

# 连续体力学中有限变形与转动的 计算增量法

陈 至 达

(中国矿业学院北京研究生部, 1984年11月11日收到)

## 摘 要

目前在非线性弹塑性力学计算中常用的经典非线性大变形理论由于内在的数学缺点, 当变形量与转动很大时, 往往误差达到不许可的程度. 本文采用作者的有限变形力学理论表述了增量法. 在作者与尚勇、谢和平联合研究的另二篇论文中, 详细叙述这个新方法在工程中的应用, 结果证明从微小变形过渡到大变形, 计算结果总是可以满意地符合实验.

## 一、引 言

用数值方法求解物理非线性及几何非线性力学问题, 目前较多应用增量法. 但是由于所用坐标描述法含混不清, 往往带来不确定性, 使得误差产生的原因难于掌握.

本文旨在根据作者的几何场论方法, 从有限变形连续体力学角度考察一些基本理论问题, 并由功率形式的能量原理建立有限单元法的位移增量计算基本方程.

在本文的论述中一致采用拖带坐标描述法, 此种描述法在作者的著作[1]中已有系统的叙述. 和 Argytis 等人的自然描述法<sup>[5][6]</sup>相比, 作者的方法在数学结构上较为合理, 以下我们简要叙述这种描述法的基础.

## 二、拖带坐标描述法和S-R定理

早在1925年, 德国力学家Hencky已经指出要建立弹塑性大变形的应力-应变关系必须采用拖带坐标, 这样对于每一个拖带坐标系单元, 质量与能量守恒定律可以得到满足.

设在三维欧氏空间 $E^3$ 中选定一个固定参考系 $X^i$ . 一个物体 $B_0$ 具有外表曲面 $C$ . 今再选取嵌含在变形体中的拖带坐标系 $x^j$  (Co-moving coordinate system). 初始位形的物体 $B_0$ 中的拖带坐标可以选取和 $X^i$ 同胚. 在 $B_0$ 中任一点的基矢为 $\hat{g}_i$ , 当物体点集变换后,  $B_0 \rightarrow B$ , 而

$$\hat{g}_i \rightarrow g_i, \quad (2.1)$$

$$g_i = F^j_i \hat{g}_j, \quad F^j_i = \delta^j_i + u^j_{|i}, \quad (2.2)$$

$F$ 为变换系数矩阵,  $u^j$ 为位移矢量 $u$ 在初始位形基矢 $\hat{g}_i$ 方向的分量,  $(|_j)$ 表示对 $x^j$ 的协变导数.  $g_i$ 为变换后拖带系的基矢.

S-R 分解定理证明:

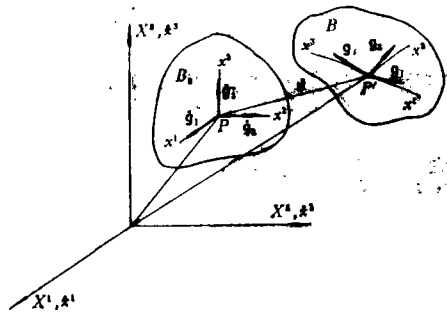


图 1

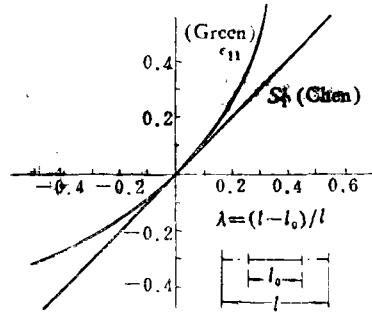


图 2

“给定一个物理可能的位移函数，此函数在变形体内是单值连续，处处具有一阶导数，则此运动变换总可以分解为正交与对称两个子变换的和，正交变换体现点集之转动，而对称变换体现点集之形变”<sup>[1]</sup>

