应用数学和力学，第6卷第9期（1985年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 对应函数$\mathscr{D}$(z)和广义非正则方程

董明德

（中国科学院理论物理所，1983年9月9日收到）

## 摘要

推广 Riemann $P$ 函数的思想（用方程的参数表示方程所定义的函数），引入$\mathscr{D}$函数统一表示正则积分和非正则积分。利用显式解讨论非 Fuchs 型方程的单值群。得到 Floquet 解的指标展开系数的显式。

根据对应函数法统一研究广义非正则方程的求解问题，包括具有正则和非正则极点，本性奇点，代数，对数和超越奇点以及奇线的方程。利用$\mathscr{D}$函数表示基本解系，从而推广解析理论的研究范围。

指出$\mathscr{D}$函数的自守性，并讨论 Poincaré 猜测的意义.

## 一、$\mathscr{D}$函数

为了推广 Riemann 用方程的参数集来表示方程及其基本解系，我们引入$\mathscr{D}$函数来统一表示 Fuchs 型和非 Fuchs 型方程及其基本解系。$\mathscr{D}$函数比 Riemann 的$P$函数应用范围更为广泛。

如所周知，Riemann 的$P$函数对于讨论超几何函数的变换法则十分方便。对于 Fuchs 型方程，当正则极点的个数超过三个时，$P$记号就不适用。这是由于除去相应指标$\beta_1^{(i)}$, $\beta_2^{(i)}$ ($i=1, 2, \cdots, \mu, \infty$) 外，还将出现 ($\mu-2$) 个所谓 Klein 多余参数 $b_j(j=1, 2, \cdots, \mu-2)$，无法统一纳入$P$记号来表示：

$$P\left\{\begin{matrix} e_1, & \cdots\cdots, & e_\mu, & \infty & \\ \beta_1^{(1)}, & \cdots\cdots, & \beta_1^{(\mu)}, & \beta_1^{(\infty)}; & z \\ \beta_2^{(1)}, & \cdots\cdots, & \beta_2^{(\mu)}, & \beta_2^{(\infty)} & \end{matrix}\right\}\oplus K(b_1, b_2, \cdots, b_{\mu-2}) \tag{1.1}$$

不但如此，对于非 Fuchs 型方程，$P$记号完全不适用。这是因为首先，根据无穷行列式理论，指标无法写出；其次，方程中参数的个数不受任何限制。

为统一表示 Fuchs 型、非 Fuchs 型方程，其标准型为：

$$\prod_{\sigma=1}^{l}\left(\frac{d}{d\zeta}-\beta_\sigma\right)\varphi_\sigma(\zeta)=\sum_k e^{k\zeta}\prod_{j=1}^{m_k}\alpha_k\left(\frac{d}{d\zeta}-\gamma_{k,j}\right)\varphi \tag{1.2}$$

引入$\mathscr{D}$记号如下：

$$\mathscr{D}\left\{\begin{matrix}\zeta\\ k,\alpha_k\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\beta_1, & \beta_2, \cdots, & \beta_l\\ \gamma_{k,1}, & \gamma_{k,2}, \cdots, & \gamma_{k,m_k}\end{matrix}\right\}=0 \tag{1.3}$$

当所有 $k>0$（或 $k<0$）时方程属 Fuchs 型。当 $k\gtrless 0$ 并存时，方程属于非 Fuchs 型，这时幂次 $\pm k$ 将构成收缩。方程中参数集（$k$, $\alpha_k$），（$\beta_\sigma$），（$\gamma_{k,j}$）分别列入花括号的第Ⅲ、Ⅰ、Ⅳ象限中，第Ⅱ象限标明自变量 $\zeta$，这对讨论函数的变换法则十分方便。与 Riemann $P$ 函数比较，我们的表示是相对于上述标准方程的一个确定的奇点，利用变换性质，可以得到 $\mathscr{D}$ 函数在另一奇点的表示。

在一些物理问题中，上述参数集分别具有特定的意义。$k$ 表幂次，一般情况可以推广到 $\omega(k)$。$(\alpha_k)$表示耦合参数，$(\beta_\sigma)$表基本解系中 Cayley 指标或映象 $\dfrac{1}{L(s)}$ 的极点，$(\gamma_{k,j})$ 表截断参数。

