepsilon>0$，使下列二式至少有一式成立：

$$F_1(z)\geqslant M+\varepsilon+\max\{-a\sqrt{z}, F_2(z)+M\}$$
$$F_2(z)\leqslant -M-\varepsilon+\min\{a\sqrt{z}, F_1(z)-M\}$$

则方程(1)存在调和解，且方程(1)的解一致最终有界。

证 在定理条件下，方程(1)可写成等价系统

$$\dot{x}=y-F(x)+P(t),\quad \dot{y}=-g(x) \tag{5}$$

由条件(iv)，定理实际上包含了 4 种不同的情况，即

(a) $G(\pm\infty)=+\infty$；

(b) $G(+\infty)=+\infty$，$G(-\infty)<+\infty$，$F(-\infty)=-\infty$；

(c) $G(-\infty)=+\infty$，$G(+\infty)<+\infty$，$F(+\infty)=+\infty$；

(d) $G(\pm\infty)<+\infty$，$F(\pm\infty)=\pm\infty$。

现就(a)，(b)两种情况给出证明，(c)和(d)的证法类似。

(a) 设 $G_1^{-1}(z_0)=x_1\geqslant x_0>-x_0\geqslant -x_2=G_2^{-1}(z_0)$，由(5)式可知 $-x_2\leqslant x\leqslant x_1$ 时，$\exists N>0$，$|y|\geqslant N$ 时

$$\left|\frac{dy}{dx}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2(x_1+x_2)} \tag{6}$$

$$\operatorname{sgn}\dot{x}=\operatorname{sgn}y \tag{7}$$

不妨设条件(v)中第一个不等式成立，记

$$\tilde{F}(z)=\max\{-a\sqrt{z}, F_2(z)+M\}$$

显然 $|\tilde{F}(z)|<a\sqrt{z}$，连续，保证方程

$$\frac{dz}{dv}=\tilde{F}(z)-v\qquad(z\geqslant 0) \tag{8}$$

初值问题解的存在唯一。Γ 是方程(8)的一条积分曲线，它和 $z=z_0$ 的交点是 (z_0, v_1)，(z_0, v_2)，由引理，可设 v_1，$-v_2>N+\varepsilon$。作可微映照：

$$T_1:[z_0,+\infty)\times\mathbf{R}\to[x_1,\ +\infty)+\mathbf{R}$$

使
$$(z,v)\mapsto(x,y)=(G_1^{-1}(z),v+\varepsilon)$$
$$T_2:[z_0,+\infty)\times\mathbf{R}\to(-\infty,-x_2]\times\mathbf{R}$$

使
$$(z,v)\mapsto(x,y)=(G_2^{-1}(z),v)$$

则$T_1(\Gamma)$，$T_2(\Gamma)$分别为系统

$$\dot{x}=y-\varepsilon-\tilde{F}(x),\ \dot{y}=-g(x),\ x\geqslant x_1 \tag{9}$$
$$\dot{x}=y-\tilde{F}(x),\ \dot{y}=-g(x),\ x\leqslant -x_2 \tag{10}$$

的轨线，其中$\tilde{F}(x)=\tilde{F}(G(x))$。$T_1(\Gamma)$，$T_2(\Gamma)$的端点分别为

$$A(x_1,v_1+\varepsilon),\ B(x_1,v_2+\varepsilon),\ C(-x_2,v_2),\ D(-x_2,v_1)$$

用直线段连接D和A，C和B，易知两线平行($\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$)，斜率为$\varepsilon/(x_1+x_2)$，记

$$L_0=T_1(\Gamma)\cup\overline{AD}\cup T_2(\Gamma)\cup\overline{BC}$$

在$T_1(\Gamma)$上将系统(5)和(9)比较，有

$$\begin{vmatrix} y-\varepsilon-\tilde{F}(x) & -g(x) \\ y-F(x)+P(t) & -g(x) \end{vmatrix}=-g(x)[F(x)-\tilde{F}(x)-\varepsilon-P(t)]<0$$

