应用数学和力学, 第 25 卷 第 3 期(2004 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004) 03_0262_09

非静力旋转流体方程初值问题的适定性*

陈达段, 何幼桦

(上海大学 理学院 数学系, 上海 201800)

(钱伟长推荐)

摘要: 应用分层理论所提供的方法, 通过对非静力旋转流体方程这个数学模型本身的拓扑性质进行系统的理论分析和研究, 来讨论对于这个方程的初值问题的几种不同提法以及相应的适定性问题.

关 键 词: 分层; 适定性; 末方程
中图分类号: O175.29 文献标识码: A

1 引言及问题的提出

Hoskins 和 Bretherton 提出的半地转锋生模式较好地模拟了大气中变形场和斜压气流不稳定引起的锋生问题, 与实际大气中锋面的大尺度观测现象比较一致. 但是在中、小尺度范围内, 人们通过一些新的观测手段, 了解了关于锋的许多更为细致的结构特征, 经过分析, 发现这些特征与中小尺度的非地转运动紧密联系, 而半地转理论不再成立. 因此, 近年来人们把更多的注意力放在地面锋附近由于非地转平衡所产生的重力流及锋生作用. 非静力旋转流体控制方程组就是描述这类现象的一个主要数学模型[1,2].

对非静力旋转流体方程组的研究, 目前还较多地集中于数值模拟的形式. 例如 Simpson 和 Linden 将场变量展开成时间幂级数, 得到关于 t 的级数解. 经过数值模拟, 发现其可信度依赖于时间尺度 T, 但无法说明 t 的有效范围及其原因. 国内也有学者结合使用级数展开和数值积分的方法加以改善, 对锋面附近重力流的产生机制和结构特征作出了较好的描述. 但对于方程组本身所作的系统的理论分析和研究则还比较少见. 本文应用分层理论所提供的方法, 通过对这个模型本身的拓扑性质进行分析、研究, 来讨论对于这个方程的初值问题的几种不同提法以及相应的适定性问题.

非静力 Boussinesq 近似的 x_z 面上两维旋转流体的控制方程组可以写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho_s}\right)+fv+K_M^H\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+K_M^v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-fu+K_M^H\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+K_M^v\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \tag{b}$$

* 收稿日期: 2002_03_01; 修订日期: 2003_07_30
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40017501 4); 上海科委重点资助项目(02DJ14032); 上海市教委科技发展基金资助项目(02AK49)
作者简介: 陈达段(1948—), 男, 浙江天台人, 副教授(联系人. Tel: 86_21_63688332; E_mail: chlee@online.sh.cn).

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho_s}\right)+\frac{g}{\theta_s}\theta+K_M^H\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+K_M^v\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \tag{c}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{d}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}+u\frac{\partial \theta}{\partial x}+w\frac{\partial \theta}{\partial z}=K_M^H\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+K_H^v\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \tag{e}$$

其中 θ_s 是常参考位温, ρ_s 是参考密度, f 是柯氏力, θ 为位温对 θ_s 的偏差, 其余符号为气象上的常规含义•

本文考虑一般的三维空间中的形式, 作为第一步, 先以瑞利摩擦来代替粘性的影响, 以牛顿冷却代替热量的耗散, 并把垂直方向上的流速对位温的影响也考虑进来• 同时引进以下记号:

$$a=-\frac{1}{\rho_s},\quad b=\frac{g}{\theta_s}•$$

在这种情况下, 所讨论的方程具以下形式

$$(\mathrm{D})\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}=a\dfrac{\partial p}{\partial x}+fv-ku,\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}=a\dfrac{\partial p}{\partial y}-fu-kv,\\ \dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}=a\dfrac{\partial p}{\partial z}+b\theta-kw,\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0,\\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t}+u\dfrac{\partial \theta}{\partial x}+v\dfrac{\partial \theta}{\partial y}+w\dfrac{\partial \theta}{\partial z}=-k_1\theta+cw•\end{cases}$$

