应用数学和力学，第6卷第9期（1985年9月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

讨 论 栏

对“关于连续介质有限变形问题的几点讨论”的讨论

彭乐生（上海交通大学）：

(一)

连续体变形可由应变张量描述．应变张量形式很多（理论上可以 有 无 限 多[3]），常见为

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\hat{g}_{\alpha\beta}-\mathring{g}_{\alpha\beta}) \tag{1}$$

和

$$\theta^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\hat{g}^{\alpha\beta}-\mathring{g}^{\alpha\beta}) \tag{2}$$

式中$\mathring{g}_{\alpha\beta}(\mathring{g}^{\alpha\beta})$和$\hat{g}_{\alpha\beta}(\hat{g}^{\alpha\beta})$分别是随体坐标架在变形前后的度量张量．

应变张量$\varepsilon_{\alpha\beta}$和$\theta^{\alpha\beta}$可以定义在变形前的坐标架中，也可以定义在变形后的坐标架 中，相应称为Lagrange应变张量和 Euler 应变张量，以资区别．当采用直角笛卡尔坐标时，则常称前者为Green-Cauchy张量，后者为Almansi-Hamel张量（有的文献中，也用Love、Segawa、Finger张量等名称不一）；它们的分量$\varepsilon_{\alpha\beta}$和$\theta^{\alpha\beta}$都可以有直观的几何解释（提醒一句：$\varepsilon_{\alpha\beta}$和$\theta^{\alpha\beta}$不是同一张量的两种分量；$\varepsilon_{\alpha\beta}\neq\theta_{\alpha\beta}$，$\varepsilon^{\alpha\beta}\neq\theta^{\alpha\beta}$）．

以上所述，属连续介质力学之基本内容，可以见于一般教科书（例如《连续介质力学入门》[4]），却也见于学术期刊[1]．

(二)

对应于运动的连续性公理，应变张量必须满足相容方程．当变形前的坐标 $\xi^1\xi^2\xi^3$ 为直角笛卡尔时，相容方程为[2]

$$\frac{\partial G_{\nu\mu i}}{\partial\xi^j}-\frac{\partial G_{\nu\mu j}}{\partial\xi^i}+\hat{g}^{\alpha\omega}[G_{\omega\mu j}G_{\alpha\nu i}-G_{\omega\mu i}G_{\alpha\nu j}]=0 \tag{3}$$

式中

$$G_{\nu\alpha j}=\frac{\partial\varepsilon_{\alpha\nu}}{\partial\xi^j}+\frac{\partial\varepsilon_{j\nu}}{\partial\xi^\alpha}-\frac{\partial\varepsilon_{\alpha j}}{\partial\xi^\nu}$$

矩阵

$$[\hat{g}^{\alpha\omega}]=[\hat{g}_{\alpha\omega}]^{-1}=[\delta_{\alpha\omega}+2\varepsilon_{\alpha\omega}]^{-1}$$

但在大变形时，满足相容方程（3）的$\varepsilon_{\alpha\beta}$（甚至$\varepsilon_{\alpha\beta}=\langle\text{const}\rangle_{\alpha\beta}$）并不一定就能表示应变；$\varepsilon_{\alpha\beta}$必须受下述基本条件约束，即：

$$\mathring{g}_{\alpha\beta}\text{和}\hat{g}_{\alpha\beta}\text{都必须对称、正定} \tag{4}$$

这原是基本原则，但因为小变形时（4）总能满足，在大多数场合都无须检验，因而大变形时，有时也会被忽视。Седов曾举过一例$\varepsilon^*_{\alpha\beta}=k(t)\varepsilon_{\alpha\beta}(\xi^1\xi^2\xi^3)$，说明式中$\varepsilon_{\alpha\beta}$能满足相容方程（3）而$\varepsilon^*_{\alpha\beta}$不能（当$0<k<1$时）[2]。现要指出的是：此例违反了条件(4)，因而在$k=1$时也不能成立。