此定理是Stokes在1845年提出位移梯度分解为对称与反对称两个子变换定理的正确推广。

按照S-R定理定义了应变分量 $S^i_j$ ，在变形体中一点的平均整旋角 $\vartheta$ 及转轴方向余弦 $L^i_j$ 。这些量在工程计算中必须用它的物理分量表示。

$$S^i_j = (u^i|_j + u^j|_i)/2 - L^i_k L^k_j (1 - \cos \vartheta) \quad (2.3a)$$

$$\vartheta = \pm \arcsin[-\omega^i_j \omega^j_i]^{1/2} \quad (2.3b)$$

$$L^i_j = \omega^i_j / \sin \vartheta \quad (2.3c)$$

其中

$$\omega^i_j \equiv (u^i|_j - u^j|_i)/2 \quad (2.3d)$$

$\vartheta$ 的正负号是按人为规定转动的正向选取的。

而按Stokes分解的结果：应变分量 $E^i_j$ 与转动分量 $\omega^i_j$ 分别为

$$E^i_j = (u^i|_j + u^j|_i)/2, \quad \omega^i_j = (u^i|_j - u^j|_i)/2 \quad (2.4)$$

对于任意刚性转动，应变分量本应全为零，但按(2.4)计算却得出应变分量不全为零的结论，出现虚假应变。此种不合理的结论在新的应变分量定义已经消除，在(2.3a)公式中出现包含转动方向余弦 $L^i_j$ 的项刚好消除虚假应变，得出在刚性转动条件下， $S^i_j = 0$  ( $i, j = 1, 2, 3$ )的正确结论。

如按照经典的有限变形Green应变张量定义：

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_i|_j + u_j|_i + u_i|_k u^k|_j) \quad (2.5)$$

对于刚性转动， $\epsilon_{ij} = 0$  ( $i, j = 1, 2, 3$ )，但在变形体中一点整旋角的计算除了Новожилов的早期公式外，直今没有更合理的公式。事实上，公式(2.5)是应变与转动的组合量。采用(2.5)式作为应变分量的不合理性，Biot<sup>[11]</sup>很早就指出。如图2所示，当单向拉伸时， $\epsilon_{11}$ 作为应变函数是不合理的。由曲线可以看出，对于中等变形与转动，用公式(2.5)和公式(2.3a)计算结果基本相符。许多计算指明：当转动与变形很大时，经典Green应变张量将引起很大误差。

用公式(2.3)分析壳体大转动与大变形的几何可参见文献[3]。

为了便于了解有限转动的计算法，今以圆柱体绕母线作刚性转动为例说明。取圆柱坐标

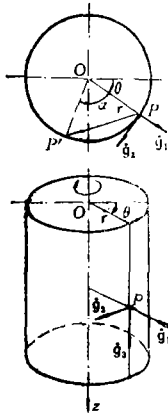


图 3

系为固定系。位移矢量  $u$  沿初始位形  $\hat{g}_i$  方向分解:

$$u = u^i \hat{g}_i = u^1 \hat{g}_1 + u^2 \hat{g}_2 + u^3 \hat{g}_3 \quad (2.6)$$

$$u^1 = r(\cos\alpha - 1), \quad u^2 = r\sin\alpha, \quad u^3 = 0 \quad (2.7)$$

$$u^1 \equiv u^r, \quad u^2 \equiv u^\theta, \quad u^3 \equiv u^z \quad (2.8)$$

上式中  $\alpha$  为转动角。在圆柱坐标系  $(r, \theta, z)$  中位移的物理分量为

$$\hat{u}^r = r(\cos\alpha - 1), \quad \hat{u}^\theta = r\sin\alpha, \quad \hat{u}^z = 0 \quad (2.9)$$

将(2.9)式诸代入(2.3)公式(按物理分量计算)求出

$$\left. \begin{aligned} \hat{S}^i_j &= 0 \quad (i, j=1, 2, 3) \\ \vartheta &= \alpha, \quad L^1_2 : L^1_3 : L^1_1 = -1 : 0 : 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

上式中  $\vartheta$  为整旋角, 在圆柱体中各点均相同。如圆柱体有形变发生, 则  $\vartheta$  一般为点位置的函数。

### 三、大变形的能量原理、位移增量方程

当结构产生大变形时, 外力与位移常呈非线性关系, 而且边界随时间变动。因此, 合理的能量积分应以瞬时位形的功率形式表达。作者在文[4]中曾讨论了大变形能量原理。下面我们应用势能原理来建立位移增量方程。