按照分层理论提供的方法, 对上述方程组的适定姓的讨论将依照以下步骤进行, 其中所使用的符号的定义请参看文献[3, 4]•

2 确定本方程

为了表达和计算的方便起见, 记 $V=R^3\times\mathbf{R}$, $Z=R^5$, 并把自变量组 (x, y, z, t) 改记成 (x_1, x_2, x_3, x_4), 未知函数组 (u, v, w, p, θ) 改记成 $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$, 这样 (D) 可以看成 Ehresmann 空间 $J^1(V, Z)$ 的一个子集• 使用 Ehresmann 空间的局部坐标, (D) 被表为

$$(\mathrm{D})\begin{cases}f_1: p_4^1+u_1\cdot p_1^1+u_2\cdot p_2^1+u_3\cdot p_3^1+a\cdot p_1^4+\varphi_1=0,\\ f_2: p_4^2+u_1\cdot p_1^2+u_2\cdot p_2^2+u_3\cdot p_3^2+a\cdot p_2^4+\varphi_2=0,\\ f_3: p_4^3+u_1\cdot p_1^3+u_2\cdot p_2^3+u_3\cdot p_3^3+a\cdot p_3^4+\varphi_3=0,\\ f_4: p_1^1+p_2^2+p_3^3=0,\\ f_5: p_4^5+u_1\cdot p_1^5+u_2\cdot p_2^5+u_3\cdot p_3^5+\varphi_5=0•\end{cases}$$

其中

$$\begin{cases}\varphi_1=-f\cdot v+k\cdot u,\\ \varphi_2=f\cdot u+k\cdot v,\\ \varphi_3=-b\cdot\theta+k\cdot w,\\ \varphi_4=k_1\cdot\theta+c\cdot w•\end{cases} \tag{1}$$

在(D)中,每个方程的左侧用$f_i(i=1\sim5)$来表示,

$$f_i: J^1(V,Z)\to R\qquad(i=1\sim5)\cdot$$

这样就有

$$(\mathrm{D})=V(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5)\subseteq J^1(V,Z)\cdot$$

根据定义计算,可得到

定理 1 (D)的本方程与它的准本方程重合• 即 $\mathrm{D}_*=\mathrm{D}'_*$ •

$$\mathrm{D}_*=\bigcup_l \mathrm{D}_l,\ \mathrm{D}_l\subseteq J^l(V,Z)\qquad(l=-1,0,1,2,\cdots),$$

其中

$$\mathrm{D}_{-1}=R^4,$$

$$\mathrm{D}_0=J^0(V,Z)=V\times Z=R^4\times R^5,$$

$$\mathrm{D}_1=V(f_j),$$

$$\mathrm{D}_2=V(e_{i_1}(f_j),f_j),$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{D}_k=V(e_{i_1i_2\wedge i_{k-1}}(f_j),\ \cdots,e_{i_1}(f_j),f_j),$$

$$(j=1\sim5,1\leqslant i\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_{k-1}\leqslant4,k\geqslant3)\cdot$$

这里略去了繁琐的计算过程•

3 分 层

在 $W_{3,k-1}(V,Z)\subseteq G_3^*(TJ^{k-1}(V,Z))$ 的开覆盖$\{U_i\}(i=1\sim4)$中,根据方程(D)的形式,只需讨论 U_4 和 U_3 两种情形(U_1 和 U_2 的结果与 U_3 相同)•

(A) 设 $\tau\in U_4$, τ 由$J^{k-1}(V,Z)$ 在点 $p(\tau)$ 的如下三个切向量生成:

$$\begin{cases}\eta_1=(1,0,0,\delta_1,\hat{u}_i(1),\hat{p}_j^{i}{}_\lambda(1)),\\ \eta_2=(0,1,0,\delta_2,\hat{u}_i(2),\hat{p}_j^{i}{}_\lambda(2)),\\ \eta_3=(0,0,1,\delta_3,\hat{u}_i(3),\hat{p}_j^{i}{}_\lambda(3)),\end{cases}\tag{2}$$

其中

$$p(\tau)=(x_j,u_i,p_j^{i}{}_\lambda)\in J^{k-1}(V,Z)\qquad(i=1\sim5,j=1\sim4,|\lambda|\leqslant k-1)\cdot$$

首先,根据 $W_{3,k-1}$ 的定义,$\tau\in U_4$ 的充要条件是

1) $p_j^{i}{}_{\lambda l}=\hat{p}_j^{i}{}_\lambda(l)-\delta_l p_j^{i}{}_{\lambda4}\qquad(i=1\sim5,l=1\sim3,|\lambda|\leqslant k-2)\cdot$