方程的线性独立解$\{\varphi_\sigma\}$根据表现定理写成

$$\varphi_\sigma(\zeta)=\mathscr{D}_\sigma\left\{\begin{matrix}\zeta & \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l\\ k,\alpha_k & \gamma_{k,1},\gamma_{k,2},\cdots,\gamma_{k,m_k}\end{matrix}\right\}$$
$$=\mathscr{D}_\sigma(\zeta)\varphi_\sigma^\circ(\zeta)\qquad(\varphi_\sigma^\circ(\zeta)=\exp[\beta_\sigma\zeta];\ \sigma=1,2,\cdots,l)\tag{1.4}$$

1) Fuchs 型方程。

$$\mathscr{D}_\sigma(\zeta)=1+\sum_1^\infty a_{\sigma,m}e^{m\zeta}\quad(m>0)$$

$$a_{\sigma,m}=\frac{1}{L(\beta_\sigma+m)}\left\{M_m(\beta_\sigma)+\sum_{n_1}\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma)M_{m-n_1}(\beta_\sigma+n_1)}{L(\beta_\sigma+n_1)}\right.$$
$$\left.+\sum_{n_1}\sum_{n_2}\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma)M_{n_2}(\beta_\sigma+n_1)M_{m-n_{(2)}}(\beta_\sigma+n_{(2)})}{L(\beta_\sigma+n_1)L(\beta_\sigma+n_{(2)})}+\cdots\right\}$$
$$(n_{(k)}=n_1+n_2+\cdots+n_k)\tag{1.5}$$

2) 非 Fuchs 型方程

$$\mathscr{D}_\sigma(\zeta)=\sum_{-\infty}^\infty A_{\sigma,m}\exp[(\nu_\sigma+m)\zeta]\quad(A_{\sigma,0}=1)\tag{1.6}$$

指标和展开系数是 $(\alpha,\beta,\gamma)$ 的树级数

$$\nu_\sigma={}^{(2)}\nu_\sigma+{}^{(3)}\nu_{(\sigma)}+{}^{(4)}\nu_\sigma+\cdots$$
$$A_{\sigma,m}={}^{(1)}a_{\sigma,m}+{}^{(2)}a_{\sigma,m}+{}^{(3)}a_{\sigma,m}+\cdots$$

其中

$${}^{(2)}\nu_\sigma=\sum_n{}'\frac{M_n(\beta_\sigma-n)M_{-n}(\beta_\sigma)}{L'(\beta_\sigma)L(\beta_\sigma-n)}\quad(={}^{(2)}\nu(s)|_{s=\beta_\sigma})$$
$${}^{(1)}a_{\sigma m}\equiv{}^{(1)}a_m(s)|_{s=\beta_\sigma}$$
$${}^{(1)}a_m(s)=\frac{1}{L(s+m)}\left\{M_m(s)+\sum_{n_1}{}'\frac{M_{n_1}(s)M_{m-n_1}(s-n_1)}{L(s-n_1)}\right.$$
$$\left.+{}^*\left(\sum\sum\right)\frac{M_{n_1}(s)M_{n_2}(s-n_1)M_{m-n_{(2)}}(s-n_{(2)})}{L(s-n_1)L(s-n_{(2)})}+\cdots\right\}$$
$${}^{(i)}a_{\sigma,m}={}^{(i)}a_m(s)|_{s=\beta_\sigma}=\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^k\{{}^{(i)}\nu^k(s),{}^{(1)}a_m(s)\}|_{s=\beta_\sigma}$$

式中$^*(\sum\limits_{n_1}{}'\sum\limits_{n_2}{}'\cdots\sum\limits_{n_k}{}')$表 $n$ 之间无收缩。

按树图法可得逐代的修正项，兹暂略。

## 二、正则方程的$\mathscr{D}$函数

广义 Lamé 方程

广义 Lamé 方程是指含有五个正则极点（$e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$, $e_5=\infty$）的二阶 Fuchs 型方程，每个极点的指标差等于1/2。Klein 和 Bôcher 指出这一方程共有六种合流形式，它给出几种比较重要的数理方程。现列出这些方程的解，$\mathscr{D}$函数。