故不论t为何值，系统(5)的轨线均在$T_1(\Gamma)$上穿入L_0。同理可证，在$T_2(\Gamma)$上也如此。至于在直线段$\overline{DA}$，$\overline{CB}$上，因直线斜率为$\varepsilon/(x_1+x_2)$，由(6)、(7)二式，知轨线也穿入L_0内。进入L_0所围区域内部的轨线，其对应解曲线由系统(5)的条件必可正向沿t延拓至$+\infty$，故由 Massera 定理，调和解存在。

又由引理知，系统(5)在$t=t_0$从相平面上任一点(x_0,y_0)出发的正向轨线，总可作出一条L闭曲线(作法同L_0)，使(x_0,y_0)位于闭曲线之内。不同的L闭曲线两两相套，任一轨线一旦进入某条L曲线的内部，便不再走出。

现证系统(5)的所有轨线最终全部进入L_0所围区域内部。设若不然，有某一轨线γ始终在L_0之外，则γ和$x=x_1$在B点下方反复相交。记交点为B_k ($k=1,2,\cdots$)，$\{B_k\}$是单调有界点列，故有极限点B^*。又记γ到达B_k点的时刻为t_k。过B^*作一条L闭曲线，记为L^*，γ不能进入L^*内部，否则将和B^*为极限点的前提矛盾. 但当取某个充分大的k，使B_k充分接近B^*，则过B_k作斜率为$\varepsilon/2(x_1+x_2)$的斜线，和线段$\overline{B^*C^*}$交于一点$\tilde{C}\neq C^*$，由(6)和(7)知，γ在t_k时刻以后将左行且位于$B_k\tilde{C}$线上方，故必在$\tilde{C}$右方某点处穿入L^*，得出矛盾。记$H=\max\{\sqrt{x^2+y^2}\,|\,(x,y)\in L_0\}$即知系统(5)的任一解终将进入$G=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant H^2\}$之内，故最终有界。

对t_0时刻从$E_R:x^2+y^2\leqslant R^2$内一点P出发的轨线$\gamma(t;t_0,P)$，记其进入L_0所围区域的时刻为$t_0+T(t_0,\ P)$，由于解对初值的连续依赖，$T(t_0,P)$是t_0，P的连续函数。由E_R的紧性，对给定的t_0，$\exists T(t_0,R)=\sup\limits_{P\in E_R}T(t_0,P)$使当$t\geqslant t_0+T(t_0,R)$时，对$\forall P\in E_R,\gamma(t;t_0,P)$进入$G$中，故系统(5)的解为拟等度最终有界。上述$T(t_0,\ R)$对任意$t_0$均存在，故系统(5)的解为等度最终有界。又系统(5)右方对t是T周期的；取$T(R)=\sup\limits_{0\leqslant t_0\leqslant T}T(t_0,R)$，对$\forall P\in E_R$，$t_0\in(-\infty,\ +\infty)$，$t>t_0+T(R)$时，$\gamma(t;t_0,P)$进入$G$，故系统(5)的解一致最终有界。

(b) $G(+\infty)=+\infty$，$G(-\infty)<+\infty$，$F(-\infty)=-\infty$

这时$\exists x_1\geqslant x_0$，$x\geqslant x_1$时$G(x)>0$；$\exists -x_2\leqslant -x_0,x\leqslant -x_2$时，$F(x)+M<0$，设$G(-\infty)=A$，则$\exists N$，$|y|\geqslant N$时，(6)、(7)两式成立，且使