2) 存在 $p_j^{i}{}_\mu\in\mathbf{R}$, $|u|=k$ 使得对任何 $|\lambda|=k-1$, 都有

$$p_j^{i}{}_{\lambda l}=\hat{p}_j^{i}{}_\lambda(l)-\delta_l p_j^{i}{}_{\lambda4}\cdot$$

其次,在分层时,$p(\tau)$ 还必须满足以下条件

$$p(\tau)\in\mathrm{D}_{k-1}\subset J^{k-1}(V,Z)\cdot$$

这样,可以得到分层的结果如下:

$\tau\in U_4\cap S^t_{3,k-1}(\mathrm{D})$ 的充要条件为:

$$\begin{cases}\delta=1-\delta_1u_1-\delta_2u_2-\delta_3u_3\neq0,\\ \delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2\neq0\cdot\end{cases}\tag{3}$$

$\tau\in U_4\cap S^1_{3,k-1}(\mathrm{D})$ 的充要条件为:

$$\begin{cases} \delta = 1 - \delta_1 u_1 - \delta_2 u_2 - \delta_3 u_3 \neq 0, \\ \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 = 0, \\ \delta\varphi_{4,k}^{(4)} - \delta_1 \varphi_{1,k}^{(4)} - \delta_2 \varphi_{2,k}^{(4)} - \delta_3 \varphi_{3,k}^{(4)} = 0 \cdot \end{cases} \tag{4}$$

$\tau \in U_4 \cap S_{3,k-1}^2(\mathrm{D})$ 的充要条件为:

$$\begin{cases} \delta = 1 - \delta_1 u_1 - \delta_2 u_2 - \delta_3 u_3 = 0, \\ \varphi_{5,k}^{(4)} = 0, \\ \delta_1 \varphi_{2,k}^{(4)} = \delta_2 \varphi_{1,k}^{(4)} = \delta_1 \varphi_{3,k}^{(4)} \cdot \end{cases} \tag{5}$$

上面的(3)、(4)、(5)式分别是末方程 $E(S_{3,k-1}^t(\mathrm{D}))$, $E(S_{3,k-1}^1(\mathrm{D}))$ 和 $E(S_{3,k-1}^2(\mathrm{D}))$• 其中 $\varphi_{i,k}^{(4)}$ 的表达式为

$$\varphi_{1,k}^{(4)} = - u_1\hat{p}\,{}_4^{1k}(1) - u_2\hat{p}\,{}_4^{1k}(2) - u_3\hat{p}\,{}_4^{1k}(3) - a\hat{p}\,{}_4^{1k}(1) + f\,\hat{p}\,{}_4^{4k} + k\hat{p}\,{}_4^{1k} - \sum_{i=1}^{k} C_k^i [\hat{p}\,{}_4^{1i}\hat{p}\,{}_{14}^{1k-i} + \hat{p}\,{}_4^{2i}\hat{p}\,{}_{24}^{1k-i} + \hat{p}\,{}_4^{3i}\hat{p}\,{}_{34}^{1k-i}],$$

$$\varphi_{2,k}^{(4)} = - u_1\hat{p}\,{}_4^{2k}(1) - u_2\hat{p}\,{}_4^{2k}(2) - u_3\hat{p}\,{}_4^{2k}(3) - a\hat{p}\,{}_4^{4k}(2) - f\,\hat{p}\,{}_4^{1k} + k\hat{p}\,{}_4^{2k} - \sum_{i=1}^{k} C_k^i [\hat{p}\,{}_4^{1i}\hat{p}\,{}_{14}^{2k-i} + \hat{p}\,{}_4^{2i}\hat{p}\,{}_{24}^{2k-i} + \hat{p}\,{}_4^{3i}\hat{p}\,{}_{34}^{2k-i}],$$

$$\varphi_{3,k}^{(4)} = - u_1\hat{p}\,{}_4^{3k}(1) - u_2\hat{p}\,{}_4^{3k}(2) - u_3\hat{p}\,{}_4^{3k}(3) - a\hat{p}\,{}_4^{4k}(3) + b\hat{p}\,{}_4^{5k} + k\hat{p}\,{}_4^{3k} - \sum_{i=1}^{k} C_k^i [\hat{p}\,{}_4^{1i}\hat{p}\,{}_{14}^{3k-i} + \hat{p}\,{}_4^{2i}\hat{p}\,{}_{24}^{3k-i} + \hat{p}\,{}_4^{3i}\hat{p}\,{}_{34}^{3k-i}],$$