[5,0,0] 广义 Lamé 方程。

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\frac{1}{4}\sum_{r=1}^{4}\frac{1}{z-e_r}\frac{d\varphi}{dz}+\frac{3z^2/16+A_1z+A_2}{\prod\limits_{r=1}^{4}(z-e_r)}\varphi(z)=0 \tag{2.1}$$

$[a,b,c]$是奇点分类的 Ince 记号，$a$ 表示指标差为1/2的正则极点的个数，$b$ 表示其他正则极点的个数，$c$ 表非正则极点的个数。

1. [3,1,0] Lamé 方程

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{3}\frac{1}{z-e_r}\frac{d\varphi}{dz}+\frac{h+n(n+1)z}{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}\varphi=0$$

$$\varphi_\sigma(z)=\mathscr{D}_\sigma\left\{\begin{array}{ll|ll} & z-e_1 & 0, & \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{e_2-e_3-2e_1}{(e_2-e_1)(e_3-e_1)} & -\frac{n}{2}, & \frac{n+1}{2} \\ 2, & -\frac{1}{(e_2-e_1)(e_3-e_1)} & -i\sqrt{h_0}, & i\sqrt{h_0}\end{array}\right\} \tag{2.2}$$

$$h_0=\frac{h+n(n+1)e_1}{4(e_2-e_3-2e_1)}$$

2. [1,2,0]伴随 Legendre 方程

$$(1-z^2)\frac{d^2\varphi}{dz^2}-2z\frac{d\varphi}{dz}+\left\{\mu(\mu+1)-\frac{\nu^2}{1-z^2}\right\}\varphi(z)=0$$

$$\varphi_\sigma(z)=\mathscr{D}_\sigma\left\{\begin{array}{c|cc}(1-z)/2 & 0, & 1 \\ 2,\ 1 & \nu-\mu, & -\mu-\nu-1\end{array}\right\} \tag{2.3}$$

3. [2,0,1] Mathieu 方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+(a+k^2\cos^2 t)\varphi(t)=0$$

即

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\left(a+\frac{k^2}{2}\right)\varphi=-\frac{k^2}{4}(\exp[2it]+\exp[-2it])\varphi$$

$$\varphi_\sigma(z)=\mathscr{D}_\sigma\left\{\begin{array}{c|cc} it & \sqrt{a+k^2/2}, & -\sqrt{a+k^2/2} \\ 2,\ k^2/4 & \multicolumn{2}{c}{——} \\ -2,\ k^2/4 & \multicolumn{2}{c}{——}\end{array}\right\} \tag{2.4}$$

或者

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2}-\frac{\lambda+2q}{2}\right)\varphi=4q\exp[\zeta]\varphi-2\exp[-\zeta]\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{d}{d\zeta}+1\right)\varphi$$

$$\varphi_\sigma(\zeta)=\mathscr{D}_\sigma\left\{\begin{array}{c|c} e^\zeta & \sqrt{q+\lambda/2},\ \sqrt{q+\lambda/2} \\ 1,\ 4q & \overline{\quad} \\ -1,-2 & 0,\ 1 \end{array}\right\} \tag{2.5}$$

Mathieu 函数属于非正则积分，可用连分法求数值解，它的解析结构只能用树级数显示表述。

4. [0,1,1] Bessel 方程

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{d\varphi}{dz}+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)\varphi=0$$

$$\varphi_\sigma(z)=\mathscr{D}_\sigma\left\{\begin{array}{c|c} z & -n,\ +n \\ 2,\ -1 & \overline{\quad} \end{array}\right\} \tag{2.6}$$

5. [$1,0,1_2$] Weber 方程

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\left(n+\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4}\right)\varphi(z)=0$$

$$\varphi_\sigma(z)=\mathscr{D}_\sigma\left\{\begin{array}{c|c} z & 0,\ 1 \\ 2,\ -n-1/2 & \overline{\quad} \\ 4,\ 1/4 & \overline{\quad} \end{array}\right\} \tag{2.7}$$