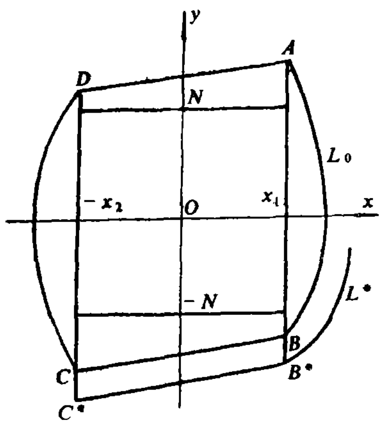

图 1

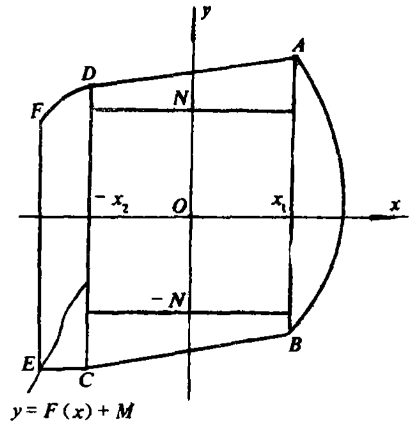

图 2

$$\frac{1}{2}y^2+G(-x_2)>A,\ F(-x_2)+M>-N$$

在 $z=G(x_1)$ 的右方，作方程 (8) 的积分曲线 Γ，这时取 $\tilde{F}(z)=-a\sqrt{z}$ 即可。设 Γ 和 $z=G(x_1)$ 的上下交点为 $(G(x_1),\ v_1)$，$(G(x_1),\ v_2)$，可令 $v_1>N+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$，$-v_2>N$，作连续可微映照

$$T:[G(x_1),+\infty)\times\mathbf{R}\to[x_1,+\infty)\times\mathbf{R}$$

使
$$(z,v)\mapsto(x,y)=(G^{-1}(z),v)$$
在 $T(\Gamma)$ 和 $x=x_1$ 的上下两交点 $A(x_1,\ v_1)$，$B(x_1,\ v_2)$ 处作斜率为 $\varepsilon/(x_1+x_2)$ 的直线交 $x=-x_2$ 于 $D(-x_2,\ v_1-\varepsilon)$，$C(-x_2,v_2-\varepsilon)$ 两点。过 C 作水平线和 $y=F(x)+M$ 相交，E 是最左方的交点。过 D 作曲线

$$l:\lambda(x,y)=\frac{1}{2}y^2+G(x)=\frac{1}{2}y_D^2+G(-x_2)$$

由于 $\lambda(x,y)>A=G(-\infty)$，所以 l 在 $x=-x_2$ 的左方和负 x 轴不交，而必和过 E 的垂线交于 F。对系统(5)而言

在 $\overline{EC}$ 上有 $\dot{y}=-g(x)>0$

在 $\overline{EF}$ 上有 $\dot{x}=y-F(x)+P(t)\geqslant y-[F(x)+M]>0$

在 $\widehat{DF}$ 上有 $\dot{\lambda}=-g(x)[F(x)+P(t)]<-g(x)\{F(x)+M]<0$

在 $\overline{BC}$，$\overline{DA}$ 和 $\widehat{AB}$ 上，情况同(a)一样，故记 $L=\widehat{AB}\cup\overline{BC}\cup\overline{CE}\cup\overline{EF}\cup\widehat{FD}\cup\overline{DA}$ 时，系统(5)之正向轨线，不论 t 为何值，均在 L 上进入 L 所界区域之内部，由此即可知存在调和解。同(a)中一样可证，系统(5)的解一致最终有界。

定理证毕。

在定理 1 中，不仅要求 $p(t)$ 是 T 周期的，而且实际上要求 $P(t)=\int_0^t p(s)ds$ 也是 T 周期的，即要求
$$\int_0^T p(s)ds=0$$
因为 $\int_0^T p(s)ds\neq0$ 即可推出 $P(t)$ 无界。任给 T 周期函数 $p(t)$，记

$$C=\frac{1}{T}\int_0^T p(s)ds,\ p_1(t)=p(t)-C$$

$p_1(t)$ 满足定理 1 中积分有界（在 $[0,+\infty)$ 中）的要求。又记

$$g_1(x)=g(x)-C,\quad P_1(t)=\int_0^t p_1(s)ds$$

这时方程 (1) 可写成等价系统

$$\dot{x}=y-F(x)+P_1(t),\ \dot{y}=-g_1(x) \tag{11}$$

用 $z=\widetilde{G}(x)=\int_0^x g_1(\xi)d\xi$，和定理 1 中一样定义 $F_1(z)$，$F_2(z)$。

定理 2 在方程 (1) 中，$f(x)$，$g(x)\in C^0$，$p(t)$为 Lebesgue 可积，保证初值问题解的存在唯一及解对初值的连续依赖

(i) $p(t)\equiv p(t+T)$，在有限区间上 L-可积，记 $C=\frac{1}{T}\int_0^T p(s)ds$，$M=\max\limits_{0<t<T}|P_1(t)|$