$$\varphi_{4,k}^{(4)} = \hat{p}\,{}_4^{1k}(1) + \hat{p}\,{}_4^{2k}(21) + \hat{p}\,{}_4^{3k}(3),$$

$$\varphi_{5,k}^{(4)} = - u_1\hat{p}\,{}_4^{5k}(1) - u_2\hat{p}\,{}_4^{5k}(2) - u_3\hat{p}\,{}_4^{5k}(3) + k_1\hat{p}\,{}_4^{5k} + c\hat{p}\,{}_4^{3k} - \sum_{i=1}^{k} C_k^i [\hat{p}\,{}_4^{1i}\hat{p}\,{}_{14}^{5k-i} + \hat{p}\,{}_4^{2i}\hat{p}\,{}_{24}^{5k-i} + \hat{p}\,{}_4^{3i}\hat{p}\,{}_{34}^{5k-i}] \cdot$$

(B) 若 $\tau \in U_3$, τ 由 $J^{k-1}(V, Z)$ 在点 $p(\tau)$ 的如下三个切向量生成:

$$\begin{cases} \zeta_1 = (1, 0, \alpha_1, 0, \hat{u}_i(1), \hat{p}_j^{i\lambda}(1)), \\ \zeta_2 = (0, 1, \alpha_2, 0, \hat{u}_i(2), \hat{p}_j^{i\lambda}(2)), \\ \zeta_3 = (0, 0, \alpha_3, 1, \hat{u}_i(3), \hat{p}_j^{i\lambda}(3)), \end{cases}$$

其中

$$p(\tau) = (x_j, u_i, p_j^{i\lambda}) \in J^{k-1}(V, Z) \qquad (i = 1 \sim 5, j = 1 \sim 4, |\lambda| \leqslant k - 1) \cdot$$

同样, 根据 $W_{3,k-1}(V, Z)$ 的定义, $\tau \in U_3$ 的充要条件是

1) $p_j^{i\lambda}{}_l = \hat{p}_j^{i\lambda}(l) - \alpha_l p_j^{i\lambda}{}_3 \qquad (i = 1 \sim 5, l = 1, 2, 4, |\lambda| \leqslant k - 2)$,

2) 存在 $p_j^{i\mu} \in \mathbf{R}$, $|\mu| = k$, 使得对任何 $|\lambda| = k - 1$, 都有

$$p_j^{i\lambda}{}_l = \hat{p}_j^{i\lambda}(l) - \alpha_l p_j^{i\lambda}{}_3 \cdot$$

其次, 在分层时, $p(\tau)$ 还必须满足以下条件

$$p(\tau) \in \mathrm{D}_{k-1} \subset J^{k-1}(V, Z) \cdot$$

这样, 可以得到分层的结果如下:

$\tau \in U_3 \cap S_{3,k-1}^t(\mathrm{D})$ 的充要条件为:

$$\alpha = u_3 - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2 - \alpha_4 \neq 0 \cdot \tag{6}$$

$\tau \in U_3 \cap S^3_{3,k-1}(\mathrm{D})$ 的充要条件为:

$$\begin{cases} \alpha = u_3 - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2 + u_3 = 0, \\ \varphi^{(3)}_{5,k} = 0, \\ \alpha_1 \varphi^{(3)}_{2,k} - \alpha_2 \varphi^{(3)}_{1,k} = 0, \\ \varphi^{(3)}_{1,k} + \alpha_1 \varphi^{(3)}_{3,k} = 0 \bullet \end{cases} \tag{7}$$