6. [$0,0,1_3$] Stokes 方程

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}+z\varphi(z)=0$$

$$\varphi_\sigma(z)=\mathscr{D}_\sigma\left\{\begin{array}{c|c} z & 0\ \ 1 \\ 2,\ 1 & \overline{\quad} \end{array}\right\} \tag{2.8}$$

顺便提一下，超几何函数的推广如

$${}_pF_q\left[\begin{matrix}\alpha_1,\cdots,\alpha_p; & z\\ \rho_1,\cdots,\rho_q & \end{matrix}\right],\quad G^{mn}_{p,q}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}a_1,\cdots,a_p\\ b_1,\cdots,b_q\end{matrix}\right) \tag{2.9}$$

分别称 Clausen 函数（1828）和 Mayer 函数（1936）都是$\mathscr{D}$函数的简单特例，它们都无法推广用来表示非正则积分。

## 三、非正则方程的$\mathscr{D}_\sigma(\zeta)$函数

非正则方程的最著名例子是 Hill 方程

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}+(a_0+2\sum a_n\cos 2nt)\psi(t)=0 \tag{3.1}$$

写成标准形式

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2}-\beta^2\right)\psi=\sum_n\alpha_n(\exp[n\zeta]+\exp[-n\zeta])\psi(\zeta)\qquad(n=\pm1,\pm2,\cdots) \tag{3.2}$$

其中

$$\zeta=2it,\qquad \alpha_n=-a_n/4$$
$$\beta^2=a_0/4,\qquad \beta_{1,2}=\pm\sqrt{a_0}/2$$

它的$\mathscr{D}(\zeta)$函数表示为

$$\psi_\sigma(\zeta)=\mathscr{D}_\sigma\left\{\begin{array}{c|c}\zeta & \beta_1,\ \beta_2 \\ \hline n,\ \alpha_n & \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

Hill 函数的显式解至今并未求得，但应用树图法可得它的解析表述，即 $\mathscr{D}(\zeta)$函数的具体表式。

根据树图法，无收缩部为

$$^{(1)}\psi_\sigma(\zeta)=T_\sigma(\zeta)\exp[\beta_\sigma\zeta]=\sum_{-\infty}^{\infty}a_{\sigma,m}\exp[(m+\beta_\sigma)\zeta] \tag{3.4}$$

其中

$$T_\sigma(\zeta)=T(s,\zeta)|_{s=\beta_\sigma}=\sum_{-\infty}^{\infty}a_m(s)|_{s=\beta_\sigma}\exp[m\zeta]$$

$$a_m(s)=\frac{1}{L_m}\left\{\alpha_m+\sum_{n_1}{}'\alpha_{n_1}[1-\sum_{n_2}{}'\alpha_{n_2}\exp[n_2\partial_{n_1}]]^{-1}\frac{\alpha_{m-n_1}}{L_{n_1}}\right\}$$

$$a_{\sigma m}=a_m(s)|_{s=\beta_\sigma}=\frac{1}{l_m}\left\{\alpha_m+\sum_{n_1}{}'\frac{\alpha_{n_1}\alpha_{m-n_1}}{l_{n_1}}\right.$$

$$\left.+{}^*\left(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\right)\frac{\alpha_{n_1}\alpha_{n_2}\alpha_{m-n(2)}}{l_{n_1}l_{n(2)}}+{}^*\left(\sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3}\right)\frac{\alpha_{n_1}\alpha_{n_2}\alpha_{n_3}\alpha_{m-n(3)}}{l_{n_1}l_{n(2)}l_{n(3)}}+\cdots\right\}$$

$$L_{n_1}\equiv L(s+n_1)=(s+n_1)^2-\beta^2,\quad n_{(k)}=n_1+n_2+\cdots+n_k$$

$$l_{n_1}\equiv L(\beta_\sigma+n_1)=n_1(n_1+2\beta_\sigma)$$

最简单的收缩项为

$$\langle\overbrace{n_1\ n_2}\rangle=\lim_{s\to\beta_\sigma}\frac{\partial}{\partial s}\{\Delta(s)\exp[s\zeta]\}$$

$$\Delta(s)=\sum_n{}'\frac{\alpha_n^2}{2sL_n}$$

由此求$A$，$D$序列得

$$A\langle\overbrace{n_1\ n_2}\rangle=\lim_{s\to\beta_\sigma}\frac{\partial}{\partial s}\{\Delta(s)T(s,\zeta)\exp[s\zeta]\}$$

$$D\langle\overbrace{n_1\ n_2}\rangle=\langle\overbrace{n_1\ n_2}\rangle+\langle\overbrace{n_1\ n_2}^{2}\rangle+\langle\overbrace{n_1\ n_2}^{3}\rangle+\cdots$$

$$=\lim_{s\to\beta_\sigma}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^k\{\Delta^k(s)\exp[s\zeta]\}$$