(ii) $\exists x_0>0$，$|x|\geqslant x_0$ 时，$x(g(x)-C)>0$

(iii) $x\geqslant x_0$ 时，$F(x)\geqslant M-a\sqrt{\max\{G(x)-cx,\ 0\}}$，

$x\leqslant -x_0$ 时，$F(x)\leqslant -M+a\sqrt{\max\{G(x)-cx,0\}}$，其中 $0<a<\sqrt{8}$

(iv) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[G(x)-cx+F(x)\mathrm{sgn}x]=+\infty$

(v) 当 $\lim\limits_{|x|\to\infty}[G(x)-cx]=+\infty$时，存在$z_0\geqslant\max\{G(x_0)-cx_0,\ G(-x_0)+cx_0,0\}$，使

$z\geqslant z_0$ 时

$$\begin{aligned}&F_1(z)\geqslant M+\varepsilon+\max\{-a\sqrt{z},\ F_2(z)+M\}\\&F_2(z)\leqslant -M-\varepsilon+\min\{a\sqrt{z},\ F_1(z)-M\}\end{aligned}\qquad(\exists\varepsilon>0)$$

中至少有一式成立，则方程(1)存在调和解，且所有解一致最终有界。

只要用 $p_1(t)=p(t)-C$，$g_1(x)=g(x)-C$ 及 $\widetilde{G}(x)=G(x)-cx$ 代替定理 1 中相应的 $p(t)$，$g(x)$，$G(x)$ 立即推得结论成立。

现讨论方程(2)。

定理 3 方程(2)中 $f(x,v)\in C^0$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续，且

(i) 存在逐段连续函数 $f(x)\leqslant\inf\limits_v f(x,v)$；

(ii) $f(x)$，$g(x)$，$p(t)$ 满足定理 2 中的全部要求；

(iii) $\exists\ x_1$，$x_2>0$，

$x>x_1$ 时，$\inf\limits_{-2M<v<0} g(x)+[f(x,v)-f(x)]v\geqslant 0$

$x<-x_2$ 时，$\sup\limits_{0<v<2M} g(x)+[f(x,v)-f(x)]v\leqslant 0$

则方程(2)存在调和解，且所有解一致最终有界。

条件(iii)中的 x_1，x_2 不妨设和定理 1 中的 x_1，x_2 一致。

证 方程(2)可写成等价系统

$$\dot{x}=v,\ \dot{v}=-f(x,v)v-g(x)+p(t) \tag{12}$$

而其比较系统则是

$$\dot{x}=v,\ \dot{v}=-f(x)v-g(x)+p(t) \tag{13}$$

(12)，(13)中的$g(x)$，$p(t)$按定理2应分别为$g_1(x)$，$p_1(t)$，其中$g_1(x)=g(x)-\frac{1}{T}\int_0^T p(s)ds$，

$p_1(t)=p(t)-\frac{1}{T}\int_0^T p(s)ds$，为书写简便计，仍用 $g(x)$，$p(t)$ 表示。令$F(x)=\int_0^x f(\xi)\,d\xi$，作 $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}$ 上的自映射

$$T: \mathbf{R}^2\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}$$

使 $$(x,v,t)\mapsto(x,y,t)=(x,v+F(x)-P(t),t)$$

(12)、(13)两式分别变为

$$\dot{x}=y-F(x)+P(t),\ \dot{y}=-[f(x,\ v)-f(x)]v-g(x) \tag{14}$$

$$\dot{x}=y-F(x)+P(t),\ \dot{y}=-g(x) \tag{5}$$

对系统(5)，可按定理1作出闭环线族$\{L\}$，两两相套，其轨线正向均穿入L。现在我们由闭环线族$\{L\}$出发，构造两两相套的闭环线族$\{\tilde{L}\}$，平面上任一点(x,y)必在某一$\tilde{L}$之内部，且(14)之轨线从$\tilde{L}$上穿入$\tilde{L}$之内部区域。

