

文章编号: 1000-0887(2004) 10-1067-09

# 自然弯扭梁广义翘曲坐标的求解\*

虞爱民<sup>1</sup>, 易明<sup>2</sup>

(1. 同济大学 教育部固体力学重点实验室, 上海 200092;  
2. 同济大学 汽车学院, 上海 200092)

(我刊原编委吴家龙推荐)

**摘要:** 提出了自然弯扭梁受复杂载荷作用时静力分析的一种理论方法, 重点在于对控制方程的求解, 其中考虑了与扭转有关的翘曲变形和横向剪切变形的影响。在特殊的情况下, 可以比较容易地得到这些方程的解答, 包括各种内力、应力、应变和位移的计算。算例给出了平面曲梁受水平和垂直分布载荷作用时广义翘曲坐标的求解方法。计算结果表明, 求得的应力和位移的理论值和三维有限元结果非常接近。此外, 该理论不限于具有双对称横截面的自然弯扭梁, 同样可推广至具有一般横截面形状的情况。

**关键词:** 自然弯扭梁; 圣维南扭转翘曲函数; 广义翘曲坐标; 最小势能原理; 变分方程

中图分类号: TB125 文献标识码: A

## 引言

实心截面直梁和曲梁的静力或动力学问题, 无论是线性的抑或是非线性的, 在许多情况下, 均已得到完好的解答<sup>[1-6]</sup>。然而对于自然弯扭梁, 即使是小位移理论的问题, 至今也未能得到令人满意的结果。文献[7]提出了该梁受复杂载荷作用时静力分析的一种近似理论, 并得到了一组控制方程。这些方程中的未知量用关于曲线坐标  $s$  的 7 个位移函数来表示, 包括 3 个移动( $u_s, u_\xi, u_\eta$ ), 3 个转动( $\varphi_s, \varphi_\xi, \varphi_\eta$ ) 以及广义翘曲坐标  $\alpha$ 。由于在各种边界条件下求解此类方程的复杂性, 因此至今尚未见到它们涉及扭转翘曲和横向剪切变形的理论解答。近代工程结构, 特别是与曲梁相关的桥梁结构, 急需对这一问题作深入的研究。本文的目的在于提出研究自然弯扭梁理论的一种解析方法。通过对该梁控制方程的求解, 可以得到问题的全部解答。

设自然弯扭梁横截面形心的轨迹是一根连续的空间曲线, 曲线  $l$  的切线、法线和次法线单位矢量分别用  $t, n, b$  表示, 对光滑的曲线, 如下的 Frenet-Serret 公式成立, 即

$$\dot{t} = k_1 n, \quad \dot{n} = -k_1 t + k_2 b, \quad \dot{b} = -k_2 n, \quad (1)$$

式中  $(\dot{\quad})' = dt/ds$ ,  $s, k_1$  和  $k_2$  分别为曲线的弧坐标、曲率和扭率。

过横截面的形心  $O_1$  取  $\xi, \eta$  方向与截面的主轴重合, 如图 1 所示,  $\xi$  轴与曲线法线  $n$  间的夹

\* 收稿日期: 2002\_12\_10; 修订日期: 2004\_06\_11

作者简介: 虞爱民(1948—), 男, 江苏人, 教授(联系人, Tel: + 86\_21\_62276787; E-mail: aimin.yu@163.com)。

角记为  $\theta$ , 通常  $\theta$  是  $s$  的函数. 如果用  $i_\xi$  和  $i_\eta$  表示  $O_1\xi$  和  $O_1\eta$  的单位矢量, 则有

$$\begin{cases} i_\xi = n \cos \theta + b \sin \theta, \\ i_\eta = -n \sin \theta + b \cos \theta. \end{cases}$$

由(1)式可以得到

$$\begin{cases} t' = k_\eta i_\xi - k_\xi i_\eta, \\ i_\xi' = -k_\eta t + k_s i_\eta, \\ i_\eta' = k_\xi t - k_s i_\xi, \end{cases}$$

式中  $k_\xi = k_1 \sin \theta$ ,  $k_\eta = k_1 \cos \theta$ ,  $k_s = k_2 + \theta'$ .

本构方程可以表示为

$$\sigma_s = E e_{ss}, \quad \tau_{s\xi} = 2G e_{s\xi}, \quad \tau_{s\eta} = 2G e_{s\eta}, \quad (4)$$

式中  $E, G$  为材料的弹性模量和切变模量.