而$DA$复合序列为

$$DA\langle\overbrace{n_1\ n_2}\rangle=\lim_{s\to\beta_\sigma}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^k\{\Delta^k(s)T(s,\zeta)\exp[s\zeta]\}$$

因此二阶子树图解为

$$^{(2)}\psi_\sigma(\zeta)={}^{(1)}\psi_\sigma(\zeta)+DA\langle\overbrace{n_1\ n_2}\rangle$$

$$=\lim_{s\to\beta_\sigma}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^k\{\Delta^k(s)T(s,\zeta)\exp[s\zeta]\}$$

$$=\lim_{s\to\beta_\sigma}\exp\left\{\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\Delta(s)\right\}\cdot T(s,\zeta)\exp[s\zeta]$$

$$=\sum_{m}{}^{(2)}a_{\sigma,m}\exp[({}^{(2)}\nu_{\sigma}+\beta_{\sigma}+m)\zeta] \tag{3.5}$$

其中

$${}^{(2)}\nu_{\sigma}=\sum_{n}{}'\frac{\alpha_n{}^2}{2\beta_{\sigma}\cdot n(n+2\beta_{\sigma})}$$

$${}^{(2)}a_{\sigma m}={}^{(1)}a_{\sigma m}+\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{k}(\Delta^{k}(s)a_{m}(s))\right\}\Big|_{s=\beta_{\sigma}}$$

完全同理，可得$\varnothing$函数表示

$$\psi_{\sigma}(\zeta)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_{\sigma m}\exp[(\nu_{\sigma}+m)\zeta] \tag{3.6}$$

$$a_{\sigma m}=\lim_{\lambda\to\infty}{}^{(\lambda)}a_{\sigma,m}$$

$$\nu_{\sigma}=\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{1}^{\lambda}{}^{(i)}\nu_{\sigma}$$

包括第 4 代的指标和展开系数

$${}^{(4)}\nu_{\sigma}={}^{(1)}\nu_{\sigma}+\sum_{2}^{4}{}^{(i)}\nu_{\sigma}$$

$${}^{(4)}a_{\sigma m}={}^{(1)}a_{\sigma,m}+\sum_{2}^{4}{}^{(i)}a_{\sigma m}$$

$${}^{(i)}a_{\sigma m}=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{k}\{{}^{(i)}\nu^{k}(s)a_{m}(s)\}$$

$${}^{(3)}\nu_{\sigma}={}^{*}\left(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\right)\frac{\alpha^{2}{}_{n_1}\alpha_{n_2}}{l_{n_1}l_{n(2)}}\quad(={}^{(3)}\nu(s)|_{s=\beta_{\sigma}})$$

$${}^{(4)}\nu_{\sigma}={}^{*}\left(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\right)\frac{\alpha^{2}{}_{n_1}}{l_{n_1}}\left[\frac{\alpha^{2}{}_{n_2}}{l_{n(2)}}\left(\frac{1}{l_{n_1}}+\frac{1}{l_{n_2}}\right)+{}^{*}\sum_{n_3}{}'\frac{\alpha_{n_3}-\alpha_{-n(3)}}{l_{n(3)}}\right]$$

由于关系式

$$\left.\begin{aligned}&a_{n}(\beta_1)=a_{-n}(\beta_2)(=2h_n)\\&\nu(\beta_1)=-\nu(\beta_2)(=\nu)\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

因此 $\psi_1$，$\psi_2$ 的线性组合给出Hill函数如下

$$\left.\begin{aligned}H_{c}(t)&=\sum_{-\infty}^{\infty}h_{n}\cos(2n+\nu)t\\H_{s}(t)&=\sum_{-\infty}^{\infty}h_{n}\sin(2n+\nu)t\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