(6) 和(7) 式分别是末方程 $E(S^t_{3,k-1}(\mathrm{D}))$ 和 $E(S^3_{3,k-1}(\mathrm{D}))$• 其中 $\varphi^{(3)}_{i,k}$ 的表达式为

$$\varphi^{(3)}_{1,k} = - u_1\hat{p}^{\,1}_{3^k}(1) - u_2\hat{p}^{\,1}_{3^k}(2) - \hat{p}^{\,1}_{3^k}(4) - a\hat{p}^{\,1}_{3^k}(1) + f\hat{p}^{\,2}_{3^k} + k\hat{p}^{\,1}_{3^k} - \sum_{i=1}^{k} C^i_k[\hat{p}^{\,1}_{3^i}\hat{p}^{\,1}_{13^{k-i}} + \hat{p}^{\,2}_{3^i}\hat{p}^{\,1}_{23^{k-i}} + \hat{p}^{\,3}_{3^i}\hat{p}^{\,1}_{3^{k-i+1}}],$$

$$\varphi^{(3)}_{2,k} = - u_1\hat{p}^{\,2}_{3^k}(1) - u_2\hat{p}^{\,2}_{3^k}(2) - u_3\hat{p}^{\,2}_{3^k}(4) - a\hat{p}^{\,4}_{3^k}(2) - f\hat{p}^{\,1}_{3^k} + k\hat{p}^{\,2}_{3^k} - \sum_{i=1}^{k} C^i_k[\hat{p}^{\,1}_{3^i}\hat{p}^{\,2}_{13^{k-i}} + \hat{p}^{\,2}_{3^i}\hat{p}^{\,2}_{23^{k-i}} + \hat{p}^{\,3}_{3^i}\hat{p}^{\,2}_{3^{k-i+1}}],$$

$$\varphi^{(3)}_{3,k} = - u_1\hat{p}^{\,3}_{3^k}(1) - u_2\hat{p}^{\,3}_{3^k}(2) - \hat{p}^{\,3}_{3^k}(4) - b\hat{p}^{\,5}_{3^k} + k\hat{p}^{\,3}_{3^k} - \sum_{i=1}^{k} C^i_k[\hat{p}^{\,1}_{3^i}\hat{p}^{\,3}_{13^{k-i}} + \hat{p}^{\,2}_{3^i}\hat{p}^{\,3}_{23^{k-i}} + \hat{p}^{\,3}_{3^i}\hat{p}^{\,3}_{3^{k-i+1}}],$$

$$\varphi^{(3)}_{4,k} = \hat{p}^{\,1}_{3^k}(1) + \hat{p}^{\,2}_{3^k}(2),$$

$$\varphi^{(3)}_{5,k} = - u_1\hat{p}^{\,5}_{3^k}(1) - u_2\hat{p}^{\,5}_{3^k}(2) - \hat{p}^{\,5}_{3^k}(4) + k_1\hat{p}^{\,5}_{3^k} + c\hat{p}^{\,3}_{3^k} - \sum_{i=1}^{k} C^i_k[\hat{p}^{\,1}_{3^i}\hat{p}^{\,5}_{13^{k-i}} + \hat{p}^{\,2}_{3^i}\hat{p}^{\,5}_{23^{k-i}} + \hat{p}^{\,3}_{3^i}\hat{p}^{\,5}_{3^{k-i+1}}] \bullet$$

4 方程的初值问题的适定性

考虑以下两种情况

1) 初始条件 $(\sigma_g, \gamma_g) \in I_\omega(\Delta_3, \mathrm{D})$ 如下定义:

$$\begin{cases} \sigma_g: \Delta_3 \to R^4 \\ \sigma_g(\xi) = (x_j(\xi)) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, g(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) \\ \gamma_g: \Delta_3 \to J^0(R^4, R^5) \\ \gamma_g(\xi) = (x_j(\xi), u_i(\xi)) \end{cases} (i = 1 \sim 5, j = 1 \sim 4),$$

其中 $g: R^3 \to R$, $g \in C^\omega$, 满足 $g(0,0,0) = 0$, $\xi = \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \Delta_3$ 为重心坐标•

2) 初始条件 $(\sigma_h, \gamma_h) \in I_\omega(\Delta_3, \mathrm{D})$ 如下定义:

$$\begin{cases} \sigma_h: \Delta_3 \to R^4 \\ \sigma_h(\zeta) = (x_j(\zeta)) = (\zeta_1, \zeta_2, h(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_4), \zeta_4) \\ \gamma_h: \Delta_3 \to J^0(V, Z) \\ \gamma_h(\zeta) = (x_j(\zeta), u_i(\zeta)) \end{cases} (j = 1 \sim 4, i = 1 \sim 5),$$

其中 $h: R^3 \to \mathbf{R}$, $h \in C^\omega$, 满足 $h(0,0,0) = 0$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_4) \in \Delta_3$ 为重心坐标•