如图3所示，$L=\overset{\frown}{AB}\cup\overline{BC}\cup\overset{\frown}{CD}\cup\overline{DA}$是对应定理1中情况(a)的一条闭环线。$E_1$，$E$分别是$y=F(x)-P(t)$，$y=F(x)-M$和$\overset{\frown}{AB}$之最左交点，$E_2$是$y=\tilde{F}(x)+\varepsilon$和$\overset{\frown}{AB}$之交点，$E_2$即$\overset{\frown}{AB}$之最右点。因$F(x)-P(t)\geqslant F(x)-M>\tilde{F}(x)+\varepsilon$(定理1条件v)，故$E_1$，$E$，$E_2$之位置如图3所示。从$E$作铅垂线交$\overset{\frown}{AB}$于$F$。同样从$y=F(x)+M$和$\overset{\frown}{CD}$之交点$G$，作铅垂线，和$\overset{\frown}{CD}$交于$H$，记

$$\tilde{L}=\overset{\frown}{AE}\cup\overline{EF}\cup\overset{\frown}{FB}\cup\overline{BC}\cup\overset{\frown}{CG}\cup\overline{GH}\cup\overset{\frown}{HD}\cup\overline{DA}$$

现证对系统(14)，不论t为何时刻，$\tilde{L}$上的轨线全都进入$\tilde{L}$的内部区域。

在$\overset{\frown}{AE_1}$[$\overset{\frown}{FB}$]上，因$v=y-F(x)+P(t)>0$[<0]，$y-\tilde{F}(x)-\varepsilon>0$[$<0$]，故

$$Q=\begin{vmatrix} y-\tilde{F}(x)-\varepsilon & -g(x) \\ y-F(x)+P(t) & -g(x)-[f(x,v)-f(x)]v \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} y-\tilde{F}(x)-\varepsilon & -g(x) \\ y-F(x)+P(t) & -g(x) \end{vmatrix}-[y-\tilde{F}(x)-\varepsilon][f(x,v)-f(x)]v$$

$$<0$$

在$\overline{EF}$上 $\dot{x}=v<0$

在$\overset{\frown}{E_1E}$上，对$v\leqslant 0$的点，有

$$0\geqslant v=y-F(x)+P(t)>[y-F(x)+M]-2M>-2M$$

故 $$Q=-[y-\tilde{F}(x)-\varepsilon][g(x)+(f(x,v)-f(x))v]+g(x)v<0$$

对$v>0$的点，仍可按$\overset{\frown}{AE_1}$上一样得$Q<0$。

在$\overline{BC}$ $\dot{x}<0$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(14)}<\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(5)}<\dfrac{\varepsilon}{2(x_1+x_2)}$

所以在以上各段，(14)之轨线全穿入$\tilde{L}$的内部区域。同理可证在其余各段上亦然。

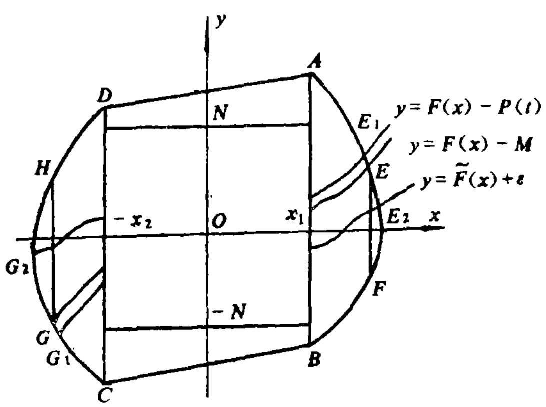

图 3

对应定理1中情况(b)，在$x\geqslant x_1$上的曲线段作法同上，$x\leqslant x_1$时，取$\tilde{L}=L$。(c)、(d)情况也可按L作出相应的$\tilde{L}$。由此就证得了调和解的存在，一致最终有界的证法同定理1。定理证毕。

以下讨论方程(3)。

定理4 方程(3)中$g(x)=c^2x, c>0$，$F(y)\in C^0$，$p(t)\in C^0$连续，保证初值问题解的存在唯一及解对初值的连续依赖

(i) $p(t+T)\equiv p(t)$，$M=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|p(t)|$