奇偶性为

$$H_{c}(-t)=H_{c}(t)$$
$$H_{s}(-t)=-H_{s}(t)$$

赝周期性

当 $\zeta\to\zeta+2\pi i$ 时，有

$$\psi_1(\zeta+2\pi i)=\kappa_1\psi_1(\zeta)$$
$$\psi_2(\zeta+2\pi i)=\kappa_2\psi_2(\zeta)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\kappa_1&=\exp[2\pi i\nu_1]\\ \kappa_2&=\exp[2\pi i\nu_2]=\frac{1}{\kappa_1}\end{aligned}\right\}\tag{3.9}$$

因此 Floquet 指标可以写出显式如上，展开系数也能由树图法得出解析表述。结论：非 Fuchs 型的 $\mathscr{D}(\zeta)$函数的解析表述可用树图法给出。

## 四、广义非正则方程

对应原理可进一步推广到广义非正则方程，即更一般的变系数线性方程。

数学推导基本同前。简单物理类比如下：

设有一物理系统，其初态用方程$L\varphi^0=0$来描。在扰动$Q\{\varphi\}$作用下($Q=\sum\limits_n\exp[\omega(n)\zeta]M$, $(d/d\zeta)$，$Q$可为一般线性算子)，则此系统的运动可以用方程 $L\varphi=Q\{\varphi\}$来描述。

根据自然现象的因果律，初态和扰动态之间必然存在因果关系 $\varphi=\overset{\sigma}{\mathscr{D}}\varphi^0$，或者，与此等价，有$\varphi_\sigma=\overset{\sigma}{\mathscr{D}}_\sigma\varphi_\sigma^0(\sigma=1,2,\cdots,l)$ 其中$\mathscr{D}$是待求的因果函数。显然，Fuchs 型方程（如 Lamé 方程等）的基本解系满足这一因果关系。非 Fuchs 型方程以及更一般的变系数方程也必然满足这一关系，问题是 $\mathscr{D}_\sigma$ 具有更复杂的结构。

容易看出，本法的叙述与一些物理问题有对应关系。例如，统计力学中集团展开，量子场论中各阶树图和圈图。这些类比并不偶然，因为这里算符 $[1-H]^{-1}$ 的展开与量子力学中求散射振幅的过程几乎完全一致。其差别在于这里不采用微扰论，而得到解的内禀结构，并证明当结构因子小于 1 时，级数解在一带域解析。

**广义$\mathscr{D}$函数。**

进一步对一般变系数线性方程按照奇异性的类型进行分类（见表 1），包括正则、非则极点，本性奇点、代数支点、超越奇点，对数奇点以及奇线等。

利用$\mathscr{D}$函数可以统一表述含有上述奇点的方程及其基本解系。

显然，当指标$n$推广为$\omega(n)$时，其中$\omega(n)$是$n$的函数，解析法完全成立，必要时取适当的 Riemann 面以计及函数的多值性。重复上述推导，即得方程所定义的函数的解析表述。

根据广义幂次 $\omega(n)$是否存在“收缩”可将级数解分为两类：

（1） 广义正则积分 $\sum\limits_i\omega(n_i)\neq0$

（2） 广义非正则积分 $\sum\limits_i\omega(n_i)=0$

一般而言，方程的标准型有两类（见表 2）：

（1） 广义 Fuchs 型

$$L\left(\frac{d}{d\zeta}\right)\varphi(\zeta)=\sum_n\alpha_n\exp[\omega(n)\zeta]M_n\left(\frac{d}{d\zeta}\right)\varphi\tag{4.1}$$

$$(n>0\text{或}n<0,\ \sum_i\omega(n_i)\neq0)$$

（2） 广义非 Fuchs 型

$$L\left(\frac{d}{d\zeta}\right)\varphi(\zeta)=\sum_n{}'\alpha_n\exp[\omega(n)\zeta]M_n\left(\frac{d}{d\zeta}\right)\varphi \tag{4.2}$$

$$(n\gtrless 0\ \text{且}\ \sum_i\omega(n_i)=0)$$

两者的解统一表成$\mathscr{D}$函数如下：

$$\varphi_\sigma(\zeta)=\mathscr{D}_\sigma\left\{\begin{matrix}\zeta & \beta_1,\beta_2\cdots,\beta_l\\ \omega(n),\alpha_n & \gamma_{n,1},\gamma_{n,2},\cdots,\gamma_{n,j}\end{matrix}\right\}$$

$$=\mathscr{D}_\sigma(\zeta)\varphi_\sigma^0(\zeta)\quad(\varphi_\sigma^0(\zeta)=\exp[\beta_\sigma\zeta]) \tag{4.3}$$