## 1 内力、平衡方程和几何方程

把横截面上的应力矢量向形心  $O_1$  简化, 得到主矢  $Q$  和主矩  $M$ , 分别用  $Q_s, Q_\xi, Q_\eta$  和  $M_s, M_\xi, M_\eta$  表示其分量, 则

$$Q = Q_s t + Q_\xi i_\xi + Q_\eta i_\eta, \quad M = M_s t + M_\xi i_\xi + M_\eta i_\eta,$$

其中  $Q_s$  为轴力,  $Q_\xi$  和  $Q_\eta$  为剪力,  $M_s$  为扭矩,  $M_\xi$  和  $M_\eta$  为弯矩, 如图2所示. 以  $p$  和  $m$  表示轴线单位长度的外力和外力矩, 则有

$$p = p_s t + p_\xi i_\xi + p_\eta i_\eta, \quad m = m_s t + m_\xi i_\xi + m_\eta i_\eta$$

平衡方程为

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \langle Q \rangle - [K] \cdot \langle Q \rangle + \langle p \rangle = \langle 0 \rangle, \\ \frac{d}{ds} \langle M \rangle - [K] \cdot \langle M \rangle - \langle H \rangle \cdot \langle Q \rangle + \langle m \rangle = \langle 0 \rangle, \end{cases}$$

式中

$$\langle Q \rangle = [Q_s \quad Q_\xi \quad Q_\eta]^T,$$

$$\langle M \rangle = [M_s \quad M_\xi \quad M_\eta]^T,$$

$$\langle p \rangle = [p_s \quad p_\xi \quad p_\eta]^T, \quad \langle m \rangle = [m_s \quad m_\xi \quad m_\eta]^T,$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 0 & k_\eta & -k_\xi \\ -k_\eta & 0 & k_s \\ k_\xi & -k_s & 0 \end{bmatrix}, \quad [H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

其通解为<sup>[8,9]</sup>

$$\begin{cases} \langle Q \rangle = [A] \cdot \left\{ \langle Q_0 \rangle - \int_0^s [A]^T \cdot \langle p \rangle ds \right\}, \\ \langle M \rangle = [A] \cdot \left\{ \langle M_0 \rangle + \int_0^s [A]^T \cdot \left[ [H] \cdot [A] \cdot \left\{ \langle Q_0 \rangle + \langle Q^* \rangle \right\} - \langle m \rangle \right] ds \right\}, \end{cases} \quad (6)$$

式中  $\langle Q_0 \rangle$  和  $\langle M_0 \rangle$  为积分常数,  $\langle Q^* \rangle = - \int_0^s [A]^T \langle p \rangle ds$ . 如果空间固定的直角坐标系的基

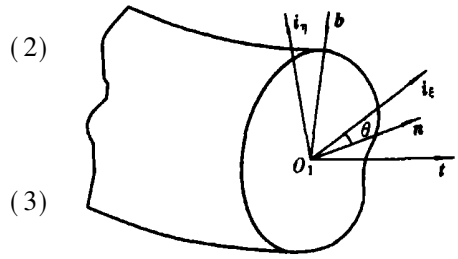


图1 梁的几何关系

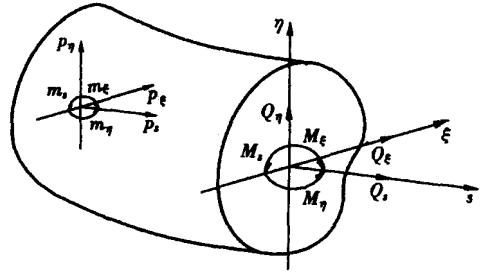


图2 作用在典型梁单元上的应力合力

本单位矢量用  $i_x$ 、 $i_y$ 、 $i_z$  表示, 则有

$$[A] = \begin{bmatrix} t \cdot i_x & t \cdot i_y & t \cdot i_z \\ i_\xi \cdot i_x & i_\xi \cdot i_y & i_\xi \cdot i_z \\ i_\eta \cdot i_x & i_\eta \cdot i_y & i_\eta \cdot i_z \end{bmatrix}. \quad (7)$$

几何方程为<sup>[8,9]</sup>

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \langle \varphi \rangle - [K] \cdot \langle \varphi \rangle - \langle \omega \rangle = \langle \mathbf{0} \rangle, \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbf{u} \rangle - [K] \cdot \langle \mathbf{u} \rangle - \langle H \rangle \cdot \langle \varphi \rangle - \langle \varepsilon \rangle = \langle \mathbf{0} \rangle, \end{cases} \quad (8)$$

式中

$$\begin{cases} \langle \varphi \rangle = [\varphi_s \quad \varphi_\xi \quad \varphi_\eta]^T, & \langle \mathbf{u} \rangle = [u_s \quad u_\xi \quad u_\eta]^T, \\ \langle \omega \rangle = [\omega_s \quad \omega_\xi \quad \omega_\eta]^T, & \langle \varepsilon \rangle = [\varepsilon_s \quad \varepsilon_\xi \quad \varepsilon_\eta]^T. \end{cases}$$