初始条件 (σ_g, γ_g) 相当于在超曲面 $t = g(x_1, x_2, x_3) \subset R^4$ 上讨论初值问题, 而(σ_h, γ_h) 则对应于在超曲面 $x_3 = h(x_1, x_2, t) \subset R^4$ 上讨论初值问题• 于是根据第 3 节的讨论我们有如下结论:

1) 对于初始条件 (σ_g, γ_g), 为使 Im. $\gamma_g \subseteq S^t_{3,k-1}(\mathrm{D})$, 其充要条件是

$$\delta = 1 - \delta_1 u_1 - \delta_2 u_2 - \delta_3 u_3 \neq 0, \quad \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 \neq 0, \tag{8}$$

这里

$$\delta_j = \frac{\partial g}{\partial \xi_j} \qquad (j = 1 \sim 3)$$

这也就是方程组(D)在超曲面 $t = g(x_1, x_2, x_3)$ 上的初值问题适定的充要条件•

2) 对于初始条件 (σ_h, γ_h), 为使 $\mathrm{Im}.\ \gamma_h \subseteq S^t_{3, k-1}(\mathrm{D})$, 其充要条件是

$$\alpha = u_3 - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2 - \alpha_4 \neq 0, \tag{9}$$

这里

$$\alpha_j = \frac{\partial h}{\partial \xi_j} \qquad (j = 1, 2, 4)•$$

这也就是方程组(D)在超曲面 $x_3 = h(x_1, x_2, t)$ 上的初值问题适定的充要条件•

综合以上的计算和分析, 我们得到如下两个定理,

定理 2 在 $(\Sigma) \subseteq R^4, (\Sigma): t = g(x_1, x_2, x_3)$ 上的初值问题

$$\begin{cases} (\mathrm{D}), \\ u_i|_{\Sigma} = u_i^0 \qquad (i = 1 \sim 5) \end{cases}$$

是适定的充要条件为

$$\delta = 1 - \delta_1 u_1^0 - \delta_2 u_2^0 - \delta_3 u_3^0 \neq 0,$$

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 \neq 0, \quad \delta_j = \frac{\partial g}{\partial \xi_j} \qquad (j = 1 \sim 3)•$$

推论 在超曲面 $\{t = 0\} \subseteq R^4$ 上, 方程组(D)的任何初值问题均不存在 C^1 稳定解•

定理 3 在 $(\Sigma) \subseteq R^4, (\Sigma): x_3 = g(x_1, x_2, t)$ 上的初值问题

$$\begin{cases} (\mathrm{D}), \\ u_i|_{\Sigma} = u_i^0 \qquad (i = 1 \sim 5) \end{cases}$$

是适定的充要条件为

$$\alpha = u_3 - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2 - \alpha_4 \neq 0,$$

$$\alpha_j = \frac{\partial h}{\partial \xi_j} \qquad (j = 1, 2, 4)•$$

在适定的情况下, 根据横截层的末方程, 即可确定方程组(D)的初值问题的(以收敛级数形式给出的)唯一稳定解• 而在不适定的情况下, 所有的解都是形式解[3, 5]•

5 实 例

1) 如果初始条件给在超曲面 $t = 0$ 上, 显然 $\tau \notin S^t_{2,0}(\mathrm{D})$, 定解问题将是不适定的• 例如对于以下初值问题

$$\begin{cases} (\mathrm{D}), \\ u|_{t=0} = u_0, \ v|_{t=0} = 0, \ w|_{t=0} = 0, \ p|_{t=0} = p_0, \ \theta|_{t=0} = \theta_0, \end{cases}$$

这里 u_0, p_0, θ_0 为实常数•

由于

$$\sigma(\xi) = (0 + \xi_1, 0 + \xi_2, 0 + \xi_3, 0 + 0),$$

$$\delta_j = \frac{\partial g}{\partial \xi_j} = 0 \qquad (j = 1 \sim 3),$$

$$\varphi^{(4)}_{4,k} = 0•$$

所以

$$\tau \in S^1_{3,k-1}(D) \cap U_4$$

定解问题存在着无穷组解• 事实上我们可以求得

$$\begin{cases} u = u_0 \exp[-kt]\sin ft, \\ v = u_0 \exp[-kt]\cos ft, \\ w = b\theta_0 t + \dfrac{b\theta_0(k+k_1)t^2}{2} + \dfrac{b\theta_0(bc+k^2+kk_1+k_1^2)t^3}{6} + \cdots, \\ \theta = \theta_0 + k_1\theta_0 t + \dfrac{k_1\theta_0(k+k_1)t^2}{2} + \dfrac{k_1\theta_0(bc+k^2+kk_1+k_1^2)t^3}{6} + \cdots, \\ p = p(t) \qquad (p(t) \text{ 为满足 } p(0) = p_0 \text{ 的任意可微函数})• \end{cases}$$