(ii) $\exists\, y_0>0$, $0\leqslant a<2$, $y\geqslant y_0$ 时

$$F(y)\geqslant M-acy,\ F(-y)\leqslant -M+acy$$

且

$$F(y)\geqslant M+\varepsilon+\max\{-acy,\ F(-y)+M\}\qquad (y\geqslant y_0)$$

$$F(-y)\leqslant -M-\varepsilon+\min\{acy,\ F(y)-M\}\qquad (y\geqslant y_0)$$

至少有一式成立，则

方程 (3) 存在调和解，且所有解一致最终有界。

证 令 $\dot{x}=c^2X$, $x=-Y$, 则方程 (3) 等价于系统

$$\dot{X}=Y-\frac{F(c^2X)}{c^2}+\frac{p(t)}{c^2},\qquad \dot{Y}=-c^2X \tag{15}$$

如果记 $\tilde{g}(X)=c^2X$, $\tilde{G}(X)=\frac{1}{2}c^2X^2$, $\tilde{F}(X)=\frac{F(c^2X)}{c^2}$, $\tilde{P}(t)=\frac{p(t)}{c^2}$, 就是系统 (5) 的形式了，由所给条件推出定理 1 的要求满足，故结论成立。

此定理包含了 A. Ascari[8] 的结果

定理 5 方程 (3)中 $F(y)\in C^0$, $g(x)\in \mathrm{Lip}$, $p(t)\in C^0$ 保证初值问题解的存在唯一及解对初值的连续依赖，且

(i) $p(t+T)\equiv p(t)$, $M=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|p(t)|$

(ii) $xg(x)>0$, $x\neq 0$, $\lim\limits_{|x|\to\infty}|g(x)|=+\infty$

(iii) $\exists y_0$, $\varepsilon>0$及任意实数K, $y\geqslant y_0$时, $F(y)\geqslant K+M+\varepsilon$; $y\leqslant -y_0$时, $F(y)\leqslant K-M$, 则

方程 (3) 存在调和解，且所有解一致最终有界。

证 设 $g(x)$ 的 Lipschitz 常数为 H。

令 $\dot{x}=X$, $x=-Y$, 则方程 (3) 变为

$$\dot{X}=h(Y)-F(X)+p(t),\ \dot{Y}=-X \tag{16}$$

其中 $h(Y)=-g(-Y)$。

由条件(ii) $\Rightarrow Yh(Y)=-Yg(-Y)>0$, $Y\neq 0$; $\lim\limits_{|Y|\to\infty}|h(Y)|=\infty$; $\mathrm{Lip}(h)=H$。

由条件(iii) $\Rightarrow X\geqslant X_0=y_0$ 时, $F(X)\geqslant K+M+\varepsilon$; $X\leqslant -X_0=-y_0$ 时, $F(X)\leqslant K-M$。

由(16), $\exists N>0$, $|Y|>N$, $|X|\leqslant X_0$ 时, 可使

$$\mathrm{sgn}\dot{X}=\mathrm{sgn}Y,\quad \left|\frac{dY}{dX}\right|<\frac{\varepsilon}{4X_0H}$$

在 $X\geqslant X_0$ 上作方程

$$\frac{dX}{dV}=\frac{K-h(V)}{X}$$

的积分曲线族

$$\frac{1}{2}X^2+\int_0^V[h(\eta)-K]d\eta=C \tag{17}$$

由条件知, $\exists \bar{Y}>Y_0>0$, $|V|\geqslant Y_0$ 时 $V[h(V)-K]>0$;

$$|V|\geqslant\bar{Y}\text{ 时},\ \int_0^V[h(\eta)-K]d\eta>\max_{|Y|<Y_0}\int_0^Y[h(\eta)-K]d\eta$$

$$\Rightarrow\ V\geqslant\bar{Y}\text{时}\ \forall\, 0<z<V,\ \int_0^V[h(\eta)-K]d\eta>\int_0^z[h(\eta)-K]d\eta$$

$$V\leqslant-\bar{Y}\text{时}\ \forall\, 0>z>V,\ \int_0^V[h(\eta)-K]d\eta>\int_0^z[h(\eta)-K]d\eta$$