因此, 几何方程有通解

$$\begin{cases} \langle \varphi \rangle = [A] \cdot \left\{ \langle \varphi_0 \rangle + \langle \varphi^* \rangle \right\}, \\ \langle \mathbf{u} \rangle = [A] \cdot \left\{ \langle \mathbf{U}_0 \rangle + \int_0^s [A]^T \cdot \left( \langle \varepsilon \rangle + [H] \cdot [A] \left\{ \langle \varphi_0 \rangle + \langle \varphi^* \rangle \right\} \right) ds \right\}, \end{cases} \quad (9)$$

式中  $\langle \varphi_0 \rangle$  和  $\langle \mathbf{U}_0 \rangle$  为积分常数,  $\langle \varphi^* \rangle = \int_0^s [A]^T \cdot \langle \omega \rangle ds$ .

## 2 圣维南扭转翘曲函数和等效本构方程

设梁的变形是由伸长、弯曲和扭转共同引起的, 于是位移场可表示为

$$\mathbf{u} = Wt + Ui_\xi + Vi_\eta, \quad (10)$$

式中

$$\begin{aligned} W &= u_s(s) + \eta\varphi_\xi(s) - \xi\varphi_\eta(s) + \alpha(s)\varphi(\xi, \eta), \\ U &= u_\xi(s) - \eta\varphi_s(s), \quad V = u_\eta(s) + \xi\varphi_s(s), \end{aligned}$$

其中  $\varphi(\xi, \eta)$  是和所研究截面相同的柱体扭转的圣维南翘曲函数<sup>[10]</sup>. (10) 式考虑了扭转翘曲变形和横向剪切变形的影响. 横截面上的应变  $e_{ss}$ ,  $e_{s\xi}$  和  $e_{s\eta}$  的分布规律为

$$\begin{cases} \sqrt{g}e_{ss} = \varepsilon_s + \eta\omega_\xi - \xi\omega_\eta + \sqrt{g}\varphi' + k_s \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) \eta - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \xi \right] \alpha, \\ 2\sqrt{g}e_{s\xi} = \varepsilon_\xi - \eta\omega_s + \left[ \sqrt{g} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + k_\eta \varphi \right] \alpha, \\ 2\sqrt{g}e_{s\eta} = \varepsilon_\eta + \xi\omega_s + \left[ \sqrt{g} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) - k_\xi \varphi \right] \alpha, \\ e_{\xi\xi} = e_{\eta\eta} = e_{\xi\eta} = 0, \end{cases} \quad (11)$$

式中,  $\varepsilon_s$ 、 $\varepsilon_\xi$ 、 $\varepsilon_\eta$ 、 $\omega_s$ 、 $\omega_\xi$ 、 $\omega_\eta$  和 (8) 式是相同的,  $\alpha$  是广义翘曲坐标. 设梁的初始曲率足够小以致<sup>[7]</sup>

$$\sqrt{g} \approx 1.$$

引入应力合力和合力矩为

$$\begin{cases} Q_s = \iint \alpha_s d\xi d\eta, & M_s = \iint (\tau_{s\xi} \xi - \tau_{s\eta} \eta) d\xi d\eta, \\ Q_\xi = \iint \tau_{s\xi} d\xi d\eta, & M_\xi = \iint \alpha_s \eta d\xi d\eta, \\ Q_\eta = \iint \tau_{s\eta} d\xi d\eta, & M_\eta = - \iint \alpha_s \xi d\xi d\eta. \end{cases} \quad (12)$$

把(11)式代入(4)式,然后把所得结果再代入(12)式,可以得到用广义应变和翘曲坐标表示的等效本构方程为

$$\begin{cases} Q_s = Q_s(\varepsilon_s, \varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta, \omega_s, \omega_\xi, \omega_\eta, \alpha, \alpha'), \\ Q_\xi = Q_\xi(\varepsilon_s, \varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta, \omega_s, \omega_\xi, \omega_\eta, \alpha, \alpha'), \\ Q_\eta = Q_\eta(\varepsilon_s, \varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta, \omega_s, \omega_\xi, \omega_\eta, \alpha, \alpha'), \\ M_s = M_s(\varepsilon_s, \varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta, \omega_s, \omega_\xi, \omega_\eta, \alpha, \alpha'), \\ M_\xi = M_\xi(\varepsilon_s, \varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta, \omega_s, \omega_\xi, \omega_\eta, \alpha, \alpha'), \\ M_\eta = M_\eta(\varepsilon_s, \varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta, \omega_s, \omega_\xi, \omega_\eta, \alpha, \alpha'). \end{cases} \quad (13)$$

全杆的最小势能原理可表示为

$$\delta U - \delta \int_0^l \left( \{p\}^T \cdot \{u\} + \{m\}^T \cdot \{\varphi\} \right) ds = 0 \quad (14)$$