设  $\sigma^i_j$  为定义在拖带系的应力分量。  $\dot{S}^i_j$  指应变速率:

$$\dot{S}^i_j = \frac{1}{2} (v^i_{||j} + v^j_{||i}) \quad (3.1)$$

$v^i_{||j}$  表示变形体中任一点的速度分量  $v^i$  对形变后拖带坐标系  $x^i$  的协变导数。

在本文中不考虑体矩的作用, 应力是对称的。能量泛函的功率表达式可写成:

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \int_{\Omega} \sigma^i_j \dot{S}^i_j d\Omega - \oint_S p_i v^i da - \int_{\Omega} \rho f_i v^i d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \sigma^i_j v^j_{||i} d\Omega - \oint_S p_i v^i da - \int_{\Omega} \rho f_i v^i d\Omega \end{aligned} \quad (3.2)$$

上式中  $\Omega$  指体积分,  $S$  指面积分,  $p_i$  为面力 (力/变形后面积),  $\rho f_i$  为体力 (力/变形后体积)。

势能变分原理指明: “在一切满足速度、角速度与应变速率协调条件:

$$v^j_{||i} = \dot{S}^i_j + L^i_j \vartheta \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \quad (3.3)$$

和速度的表面条件: ( $\bar{v}^i$  为给定速度值)

$$v^i = \bar{v}^i \quad (\text{在 } S_v \text{ 上}) \quad (3.4)$$

的所有可能形变状态之中, 其真实应力状态满足运动方程, 力矩应力平衡方程, 以及表面力条件者, 使得泛函  $\dot{J}$  取驻值:

$$\delta \dot{J} = \int_{\Omega} \sigma^i_j \delta(v^j_{||i}) d\Omega - \int_{S_p} p_i \delta v^i da - \int_{\Omega} \rho f_i \delta v^i d\Omega = 0 \quad (3.5)$$

表面  $S: S_v \cup S_p$ , ( $\vartheta$  为平均整旋角速度,  $L^i_j$  为转轴方向余弦)。(证明见[2], [4])。

假设在数值计算过程中, 第  $n-1$  步的应力  $\sigma^i_j$  已求出。令第  $n$  步的应力为  $\sigma^i_j$ ,

$$\sigma^i_j = \sigma^i_j + \dot{\sigma}^i_j \Delta t \quad (3.6)$$

$\dot{\sigma}_j^i$  指在拖带系中的应力增长率,  $\Delta t$  为时间增量。于是有

$$\int_{\Omega_n} \sigma_{(n)}^i v_{(n)}^j \|_i d\Omega = \int_{\Omega_n} \sigma_{(n-1)}^i v_{(n)}^j \|_i d\Omega + \int_{\Omega_n} \dot{\sigma}_{(n-1)}^i v_{(n)}^j \|_i d\Omega \Delta t \quad (3.7)$$

上式中等号右边第一个积分可利用散度定理变换, 并利用平衡方程:

$$\sigma_{(n)}^i \|_i + \rho f_j = 0 \quad (3.8)$$

及边界力和应力关系:

$$\sigma_{(n)}^i n_i = p_j \quad (3.9)$$

将(3.7)化为

$$\int_{\Omega_n} \sigma_{(n)}^i v_{(n)}^j \|_i d\Omega = \int_{S_{rn}} p_{(n-1)} v_{(n)}^i da + \int_{\Omega_n} (\rho f_{(n-1)}^i) v_{(n)}^i d\Omega \quad (3.10)$$

在上式计算中, 假设第  $n-1$  和第  $n$  步的位形变动足够小, 以致表面法线方向转动变化对上式右边第一个积分值的影响可略去。

令

$$\Delta p_{(n-1)}^i = p_{(n)}^i - p_{(n-1)}^i, \quad \Delta(\rho f_{(n-1)}^i) = \rho f_{(n)}^i - \rho f_{(n-1)}^i \quad (3.11)$$

于是有

$$\delta \dot{J} = \int_{\Omega_n} \dot{\sigma}_{(n-1)}^i \delta(v_{(n)}^j \|_i) d\Omega \Delta t - \int_{S_{rn}} \Delta p_{(n-1)}^i \delta v_{(n)}^i da - \int_{\Omega_n} \Delta(\rho f_{(n-1)}^i) \delta v_{(n)}^i d\Omega = 0 \quad (3.12)$$