此例为

$$[\varepsilon_{\alpha\beta}]=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}h(\xi^3) & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}h(\xi^3) & 0 & \frac{1}{2}h'(\xi^3)\xi^1 \\ 1/2 & \frac{1}{2}h'(\xi^3)\xi^1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

式中$h(\xi^3)$为任意函数。

此时相容方程可化为[1]

$$\hat{g}^{22}[h'(\xi^3)]^2=0 \tag{6}$$

变形前的度量张量为

$$[\mathring{g}_{\alpha\beta}]=[\delta_{\alpha\beta}]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

现在分析此例：

由(1)、(5)、(7)得

$$[\hat{g}_{\alpha\beta}]=[\mathring{g}_{\alpha\beta}+2\varepsilon_{\alpha\beta}]=\begin{bmatrix} 1 & h & 1 \\ h & 1 & h'\xi^1 \\ 1 & h'\xi^1 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

和

$$[\hat{g}^{\alpha\beta}]=[\hat{g}_{\alpha\beta}]^{-1}=\frac{1}{(h-h'\xi^1)^2}\begin{bmatrix} (h'\xi^1)^2-1 & h-h'\xi^1 & 1-hh'\xi^1 \\ h-h'\xi^1 & 0 & h'\xi^1-h \\ 1-hh'\xi^1 & h'\xi^1-h & h^2-1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

(9)式给出$\hat{g}^{22}=0$，从而满足了相容方程式(6)。但是(8)、(9)均非正定（显然$\det\hat{g}_{\alpha\beta}=-[h-h'\xi^1]^2<0$)，所以此例不能成立。程沅生同志指出此例不能成立，认为它不满足相容方程[1]。但事实上是此例满足相容方程式（6）及方程组（3），主要是不满足$\hat{g}_{\alpha\beta}$正定要求。

参考文献

[1] 程沅生，关于连续介质有限变形问题的几点讨论，应用数学和力学，2，4（1981）.

[2] Седов Л. И., О понятиях простого нагружения и о возможных путях деформации,

ПММ, Том23, вып.2 (1959).
[3] 郭仲衡, 非线性弹性理论, 科学出版社 (1980), *p*93.
[4] Fung, Y. C., *A First Course in Continuum Mechanics*, Prentice-Hall (1977).

程沅生（上海工业大学）：

（一） 对该文第一段的答复

彭乐生同志文章的第一段认为拙作《关于连续介质有限变形问题的几点讨论》[1]中关于有限变形特征张量θ^{ij}的讨论"属于连续介质力学之基本内容，可以见于一般教科书（例如《连续介质力学入门》），却也见于学术期刊"（指《应用数学和力学》）。既然彭乐生同志提出了问题，我就有责任予以答复。

拙作[1]是我刚大学毕业不久于1963年撰写的读书报告[2]的一部分，曾在上海工学院流体力学教学小组召集的会议上详细介绍过，并于1963年9月将读书报告中的这部分内容改写成论文投送《力学学报》。同年12月初《力学学报》编委会提出审稿意见是：审稿人甲指出："作者对二阶逆变应变张量θ^{ij}及对Segawa文中列出的四个应变特征张量作了一些补充讨论"。"建议将来稿……压缩到3000字以内，作为对Бондарь及Segawa结果的一些学术讨论"[3]。审稿人乙指出：文章"填补了文献[3]*的空隙，证明了通过θ^{ij}能求得在任意方向长度及角度的改变"。"审稿人认为可用简洁的叙述写成报导性的短文形式发表"。"本文事实上表明了作者对这理论的某些问题在克服了不少困难后已有一定的掌握，这是一个良好的开端"。"审稿人希望作者不会因初写稿件得不到立刻全部发表而减低自己在这方面的积极性，而相反地再接再励为扫除我国力学在这方面的空白点和国内其他同志一起共同努力"[3]。可是，后来《力学学报》编委会又认为此文"内容与本学报性质不合，故退回"。（《力学学报》编委会1964年4月17日给本人的回信）。