可导出用广义位移表示的平衡方程(5)和用圣维南扭转翘曲函数表示的方程

$$\begin{aligned} & \left( \iint \varphi \alpha_s d\xi d\eta \right)' - k_s \iint \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) \eta - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \xi \right] \alpha_s d\xi d\eta - \\ & \iint \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + k_\eta \varphi \right] \tau_{s\xi} + \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) - k_\xi \varphi \right] \tau_{s\eta} \right] d\xi d\eta = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

此外,还可导出边界条件

### 3 问题的简化和广义翘曲坐标的求解

自然弯扭梁静力问题的方程包含有变分方程(14)、几何方程(8)、等效本构方程(13)和(15),如果该梁具有双对称的横截面,则翘曲函数有下列性质

$$\varphi(\xi, \eta) = -\varphi(-\xi, \eta) = -\varphi(\xi, -\eta) \quad (16)$$

从而(13)式可以简化为

$$\begin{cases} Q_s = EA_0 \varepsilon_s + Ek_s D \alpha, & Q_\xi = GA_0 G_\xi \varepsilon_\xi, & Q_\eta = GA_0 G_\eta \varepsilon_\eta, \\ M_s = GJ \alpha + GI_p (\omega_s - \alpha), & M_\xi = EI_\xi \omega_\xi, & M_\eta = EI_\eta \omega_\eta, \end{cases} \quad (17)$$

式中 $A_0$ 为横截面面积, $I_\xi$ 和 $I_\eta$ 表示横截面对 $\xi$ 和 $\eta$ 轴的惯性矩,且 $I_p = I_\xi + I_\eta$ 。式中 $G_\xi$ 和 $G_\eta$ 反映了杆件横截面上切应变分布的非均匀性<sup>[11]</sup>。其中 $J$ 是横截面的圣维南扭转刚度,定义为

$$J = \iint \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \xi - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) \eta + \xi^2 + \eta^2 \right] d\xi d\eta$$

这里取 $D = I_p - J$ 。把(11)式代入(4)式,然后把所得结果再代入(15)式,并利用(16)式,可以得到

$$\begin{aligned} & E \Gamma \alpha'' + GD(\omega_s - \alpha) - EDk_s \varepsilon_s - \\ & \left\{ G(k_\eta)^2 \Gamma + E(k_s)^2 \iint \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) \eta - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \xi \right]^2 d\xi d\eta \right\} \alpha = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

把(17)式的第1式和第4式代入(18)式,可得到关于 $\alpha$ 的微分方程

$$\alpha'' - \left\{ \frac{DGI_p}{\Gamma EI_p} - \frac{D^2(k_s)^2}{\Gamma A_0} + \frac{G(k_1)^2}{E} + \frac{(k_s)^2}{\Gamma} \iint \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)_{\eta} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)_{\xi} \right]^2 d\xi d\eta \right\} \alpha + \frac{D}{\Gamma EI_p} M_s(s) - \frac{Dk_s}{\Gamma EA_0} Q_s(s) = 0, \quad (19)$$

式中

$$\Gamma = \iint \varphi^2 d\xi d\eta$$

可以把(19)式写成下列形式

$$\alpha'' + q(s)\alpha = f(s) \quad (20)$$

这是一个标准的二阶变系数非齐次线性微分方程, 该方程的解为齐次方程的通解  $\alpha_c$

$$\alpha_c + q(s)\alpha_c = 0 \quad (21)$$

和任一特解  $\alpha^*$

$$(\alpha^*)'' + q(s)\alpha^* = f(s) \quad (22)$$

两个函数之和。一旦  $k_1, k_2$  和弧坐标  $s$  的关系被确定, 就可得到它的解。一般的求解步骤是:

设  $\alpha_1(s)$  和  $\alpha_2(s)$  是齐次方程(21)的两个线性无关的解, 于是(20)式的全解为

$$\alpha = c_1 \alpha_1(s) + c_2 \alpha_2(s) + \alpha^*$$

这里  $\alpha^*$  是(20)式的一个特解, 从而,  $\{\omega\}$  和  $\{\varepsilon\}$  可用  $\{Q\}, \{M\}$  广义翘曲坐标  $\alpha$  和积分常数  $c_1, c_2$  表示。现在剩下的问题是确定积分常数  $\{Q_0\}, \{M_0\}, \{\varphi_0\}, \{U_0\}$  以及  $c_1$  和  $c_2$ 。