故 $C > \frac{1}{2}X_0^2 + \max\left\{\int_0^{\bar{Y}}[h(\eta)-K]d\eta,\ \int_0^{-\bar{Y}}[h(\eta)-K]d\eta\right\}$ 时(17)和直线 $X=X_0$ 仅有两交点(X_0,Y_1)，$(X_0,-Y_2)$，Y_1，$Y_2>\bar{Y}$。当 $C\to\infty$ 时，Y_1，$Y_2\to\infty$。取充分大的 C_0，使 Y_1，$Y_2>N+\varepsilon/H$ 及

$$\Gamma:\ \frac{1}{2}X^2+\int_0^V[h(\eta)-K]d\eta=C_0,\ X\geqslant X_0$$

作映照

$$T_1:\ [X_0,+\infty)\times\mathbf{R}\to[X_0,\ +\infty)\times\mathbf{R}$$

$$T_1(X,V)=(X,Y)=\left(X,\ V+\frac{\varepsilon}{H}\right)$$

$$T_2:[X_0,\ +\infty)\times\mathbf{R}\to(-\infty,\ -X_0]\times\mathbf{R}$$

$$T_2(X,V)=(-X,\ V)=(-X,Y)$$

由此得和图 1 类似的图形，记

$$L=T_1(\Gamma)\cup\widehat{BC}\cup T_2(\Gamma)\cup\overline{DA}$$

$\overline{AD}$，$\overline{BC}$ 之斜率为 $\varepsilon/2X_0H$，$T_1(\Gamma)$，$T_2(\Gamma)$分别为

$$\dot{X}=h\left(Y-\frac{\varepsilon}{H}\right)-K,\ \dot{Y}=-X,\ X\geqslant X_0 \tag{18}$$

$$\dot{X}=h(Y)-K,\ \dot{Y}=-X,\ X\leqslant -X_0 \tag{19}$$

的轨线。在$X\geqslant X_0$即$\widehat{AB}$上，(16)和(18)比较

$$\begin{vmatrix} h\left(Y-\frac{\varepsilon}{H}\right)-K & -X \\ h(Y)-F(X)+p(t) & -X \end{vmatrix}$$

$$=X\left[h(Y)-h\left(Y-\frac{\varepsilon}{H}\right)-F(X)+p(t)+K\right]\leqslant X\left[H\frac{\varepsilon}{H}-\varepsilon\right]=0$$

在L 的其余各段都可推出(16)的轨线不论 t 是何值均穿入 L。和定理 1 一样可推出结论成立。

本文是在胡钦训教授指导下完成的，谨志谢。

参 考 文 献

[1] Lefschitz, S., Existence of periodic solutions for certain differential equations, *Proc. Nat., Ac. Sci.*, **29** (1943), 29—32.

[2] Levinson, N., On the existence of periodic solutions for second order differential equations with a forcing term, *Jour. Math. Phys.*, **22** (1943).

[3] De Castro, A., Sulle oscillazioni non lineari dei sistemi di uno o piú gradi di libertà, *Rend. Sem. Mat. Univ.*, **22** (1953).

[4] Reuter, G. E. H., A boundedness theorem for nonlinear differential equations of second order, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **47** (1951).

[5] Mizohata, S. and M. Yamaguti, On the existence of periodic solutions of the non-linear differential equation $\ddot{x}+a(x)\dot{x}+\varphi(x)=p(t)$, *Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ.*, Ser. A, **27** (1952).

[6] Graef, J. R., On the generalized liénard equation with negative damping, *J. Diff. Eqs.*, **12** (1972).

[7] 李曾淑、王慕秋，论具有阻尼的 Duffing 方程的周期解，科学通报，22 (1980).
[8] Ascari, A., Studio asintotico di un'equatione relativa alla dinamica del punto, *Rend. 1st Lamb. Sci. Lett.*, **16**, 3 (1952).
[9] 秦元勋、王联、王慕秋，《运动稳定性理论与应用》，科学出版社 (1981).
[10] 贺建勋，关于不连续系统的普遍唯一性定理，数学学报，**26**, 3 (1983).

Harmonic Solutions of Some Second-Order Nonlinear Equations under a Periodic Force

Ge Wei-gao

(Beijing Institute of Technology, Beijing)

Abstract

In this paper we prove some theorems on harmonic solutions of some second-order nonlinear equations under a periodic external force. These theorems extend relevant results in papers [1]~[8].