而在 $bc = kk_1$ 的情况下, 解的形式为

$$\begin{cases} u = u_0 \exp[-kt]\sin ft, \\ v = u_0 \exp[-kt]\cos ft, \\ w = \dfrac{b\theta_0}{k+k_1}(1-\exp[-(k+k_1)t]), \\ \theta = \theta_0 + \dfrac{k_1\theta_0}{k+k_1}(\exp[-(k+k_1)t]-1), \end{cases}$$

而 $p(t)$ 可以是满足 $p(0) = p_0$ 的任何 t 的可微函数 $p(t)$•

2) 如果初始条件满足 $S^t_{3,k-1}(D)$ 的末方程, 譬如说初始条件给在超曲面 $\{t = x\}$ 上, 而且 $u|_{t=x} = u(x) \neq 1$, 则定解问题存在唯一解• 如对于以下定解问题

$$\begin{cases} (D), \\ u|_{t=x} = u_0, \quad v|_{t=x} = 0, \quad w|_{t=x} = 0, \quad p|_{t=x} = p_0, \quad \theta|_{t=x} = \theta_0, \end{cases}$$

$(u_0, p_0, \theta_0$ 为实常数•) 这时问题是适定的, 可以求得其唯一稳定解为

$$\begin{cases} u = u_0, \\ v = \dfrac{u_0 f t}{u_0-1} - \dfrac{u_0 f k t^2}{2(u_0-1)^2} + \dfrac{u_0 f k^2 t^3}{6(u_0-1)^3} - \dfrac{u_0 f k^3 t^4}{24(u_0-1)^4} - \\ \qquad \dfrac{u_0 f x}{u_0-1} + \dfrac{u_0 f k t x}{(u_0-1)^2} - \dfrac{u_0 f k^2 t^2 x}{2(u_0-1)^3} + \cdots, \\ w = -\dfrac{\theta_0 b t}{u_0-1} + \dfrac{\theta_0 b(k+k_1)t^2}{2(u_0-1)^2} - \dfrac{\theta_0 b(bc+k^2+kk_1+k_1^2)t^3}{6(u_0-1)^3} + \cdots, \\ p = p_0 - \dfrac{u_0 k t}{c} - \dfrac{u_0 f^2 t^2}{2c(u_0-1)} + \dfrac{u_0 f^2 k t^3}{6c(u_0-1)^2} - \\ \qquad \dfrac{u_0 f^2 k^2 t^4}{24c(u_0-1)^3} + \dfrac{u_0 k x}{c} + \dfrac{u_0 f^2 t x}{c(u_0-1)} + \cdots, \\ \theta = \theta_0 - \dfrac{\theta_0 k_1 t}{u_0-1} + \dfrac{\theta_0(bc+k_1^2)t^2}{2(u_0-1)^2} - \dfrac{\theta_0 b(kbc+2bck_1+k_1^3)t^3}{6(u_0-1)^3} + \dfrac{\theta_0 k_1 x}{u_0-1} + \cdots• \end{cases}$$

同样, 在 $bc = kk_1$ 的情况下, 解的形式为

$$\begin{cases} u = u_0, \\ v = \dfrac{fu_0}{k}\left[\exp\left(\dfrac{-k(x-t)}{u_0-1}-1\right)\right], \\ w = \dfrac{b\theta_0}{k+k_1}\left[1-\exp\left(\dfrac{-(k+k_1)(x-t)}{u_0-1}\right)\right], \\ p = p_0+\dfrac{(k^2+f^2)u_0}{ka}(x-t)-\dfrac{f^2u_0(u_0-1)}{k^2a}\left[1-\exp\left(\dfrac{-k(x-t)}{u_0-1}\right)\right], \\ \theta = \dfrac{\theta_0}{k+k_1}\left\{\left[k+k_1\exp\left(\dfrac{-(k+k_1)}{u_0-1}(x-t)\right)\right]\right\}. \end{cases}$$