#### 4 平面曲梁受水平和竖向分布载荷时的广义翘曲坐标

在(3)式中取  $k_s = 0, \theta = 0$  就得到平面曲梁的情况(图3)。把直角坐标系  $Oxyz$  的原点置于曲梁端点( $s = 0$ ), 把坐标面  $Oxy$  取为梁轴线所在平面, 给定的载荷为

$$\{m\} = \{0\}, \{p\} = [0 \quad p_\xi \quad p_\eta]^T$$

如果取梁轴线为半径等于  $a$  的圆弧, 则有

$$\beta = \frac{s}{a}, \quad k_\eta = k = \frac{1}{a},$$

$$x = a \sin \beta, \quad y = a(1 - \cos \beta)$$

(19)式可简化为

$$\alpha'' - \left[ \frac{DGJ + k^2 \Gamma I_p}{\Gamma EI_p} \right] \alpha + \frac{D}{\Gamma EI_p} M_s(s) = 0 \quad (23)$$

则(23)式的解成为

$$\alpha = c_1 \operatorname{ch} \alpha s + c_2 \operatorname{sh} \alpha s + \alpha^* \quad (24)$$

式中

$$\alpha = \sqrt{\frac{G(DJ + k^2 \Gamma I_p)}{\Gamma EI_p}}$$

记  $f = D/(\Gamma EI_p)$ , (23)式的全解为

$$\alpha = c_1 \operatorname{ch} \alpha s + c_2 \operatorname{sh} \alpha s + \frac{f}{(k^2 + \alpha^2)} \left\{ M_{0s} \cos \beta + M_{0\xi} \sin \beta - Q_{0r} a \left[ \cos \beta - \frac{1}{\alpha^2} (k^2 + \alpha^2) \right] + qa^2 \left[ \sin \beta - \frac{s(k^2 + \alpha^2)}{a\alpha^2} \right] \right\} \quad (25)$$

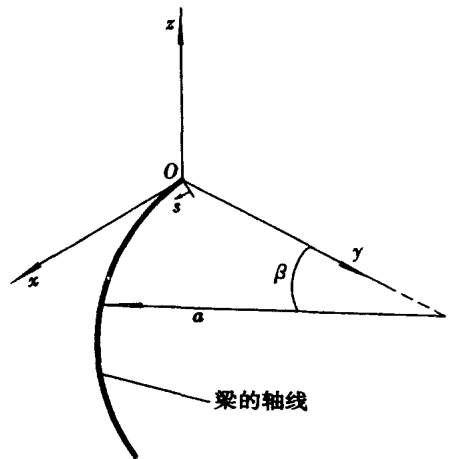


图3 平面曲梁的轴线

使用(6)和(9)式,得到

$$\left\{ \begin{aligned}
 M_s &= M_{0s} \cos \beta + M_{0\xi} \sin \beta + Q_{0\eta} \gamma - p \eta \alpha (s - a \sin \beta), \\
 M_\xi &= -M_{0s} \sin \beta + M_{0\xi} \cos \beta + Q_{0\eta} x - p \eta \alpha y, \\
 M_\eta &= M_{0\eta} + Q_{0s} \gamma - Q_{0\xi} x + p \xi \alpha y, \\
 Q_s &= Q_{0s} \cos \beta + Q_{0\xi} \sin \beta - p \xi \gamma, \\
 Q_\xi &= -Q_{0s} \sin \beta + Q_{0\xi} \cos \beta - p \xi x, \\
 Q_\eta &= Q_{0\eta} - p \eta s, \\
 \varphi_s &= \varphi_{0s} \cos \beta + \varphi_{0\xi} \sin \beta + \cos \beta \int_0^s (\omega_s \cos \beta - \omega_\xi \sin \beta) ds + \\
 &\quad \sin \beta \int_0^s (\omega_s \sin \beta + \omega_\xi \cos \beta) ds, \\
 \varphi_\xi &= -\varphi_{0s} \sin \beta + \varphi_{0\xi} \cos \beta - \sin \beta \int_0^s (\omega_s \cos \beta - \omega_\xi \sin \beta) ds + \\
 &\quad \cos \beta \int_0^s (\omega_s \sin \beta + \omega_\xi \cos \beta) ds, \\
 \varphi_\eta &= \varphi_{0\eta} + \int_0^s \varepsilon_1 ds, \\
 u_s &= U_{0s} \cos \beta + U_{0\xi} \sin \beta + \varphi_{0\eta} \gamma + \cos \beta \int_0^s (\xi_s \cos \beta - \xi_s \sin \beta) ds + \\
 &\quad \sin \beta \int_0^s (\xi_s \sin \beta + \xi_s \cos \beta) ds - \cos \beta \int_0^s \left[ \sin \beta \int_0^s \omega_\eta ds \right] ds + \\
 &\quad \sin \beta \int_0^s \left[ \cos \beta \int_0^s \omega_\eta ds \right] ds, \\
 u_\xi &= -U_{0s} \sin \beta + U_{0\xi} \cos \beta + \varphi_{0\eta} x - \sin \beta \int_0^s (\xi_s \cos \beta - \xi_s \sin \beta) ds + \\
 &\quad \cos \beta \int_0^s (\xi_s \sin \beta + \xi_s \cos \beta) ds + \sin \beta \int_0^s \left[ \sin \beta \int_0^s \omega_\eta ds \right] ds + \\
 &\quad \cos \beta \int_0^s \left[ \cos \beta \int_0^s \omega_\eta ds \right] ds, \\
 u_\eta &= U_{0\eta} + \varphi_{0s} \gamma - \varphi_{0\xi} x + \int_0^s \varepsilon_1 ds + \int_0^s \left[ \sin \beta \int_0^s (\omega_s \cos \beta - \omega_\xi \sin \beta) ds - \right. \\
 &\quad \left. \cos \beta \int_0^s (\omega_s \sin \beta + \omega_\xi \cos \beta) ds \right] ds.
 \end{aligned} \right. \quad (26)$$