以下我们采用矩阵形式推导位移增量方程。

因  $\{v\}$  速度列阵是代表在实时拖带系的分量, 为计算方便, 必须换算为在定系的分量  $\{V^a\}$ 。设在一个单元内的速度插值函数为  $[N]$ , 节点速度分量为  $\{V^a\}$ ,

$$\{v\} = [N] \{V^a\} \quad (3.13)$$

$$\{\partial V / \partial x\} = [\tilde{N}] \{V^a\} \quad (3.14)$$

记  $\{v\}$  表示  $v^j \|_i$  列阵, 可以证明

$$\{v\} = [\bar{F}]^{-1} [\tilde{N}] \{V^a\} = [J] \{V^a\} \quad (3.15)$$

$[\bar{F}]^{-1}$  代表(2.2)式中变换系数  $F_{ij}^i$  的逆矩阵。

另一方面, 在(3.12)式中须引入物性方程。这类关系在很多著作中已有详细讨论。在本文中引用单附加参数的弹塑性增量与应力增量定律(参见[2]、[12])。增量物性方程可表达为

$$\{\dot{\sigma}\} = [H] \{v\} = [M] \{V^a\}, \quad [M] = [H][J] \quad (3.16)$$

$[H]$  为物性系数矩阵, 实际上这些系数是塑性参数的变量, 在各个加载步和卸载步都和当时当地物理条件有关。

联合(3.15)与(3.16)诸式得

$$\int_{\Omega_n} \{\dot{\sigma}\}^T \delta \{v\} d\Omega \Delta t = \int_{\Omega_n} \{\Delta U^a\}^T [J]^T [H]^T [J] \delta \{V^a\} d\Omega \quad (3.17)$$

其中

$$\{V^{\alpha}\}_{(n-1)} \Delta t = \{\Delta U^{\alpha}\}_{(n-1)}, \quad \{U^{\alpha}\}_{(n)} = \{U^{\alpha}\}_{(n-1)} + \{\Delta U^{\alpha}\}_{(n-1)} \quad (3.18)$$

$\{\Delta U^{\alpha}\}$  为节点位移在定系的增量。在迭代计算中, 公式(3.17)中的  $[J]_{(n)}$  第一次近似以  $[J]_{(n-1)}$  代之。

将(3.17)公式代入(3.12), 又因表面力及体力之功  $W_s, W_f$  可以用矢量内积在拖带系或定系的分量表示

$$W_s = p_i v^i = P_i V^i, \quad W_f = \rho f_i v^i = \rho F_i V^i \quad (3.19)$$

$P_i, \rho F_i, V^i$  均为在定系的分量。由此, 我们有

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{\Omega_n} \{\Delta U^{\alpha}\}_{(n-1)}^T [J]_{(n-1)}^T [H]_{(n-1)} [J]_{(n-1)} d\Omega - \int_{S_{fn}} \{\Delta P\}_{(n-1)}^T [N]_{(n-1)} da \right. \\ & \left. - \int_{\Omega_n} \{\Delta(\rho F)\}_{(n-1)}^T [N]_{(n-1)} d\Omega \right] \delta\{V^{\alpha}\}_{(n)} = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

因  $\delta\{V^{\alpha}\}$  为任意的, 最后导出位移增量方程:

$$[K]_{(n-1)} \{\Delta U^{\alpha}\}_{(n-1)} - \{\overline{\Delta P}\}_{(n-1)} - \{\Delta(\overline{\rho F})\}_{(n-1)} = 0 \quad (3.21)$$

上式中定义

$$[K]_{(n-1)} \equiv \int_{\Omega_n} [J]_{(n-1)}^T [H]_{(n-1)} [J]_{(n-1)} d\Omega \quad (3.22a)$$

$$\{\overline{\Delta P}\}_{(n-1)} \equiv \int_{S_{fn}} [N]_{(n-1)}^T \{\Delta P\}_{(n-1)} da \quad (3.22b)$$

$$\{\Delta(\overline{\rho F})\}_{(n-1)} \equiv \int_{\Omega_n} [N]_{(n-1)}^T \{\Delta(\overline{\rho F})\}_{(n-1)} d\Omega \quad (3.22c)$$