3) 如果初始条件给在超曲面 $\{t = x\}$ 上, 但是 $u|_{t=x} = u(x) = 1$, 那么按照 $S^2_{3,k-1}(D)$ 的末方程条件, 在 $\varphi^{(4)}_{5,k} = 0$, 且 $\varphi^{(4)}_{2,k} = \varphi^{(4)}_{3,k} = 0$ 时, 方程有无穷组解, 其它情况下无解. 例如以下初值问题

$$\begin{cases} (\mathrm{D}), \\ u|_{t=x} = 1,\ v|_{t=x} = -\dfrac{f}{k},\ w|_{t=x} = b,\ p|_{t=x} = p_0,\ \theta|_{t=x} = k. \end{cases}$$

可以验证 $\tau \in S^2_{3,k-1}(\mathrm{D}) \cap U_4$, 这时问题有无穷组解, 事实上容易写出它的某两组解为

$$\begin{cases} u^{(1)} = 1, \\ v^{(1)} = -\dfrac{f}{k}, \\ w^{(1)} = b[1+x-t-\sin(t-x)], \\ p^{(1)} = p_0-\dfrac{k^2+f^2}{ak}(x-t), \\ \theta^{(1)} = k[1+x-t-\sin(t-x)] \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} u^{(2)} = 1, \\ v^{(2)} = -\dfrac{f}{k}, \\ w^{(2)} = b\cdot\exp(t-x), \\ p^{(2)} = p_0-\dfrac{k^2+f^2}{ak}(x-t), \\ \theta^{(2)} = k\cdot\exp(t-x). \end{cases}$$

6 结 束 语

Boussinesq 方程是层结流体控制方程组的一种合理简化模式, 它可以近似地模拟中小尺度浅层的大气运动. 是大气运动学中的一个应用广泛的模式. 对 Boussinesq 方程的研究至今还以数值模拟为多. 在定性研究方面, 则还有很多工作要做[6]. 郭柏灵、袁光伟曾用谱方法、奇异积分算子方法讨论它的初边值问题, 得到了 $L^{p,q}$ 弱解的存在唯一性[7]. 这里我们应用分层理论提供的方法, 讨论了它的 $C^k(k \geqslant 2)$ 解的存在唯一性.

对于是否考虑粘性力(垂直方向上、水平方向上)的影响, 是否考虑动量、水汽、热量(在垂直方向上)的扩散, Boussinesq 方程又有多种变化形式. 本文研究的模式是其中较为简单的一种, 即以瑞利摩擦代替粘性力作用, 以牛顿冷却代替热量的耗散所得到的一种简化形式. 其他几种常用的 Boussinesq 方程的性质有待继续讨论.

[参 考 文 献]

[1] 曾庆存. 数值天气预报的数学物理基础[M]. 北京, 科学出版社, 1979.

[2] Landau L, Lifchitz E. Mecanique des Fluides [M]. Moscou: Mir, 1971.

[3] SHIH Wei_hui. Solutions Analytiques de Quelques Equations aux Derivees Partielles en Mecanique des Fluides [M]. Paris: Hermann, 1992.

[4] 陈达段, 刘晓明, 施惟慧. 关于强迫耗散非线性系统的稳定性[J]. 应用数学和力学, 1996, **17**(6): 515—522.

[5] 施惟慧, 陈达段, 唐一鸣. 关于某些非线性偏微分方程的准确解[J]. 应用数学和力学, 1997, **18**(3): 239—245.

[6] 何幼桦, 施惟慧. 带未知函数多项式附加项的 Navier_Stokes 方程 C^k 不稳定性[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(12): 1301—1309.

[7] 郭柏灵, 袁光伟. 具有 L^p 数据的 Boussinesq 方程的初边值问题[J]. 数学年刊, A 辑, 1996, **17**(5): 595—606.

On the Well_Posedness of the Initial Value Problem of Non_Static Rotating Fluid

CHEN Da_duan, HE You_hua

(Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 201800, P.R.China)

Abstract: A systematic study was made on the to ological nature of the system of non_static rotating fluid. Several initial (boundary) value roblems and their well_ osedness were discussed.

Key words: stratification; well_ osedness; secondaire