式中,  $M_{0s}$ 、 $M_{0\xi}$ 、 $M_{0\eta}$ 、 $Q_{0s}$ 、 $Q_{0\xi}$ 、 $Q_{0\eta}$  为  $M_s$ 、 $M_\xi$ 、 $M_\eta$ 、 $Q_s$ 、 $Q_\xi$ 、 $Q_\eta$  在端点  $s = 0$  处的数值,  $\varphi_{0s}$ 、 $\varphi_{0\xi}$ 、 $\varphi_{0\eta}$ 、 $U_{0s}$ 、 $U_{0\xi}$ 、 $U_{0\eta}$  为  $\varphi_s$ 、 $\varphi_\xi$ 、 $\varphi_\eta$ 、 $U_s$ 、 $U_\xi$ 、 $U_\eta$  在端点  $s = 0$  处的值,  $\omega_s$ 、 $\omega_\xi$  和  $\varepsilon_s$ 、 $\varepsilon_1$  则由(17)式通过  $M_s$ 、 $M_\xi$ 、 $Q_s$ 、 $Q_\eta$  和  $\alpha$  表示。这里,  $M_\eta$  和  $Q_\xi$  均为零。

如果该梁在两端  $s = 0$  和  $s = l$  处均被固定, 则其边界条件可表示为

$$\begin{aligned}
 s = 0 (\beta = 0), \quad U_{0s} = U_{0\xi} = U_{0\eta} = 0, \quad \varphi_{0s} = \varphi_{0\xi} = \varphi_{0\eta} = 0, \quad \alpha = 0, \\
 s = l (\beta = \beta_l), \quad U_{ls} = U_{l\xi} = U_{l\eta} = 0, \quad \varphi_{ls} = \varphi_{l\xi} = \varphi_{l\eta} = 0, \quad \alpha_l = 0,
 \end{aligned}$$

式中  $l = \pi a$ , 由这些条件确定的积分常数为

$$\begin{cases} Q_{0\xi} = -p\xi a, Q_{0\xi} = 0, Q_{0\eta} = p\eta \frac{\pi a}{2}, \\ M_{0s} = p\eta a^2 \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \right], M_{0\xi} = -p\eta a^2, M_{0\eta} = 0, \\ c_1 = p\eta a^2 \left[ \frac{4f}{\pi(k^2 + a^2)} - \frac{\pi f}{2a^2} \right], \\ c_2 = -c_1 \text{ch}(\alpha\pi a) + \frac{fp\eta a^2}{(k^2 + a^2)} \left[ \frac{\pi(k^2 + a^2)}{2a^2} - \frac{4}{\pi} \right] \frac{1}{\text{sh}(\alpha\pi a)}. \end{cases} \quad (27)$$

至此,已经得到了问题的解答。图4表示了该梁的椭圆横截面,它由具有下列性质的钢材制成

$$E = 2.106 \times 10^5 \text{ MPa}, G = 0.816 \times 10^5 \text{ MPa}, \\ a = 7 \text{ cm}, b = 3 \text{ cm}, \alpha = 48 \text{ cm}^{-1}$$

圣维南扭转翘曲函数  $\varphi = -[(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)]\xi\eta$

设  $U_A$  和  $V_B$  分别表示梁中间截面( $\beta = \pi/2$ )上A和B点在  $\xi$  和  $\eta$  方向的位移,  $W_C$  表示梁横截面( $\beta = \pi/4$ )上C点在  $s$  方向的翘曲位移,如图4所示。为了分析图3所示的平面曲梁,将该梁划分为1477个三维实体单元,总节点数是4299个。对于不同的  $p_\xi$  和  $p_\eta$  值,使用本文公式得到的  $U_A$ 、 $V_B$  和  $W_C$  的理论值和按 ANSYS 程序的三维有限元分析的结果均被表示在图5a, b, c, d, e中,显然两者吻合得很好。从图5c中可以看出,位移  $V_B$  同载荷  $p_\xi$  无关。