必须注意的是以上计算以拖带系的实时位形为基准, 实际计算时要用物理分量。求出的位移增量是相对于固定系而言, 已知总位移便可以确定总应变。

从理论上说, 几何场论方法解决了目前其他非线性程序所根据理论的一个难点——转动与形变不协调问题, 从而提供了一条新的可靠途径。

应用本文方法建立的非线性大变形弹塑性力学平面问题解算程序已由尚勇和谢和平<sup>[9][10]</sup>完成, 计算结果和实验符合甚好, 内容将另文发表。

## 四、结 束 语

以上方法在解决非线性大变形静态或似静态问题已取得比现有其他非线性程序较好的结果, 特别是当平均整旋角大时。

再之, 由于非线性问题的分歧多值性质; 在失稳条件下, 如何处理此问题, 有待进一步探讨。

在有限位移增量法的变分原理表述方面, 前人已有一些有益的工作, 如卞学锁和董平<sup>[13][14]</sup>等。本人初稿曾在张之勇研制的 NFAP 程序北京学术讨论会中宣读, 该会议的主持人是北京工业大学张相麟教授, 作者在此谨致谢意。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] 陈至达, 连续介质有限变形力学几何场论, No 2 (1979), 107—117.
- [ 2 ] 陈至达, 有理力学讲义, 中国矿业学院, 北京研究生部, 修订本, (1983).
- [ 3 ] 陈至达, 杆、板、壳大变形理论, 应用数学和力学讲座 (讲义), (1982).
- [ 4 ] 陈至达, 钱氏定理在有限变形极矩弹性力学广义变分原理的应用, 应用数学和力学 2, 2(1981), 191—196.
- [ 5 ] Argyris, J. H., J. St. Doltsinis, On the large strain inelastic analysis in natural formulations, part I: Quasistatic problems, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, 20 (1979), 213—251.
- [ 6 ] Argyris, J. H., J. St., Doltsinis, K. Straub, etc., Recent natural formulations in nonlinear mechanics, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, 32(1982), 3—57.
- [ 7 ] Stones, G. G., *Cambridge Phil Soc. Trans.*, 8, (1845).
- [ 8 ] Новожилов В. В., 非线性弹性力学(1948), 朱兆祥译, 科学出版社(1956).
- [ 9 ] 尚勇, 平面弹塑性大变形有限元分析法, 中国矿业学院, 工程力学专业硕士学位论文, (1984).
- [ 10 ] 谢和平, 在重力场中连续体大变形分析及在地下工程中的应用, 中国矿业学院, 工程力学专业硕士学位论文, (1984)
- [ 11 ] Biot, M. A., *Mechanics of Incremental Deformation*, John Wiley & Sons (1965), p. vi—vii.
- [ 12 ] 陈至达, 固体弹塑变形的热力学势函数及应力-应变关系, 中国力学学会第一次塑性力学及极限设计讨论会, 大连, (1963).
- [ 13 ] 卞学镛, 董平, 有限位移分析的变分公式, 中译稿, 译自 *High Speed computing of Elastic Structures*, Tome I.
- [ 14 ] 卞学镛, 增量有限单元法的变分原理, 中译稿, 译自 *J. Franklin Inst.*, 302(1976).
- [ 15 ] Chang, T. Y. and K. Sawamiphakdi, Nonlinear finite element analysis program for static and dynamic response of structures (1981).

## Incremental Formulation for Finite Strain and Finite Rotation of Continuum Mechanics

Chen Zhi-da

(Beijing Graduate School, China Institute of Mining)

### Abstract

Due to some confusions existing in the current coordinate description of large rotation and large strain of continuum, there are always undiscernible mistakes in the formulation of finite element method for large displacement problems. The object of this paper is to scrutinize some basic theoretical point of views in continuum mechanics of finite deformation by the author's geometrical field theory<sup>[1][2]</sup>, and to formulate fundamental equations of incremental displacement for finite element method by energy principle of power type.

The method described has been used by Y. Shang<sup>[9]</sup> and H. P. Xie<sup>[10]</sup>. They have obtained results which agree very well with experiments of large deformation.