重复前述论证，则得广义非正则积分的表现定理。

示例：考虑具有奇线的方程，系数为广义Dirichlet级数$\Sigma\alpha_n\exp[\omega(n)\zeta]$，且满足Hadamard隙窝级数判别条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega(n)}{n}\longrightarrow\infty$$

这时收敛圆本身是奇线，或称自然边界。函数不能越过自然边界进行延拓。具有封闭奇线的函数统称隙窝函数，如 Fredholm 级数，

$$\omega(n)=n!,\ n^2,\ \Sigma\alpha_nz^{n!},\ \Sigma\alpha_nz^{n^2},\cdots$$

具有奇线的方程所定义的解由广义$\mathscr{D}$函数给出，这类问题在理论上很有意义，过去并未有过讨论。

表 1　奇异性的类型

| | 系数函数 | 奇异性 | $z$ 表示 | $\zeta$ 表示 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Taylor级数 | 正则极点 | $\sum_0^\infty\alpha_nz^n$ | $\sum_0^\infty\alpha_n\exp[n\zeta]$ |
| 2 | 半纯函数 | 非正则极点 | $\sum_{-N}^\infty\alpha_nz^n$ | $\sum_{-N}^\infty\alpha_n\exp[n\zeta]$ |
| 3 | Laurent 级数 | 本性奇点 | $\sum_{-\infty}^\infty\alpha_nz^n$ | $\sum_{-\infty}^\infty\alpha_n\exp[n\zeta]$ |
| 4 | Puiseux 级数 | 代数奇点 | $\sum_n\alpha_nz^{n/\mu}$ | $\sum_n\alpha_n\exp[n\zeta/\mu]$ |
| 5 | Fourier 级数 | 超越奇点 | $\sum_n\alpha_nz^n$ | $\Sigma\alpha_n\exp[in\zeta]$ |
| 6 | Cosine 级数 | (单周期性) | $\Sigma\alpha_n\cos 2nz$ | $\Sigma\alpha_n\exp[in\zeta]$ |
| 7 | Jacobi 函数 | (双周期性) | $\Sigma\alpha_n(\mathrm{sn}z)^{2n}$ | — |
| 8 | 对数级数 | 对数奇点 | $\Sigma\alpha_n\ln^nz$ | $\Sigma\alpha_n\zeta^n$ |
| 9 | 广义 Dirichlet 级数 | 奇线 | $\Sigma\alpha_nz^{\omega(n)}$ | $\Sigma\alpha_n\exp[\omega(n)\zeta]$ |

表 2　$\mathscr{D}$ 函数

| | 正则型 | 非正则型 | 广义非正则型 |
|---|---|---|---|
| 方程 | $L\varphi=\sum_{n>0}\exp[n\zeta]M_n\varphi$ | $L\varphi=\sum_{n\gtrless 0}\exp[n\zeta]M_n\varphi$ | $L\varphi=\sum_n\exp[\omega(n)\zeta]M_n\varphi$ |
| $\mathscr{D}$函数 | $\mathscr{D}\left\{\begin{matrix}\zeta & (\beta)\\ n,\alpha_n & (\gamma)\end{matrix}\right\}_{n>0}$ | $\mathscr{D}\left\{\begin{matrix}\zeta & (\beta)\\ n,\alpha_n & (\gamma)\end{matrix}\right\}_{n\gtrless 0}$ | $\mathscr{D}\left\{\begin{matrix}\zeta & (\beta)\\ \omega(n),\alpha_n & (\gamma)\end{matrix}\right\}_{n\gtrless 0}$ |