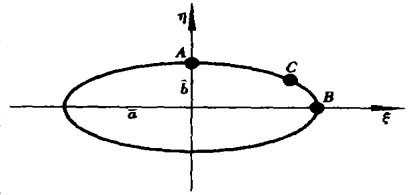


图4 梁的椭圆横截面

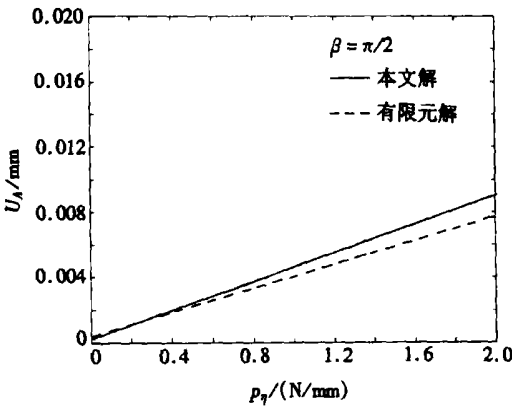


图5a 均布载荷  $p_\xi = 1 \text{ N/mm}$  和  $p_\eta$  作用时  
该梁跨中截面上A点的水平位移

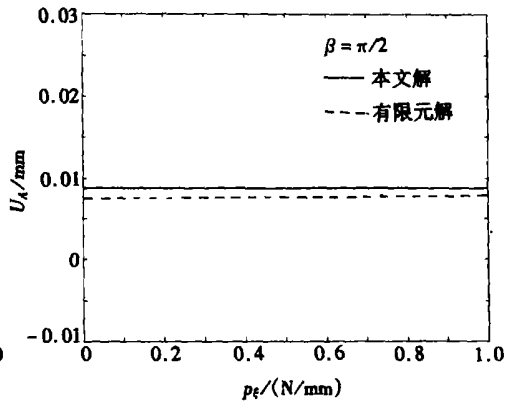


图5b 均布载荷  $p_\xi$  和  $p_\eta = 2 \text{ N/mm}$  作用时  
该梁跨中截面上A点的水平位移

计算受均布载荷作用时梁根部( $\beta = 0$ )的应力分布同样是重要的。图6表示了受均布载荷  $p_\xi = 1 \text{ N/mm}$  和  $p_\eta = 2 \text{ N/mm}$  作用时在截面  $\eta$  轴上的正应力  $\sigma_s$  的分布。这里正应力的理论值和有限元的结果吻合得很好。对于细长梁而言,切应力很小一般不予考虑。

## 5 结 论

本文提出了分析自然弯扭梁受复杂载荷作用时的一种有效方法,特别是精确地模拟了该梁的结构性质:考虑了扭转翘曲变形和横向剪切变形的影响。此外,本文理论不限于具有双对称横截面的梁,同样可推广至具有一般横截面形状的情况。对于不同的  $p_\xi$  和  $p_\eta$  的值,由本文

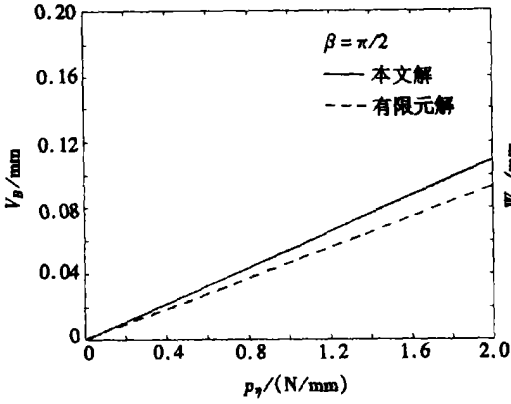


图 5c 均布载荷  $p_\xi$  的  $p_\eta$  作用时该梁跨中截面上  $B$  点的垂直位移

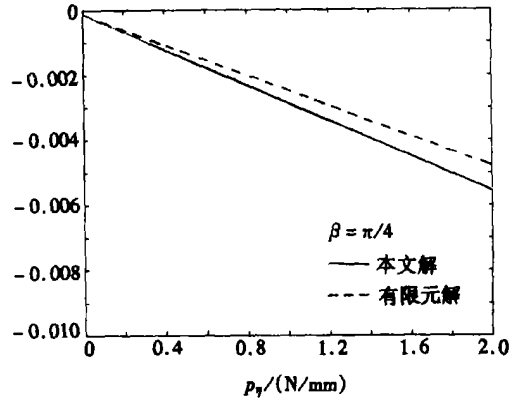


图 5d 均布载荷  $p_\xi = 1 \text{ N/mm}$  和  $p_\eta$  作用时该截面 ( $\beta = \pi/4$ ) 上  $C$  点的翘曲位移