应该指出，当本人撰写该文时彭乐生同志所列举的几本专著都还没有出版。

十一届三中全会以后，《应用数学和力学》学报诞生了。我将此文寄送《应用数学和力学》编委会。本人认为，《应用数学和力学》为了支持和鼓励青年人的工作，让他们的点滴工作能有机会进行交流，所以哪怕是1963年撰写的，也予以发表。同时考虑到《力学学报》的权威性，故在发表文[1]时没有作一个附注说明。

（二） Седов一例不满足相容性方程

一般的有限变形通过简单加载过程实现的可能性并不总是存在的，这就要看所给出的有限变形是否满足相容性方程。Л. И. Седов曾举一例[4]，他说此例仅在$k=1$时满足相容性方程，而在$k\neq1$时都不满足相容性方程，因此不能通过简单加载过程来实现。针对Седов所讲的，我在文[1]中指出，此例在$k=1$时也不满足相容性方程。

彭乐生同志文章的第二段认为："事实是此例满足相容性方程式(6)及方程组(3)"。现在我们来看看此例究竟满足不满足相容性方程。

* 这里指 Бондарь В. Д., *ПММ*, Том XXV, вып 3 (1961).

此例在$k=1$时相容性方程组（即彭乐生同志文中的（3）式）简化为

$$\hat{g}^{22}[h'(\xi^3)]^2=0$$

这就是彭乐生同志文中的（6）式。由于$h(\xi^3)$为不等于常数的任意函数，$h'(\xi)^3\neq 0$。

彭乐生同志指出，由“(9)式给出$\hat{g}^{22}=0$，从而满足了相容方程式（6)”。这就是彭乐生同志认为此例能满足相容性方程的根据。

看来由于拙作[1]及我给彭乐生同志的第一次答复都写得过于简略，以致彭乐生同志没能理解。为此须较详细地解释一下。

$\hat{g}^{22}=0$意味着什么呢？$\hat{g}^{22}=0$能够成立吗？

设$Oy_1y_2y_3$是固定于空间的直角坐标系，$\mathbf{i}_\alpha(\alpha=1, 2, 3)$是它的基底向量。假设被嵌在介质内的Lagrange坐标系$O\xi^1\xi^2\xi^3$在变形以前与空间坐标系$Oy_1y_2y_3$重合。

而变形以后，对于被拖带的坐标系$O\xi^1\xi^2\xi^3$来说，

$$\hat{\mathbf{g}}^2=\frac{\partial\xi^2}{\partial y_\alpha}\mathbf{i}_\alpha$$

如果

$$\hat{g}^{22}=0$$

即

$$\hat{\mathbf{g}}^2=0$$

则得到

$$\frac{\partial\xi^2}{\partial y_\alpha}=0\qquad(\alpha=1, 2, 3)$$

这就是说变形以后被拖带的坐标系$O\xi^1\xi^2\xi^3$中的ξ^2变成了与y_1、y_2、y_3无关的常数。

由此可知，变形前对嵌在介质内的Lagrange坐标系$O\xi^1\xi^2\xi^3$存在有关系式：

$$\xi^1=y_1,\qquad \xi^2=y_2,\qquad \xi^3=y_3$$

经过变形后，嵌在介质内的Lagrange坐标系$O\xi^1\xi^2\xi^3$必须满足下列的关系式

$$\left.\begin{aligned}&\xi^1=f_1(y_1,y_2,y_3)\\&\xi^2=\text{const}\\&\xi^3=f_3(y_1,y_2,y_3)\end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned}&y_1=p_1(\xi^1,\xi^3)\\&y_2=p_2(\xi^1,\xi^3)\\&y_3=p_3(\xi^1,\xi^3)\end{aligned}\right\}$$