## 五、Poincaré高级自守函数和树级数

非 Fuchs 型方程的非正则积分不可能明显表述导致 Poincaré 建立自守函数理论。Poincaré 宣称：存在新型的函数，它与所有已知函数根本不同，后者是欧氏平面或球（Riemann 面的映象）的不连续运动群的变换下保持不变。新函数可称为高级自守函数（Fuchs类、Klein 类），Fuchs 函数是以 Lobatchevski 平面为运动群；Klein 函数是以 Lobatchevski 空间为运动群。

Poincaré 曾经作过重要的猜测：非正则积分的系数和已知方程的参数之间所存在的超越关系与高级自守函数可能有密切连系（全集，卷一 p. 334）

自守函数理论主要讨论它的群性质，至今未能给出非正则积分的显式。我们认为，主要原因是由于高级自守函数不能用通常递推级数而要用树级数来表示。因此，如果上述树级数具有自守性，Poincaré 猜测可认为是正面成立的。

**定　理**　$\mathscr{D}(z)$是自守函数

在$S$变换下，$\mathscr{D}$函数形式不变，

$$S:\quad \tilde{z}=\frac{az+b}{cz+d}\quad (ad-bc=1)$$

$$\mathscr{D}\left\{\begin{array}{c:c} z & (\beta_\sigma) \\ \hdashline \omega(n),\alpha_n & (\gamma_{n,j}) \end{array}\right\}\to\mathscr{D}\left\{\begin{array}{c:c} \tilde{z} & (\tilde{\beta}_\sigma) \\ \hdashline \tilde{\omega}(n),\ \tilde{\alpha}_n & (\tilde{\gamma}_{n,j}) \end{array}\right\} \tag{5.1}$$

其中 $\tilde{\omega}(n),(\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma})$依赖于$\omega(n),(\alpha,\beta,\gamma)$。

进一步推广，如

$$S=S_{m_k}\cdots S_{m_2}S_{m_1}$$

$$S_{mi}=\frac{a_{m_i}z+b_{m_i}}{c_{m_i}z+d_{m_i}},\quad (a_{m_i}d_{m_i}-b_{m_i}c_{m_i}=1,\ \ i=1,2,\cdots,k)$$

则有

$$\mathscr{D}(S(z))=\mathscr{D}(z)$$

式中略参数集（$\omega(n),\alpha,\beta,\gamma$）。即$S$是 Abel 群。

综上，利用$\mathscr{D}$函数可以讨论一些现有方法难以严格处理的线性问题，由此可以建立线性方程的一般解法。再者，对于这类函数的解析性质，须作进一步的探讨。

### 参 考 文 献


[1] Poincare, H., *Oeuvres*, T1, p. 334; T2, p. 300.

[2] Bieberbach, L., Theorie der Gewönliche Differentialgleichungen (1965).

[3] Erdelyi, A., *Higher Transcendental Functions*, Ⅰ～Ⅲ(1953).

[4] Dong Ming-de, *Acta Astron. Sinica*, 21, 1 (1980).

[5] Dong Ming-de, *New Analytic Theory for Equations with Variable Coefficients*, Lecture Notes (to be published)

[6] Dong Ming-de, *New Theory for Equations of Non-Fuchsian Type* Ⅰ, Ⅱ(to be published)

# Correspondence Function $\mathscr{D}(z)$ and Generalized Irregular Equations

Dong Ming-de

*(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, Bejing)*

**Abstract**

Extending Riemann's idea of $P$ function (using equation's parameters to represent the function defined by the equation), we introduce correspondence functions $\mathscr{D}(z)$ to describe regular and irregular integrals in a unifying way.

By explicit solution discuss monodromy group of non-Fuchsian equations. The explicit expressions of exponent and expansion coefficients for Floquet solution are obtained.

Method of correspondence functions permits us to obtain systematically the solutions of generalized irregular equations, having regular, irregular poles, essential, algebraic, transcendental, logarithmic singularities as well as singular line.

The representation of basic set of solutions by $\mathscr{D}_{\sigma}(z)$ function makes it possible to enlarge the scope of investigation of analytic theory.

The significance of Poincare's conjecture is discussed, as $\mathscr{D}$ functions are automorphic.