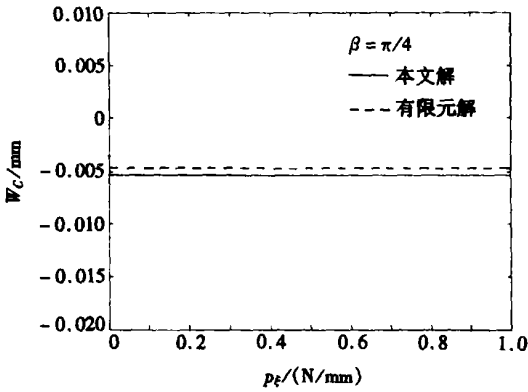


图 5e 均布载荷  $p_\xi$  和  $p_\eta = 2 \text{ N/mm}$  作用时该梁截面 ( $\beta = \pi/4$ ) 上  $C$  点的翘曲位移

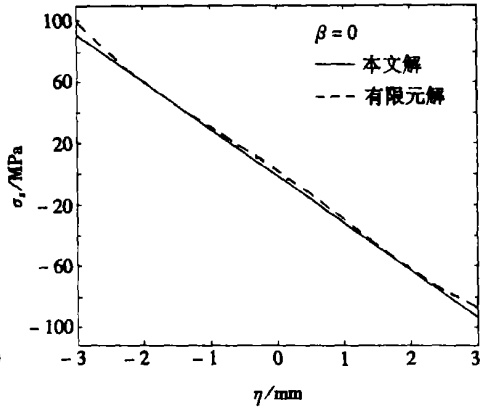


图 6 受均布载荷  $p_\xi = 1 \text{ N/mm}$  和  $p_\eta = 2 \text{ N/mm}$  作用时梁根部截面上正应力沿  $\eta$  轴的分布

公式得到的正应力和各种位移的理论值和有限元结果非常接近。由此表明本文提出的理论是可靠和有效的,可以用于各种工程问题中。

[参 考 文 献]

[1] Ie C A, Kosmatka J B. On the analysis of prismatic beams using first order warping functions[J]. International Journal of Solids and Structures, 1992, 29(7): 879—891.

[2] Zu J W, Z. Han R P S. Dynamic response of a spinning Timoshenko beam with general boundary conditions and subjected to a moving load[J]. Journal of Applied Mechanics, 1994, 61(1): 152—160.

[3] Wang C M, Lam K Y, He X Q, et al. Large deflection of an end supported beam subjected to a point load[J]. International Journal of Solids and Structures, 1997, 32(1): 63—72.

[4] Nayfeh Ali H, Perngjin F Pai. Non-linear non-planar parametric responses of an inextensional beam [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1989, 24(2): 139—158.

[5] Gummadi L N B, Palazotto A N. Large strain analysis of beams and arches undergoing rotations[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1998, 33(4): 615—645.

[6] William Paulsen H. Eigenfrequencies of curved Euler-Bernoulli beam structures with dissipative joints [J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1995, 53(2): 259—271.



- [7] Washizu K. Some considerations on a naturally curved and twisted slender beam[J]. *Journal of Mathematics and Physics*, 1964, **43**(2): 111—116.
- [8] 熊汉伟, 张培源. 空间曲杆有限元分析[J]. *重庆大学学报*, 1997, **20**(4): 31—36.
- [9] 朱渝春, 张培源, 严波. 封闭薄壁截面空间曲杆的双力矩[J]. *应用数学和力学*, 1999, **20**(12): 1252—1258.
- [10] Timoshenko S, Goodier J N. *Theory of Elasticity* [M]. New York McGraw\_Hill, 1951.
- [11] Timoshenko S. *Vibration Problems in Engineering* [M]. New York Wiley, 1974.

## Solution of Generalized Coordinate for Warping for Naturally Curved and Twisted Beams

YU Ai\_min<sup>1</sup>, YI Ming<sup>2</sup>

(1. Key Laboratory of Solid Mechanics of MOE, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China;

2. Institute of Automobile, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China)

**Abstract:** A theoretical method for static analysis of naturally curved and twisted beams under complicated loads was presented, with special attention devoted to the solving process of governing equations which take into account the effects of torsion-related warping as well as transverse shear deformations. These governing equations, in special cases, can be readily solved and yield the solutions to the problem. The solutions can be used for the analysis of the beams, including the calculation of various internal forces, stresses, strains and displacements. The present theory will be used to investigate the stresses and displacements of a plane curved beam subjected to the action of horizontal and vertical distributed loads. The numerical results obtained by the present theory are found to be in very good agreement with the results of the FEM results. Besides, the present theory is not limited to the beams with a double symmetric cross section, it can also be extended to those with arbitrary cross-sectional shape.

**Key words:** naturally curved and twisted beam; St. Venant torsional warping function; generalized coordinate for warping; the minimum potential energy principal; variational equation