其中f_1、f_3及p_1、p_2、p_3应为连续光滑函数。

变形前后这样的一一映射关系在数学上是不存在的。上式还意味着，变形以后物体上各点的矢径为

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(y_1,y_2,y_3)=\mathbf{r}(\xi^1,\xi^3)$$

这表示物体变成了一个二维曲面。谁都知道，力学中的板壳都是有厚度的。现在经过这样的变形，三维欧氏空间中的物体变成了仅含坐标ξ^1、ξ^3的没有厚度的二维曲面，这是任何一种有限变形都无法实现的变形。所以，

$$\hat{g}^{22}=0$$

是不可能的。因而说明相容性方程

$$\hat{g}^{22}[h'(\xi^3)]^2=0$$

是不能成立的。

其实，在拙作[1]的结尾曾明确指出，如果上式满足，可以推出其它一些谬误，

彭乐生同志为何会推导出$\hat{g}^{22}=0$呢？原来他是从

$$\hat{g}_{\alpha\beta}=\mathring{g}_{\alpha\beta}+2\varepsilon_{\alpha\beta}$$

出发得到了他的（8）式和（9）式，从而导出$\hat{g}^{22}=0$。应该指出，彭乐生同志证明的出发点$\hat{g}_{\alpha\beta}=\mathring{g}_{\alpha\beta}+2\varepsilon_{\alpha\beta}$只有在变形可以实现的前提下才能应用，否则是不能用的。在变形不能实现的情况下，使用这个公式就会得出错误的结果。彭乐生同志使用了这个公式，马上就显示出明显的错误。请见他的（8）式

$$[\hat{g}_{\alpha\beta}]=[\mathring{g}_{\alpha\beta}+2\varepsilon_{\alpha\beta}]=\begin{bmatrix}1 & h & 1\\ h & 1 & h'\xi^1\\ 1 & h'\xi^1 & 1\end{bmatrix}$$

他的这个式子里

$$\hat{g}_{11}=1,\ \hat{g}_{22}=1,\ \hat{g}_{33}=1$$

而

$$\hat{g}_{11}=\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_1,\ \hat{g}_{22}=\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_2\cdot\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_2,\ \hat{g}_{33}=\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_3\cdot\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_3$$

这表明$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_1$、$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_2$、$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_3$均为单位向量。明显的错误就出来了，由

$$\hat{g}_{13}=\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_3=1$$

得到$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_1=\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_3$，从而

$$\hat{g}_{12}=\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_2=\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_3\cdot\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_2=\hat{g}_{32}$$

即

$$h(\xi^3)=h'(\xi^3)\xi^1$$

于是可求得

$$\det\hat{g}_{\alpha\beta}=0$$

这一连串的明显错误，使人显而易见彭乐生同志给出的（8）式是不能成立的。而彭乐生同志正是根据这个不能成立的（8）式导出了$\hat{g}^{22}=0$。

彭乐生同志即使没有想到$\hat{g}^{22}=0$的数学意义和力学意义，但是如果他想到$\hat{g}_{\alpha\beta}=\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_\alpha\cdot\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_\beta$的这些基本概念，他就不会导出$\hat{g}^{22}=0$了，也就不会说“此例满足相容方程”了。

参 考 文 献

[1] 程沅生，关于连续介质有限变形问题的几点讨论，应用数学和力学，2，4(1981) 439—444.

[2] 程沅生，读书报告（作为1963年上海工学院青年助教考试项目），上海工学院青年教师考试档案，(1963).

[3] 《力学学报》编委会给程沅生的信，(63)力编字第246号，(1963).

[4] Седов Л. И., *ПММ*, Том XXIII вып. 2 (1959), 568—571.

Discussion of "Some Discussions on Finite Deformation of Continuous Media"

Peng Le-sheng

(Shanghai Jiao Tong University, Shanghai)

Cheng Yuan-sheng

(Shanghai University of Technology, Shanghai)