

结构物对随机地震激励的响应分析*

俞嘉声 张建浩

(浙江大学土木系) (浙江丽水设计室)

(钱伟长推荐, 1984年7月27日收到)

摘 要

本文对结构物在随机地震激励下的弹性响应做了分析。以框剪体系的结构物为对象, 导出了实用计算公式, 并编制了FORTRAN语言程序及实例验算。根据结构物的使用要求, 赋以不同的动力可靠性(首次偏移概率), 从而可以得出体系的最大水平位移的包络线及内力变化规律。

一、基本方程

地震地面运动的过程, 十分复杂。通常模拟成非平稳随机过程的地震加速度, 可表示为

$$g(t) = A(t)f(t) \quad (1.1)$$

其中 $A(t)$ 为确定函数且可为慢变函数, $f(t)$ 为平稳随机过程, 其功率谱为 $S_f(\omega)$, 数学期望为零。这样可求出地震加速度 $g(t)$ 的功率谱密度函数和自相关函数为

$$S_g(t, \omega) = A^2(t)S_f(\omega) = A^2(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau \quad (1.2)$$

$$R_g(t, \tau) = A(t)A(t+\tau)R_f(\tau) = A(t'-\tau)A(t')R_f(\tau) \quad (1.3)$$

$$R_g(t, 0) = A^2(t)R_f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_g(t, \omega) d\omega \quad (1.4)$$

如果地震波的主要部分的持续时间远大于地基自振周期时, 则可模拟成高斯平稳随机过程⁽¹⁾

$$S_g(\omega) = \frac{[1 + 4\beta^2(\frac{\omega}{\omega_0})^2]}{\{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2\}^2 + 4\beta^2(\frac{\omega}{\omega_0})^2} S_0 \quad (1.5)$$

式中, $S_0 = 0.1098/t_0$, $\beta^2 = 0.410$, $\omega_0^2 = 242$, t_0 为持续时间。此时公式(1.1)中, $A(t) = 1$ 。

设结构物为高层框剪结构体系, 则在随机地震激励下的振动方程为:

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2\eta_i(t) = c_i(g(t)), \quad y = \sum_{i=1}^n HY_i(X)\eta_i(t) \quad (1.6)$$

式中 η_i 为广义坐标, H 为结构物总高度, x 为任一点的高度, 故 $X=H/x$; y 为 x 点的侧向位移; $Y_i(X)$ 为第 i 个无量纲主振型; ω_i 为相应的自振频率, ξ_i 为阻尼比, 且满足 $2\xi_i = \alpha_i/\omega_i + \omega_i\beta_i$, 这里 α_i, β_i 为确定值. 可见, 只要已知结构物的前两个阻尼比(ξ_1, ξ_2), 就可求出其它振型的阻尼. 通常 ξ_1, ξ_2 由实测得到^[2]. 高层建筑结构的 ξ_1, ξ_2 一般为2~10%. c_i 是向量 $\{C\}=[A]^{-1}\{B\}$ 的第 i 个元素. $\{B\}$ 为 n 维列向量, 其元素

$$b_j = -\int_0^1 \frac{1}{H} (2\Omega_j X + 1) dX = -\frac{1}{H} (\Omega_j + 1) \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (1.7)$$

$[A]$ 为 n 阶方阵, 其元素

$$a_{ij} = \int_0^1 [Y_i(X) - Y_j(X)\varphi] (2\Omega_j X + 1) dX \quad (1.8)$$

将振型函数 $Y_i(X)$ 代入上式, 积分后可得

$$\begin{aligned} a_{ij} = & \left[(2\Omega_j + 1) \frac{A_i}{B_i} \left(\varphi \lambda_a^i - \frac{1}{\lambda_a^i} \right) - 2\Omega_j \left(\frac{1}{(\lambda_a^i)^2} - \varphi \right) \right] \text{sh} \lambda_a^i \\ & + \left[(2\Omega_j + 1) \left(\frac{1}{\lambda_b^i} - \varphi \lambda_b^i \right) + 2\Omega_j \frac{A_i}{B_i} \left(\frac{1}{(\lambda_b^i)^2} - \varphi \right) \right] \text{ch} \lambda_b^i \\ & + \left[(2\Omega_j + 1) \frac{A_i}{B_i} \left(\frac{1}{\lambda_b^i} + \varphi \lambda_b^i \right) + 2\Omega_j \left(\frac{1}{(\lambda_b^i)^2} + \varphi \right) K_i \right] \sin \lambda_b^i \\ & - \left[(2\Omega_j + 1) K_i \left(\frac{1}{\lambda_b^i} + \varphi \lambda_b^i \right) - \left(\frac{1}{(\lambda_b^i)^2} + \varphi \right) \frac{A_i}{B_i} 2\Omega_j \right] \cos \lambda_b^i \\ & + \left[\left(\frac{1}{\lambda_a^i} - \varphi \lambda_a^i \right) - K_i \left(\frac{1}{\lambda_b^i} + \varphi \lambda_b^i \right) \right] + 2\Omega_j \frac{A_i}{B_i} \left[\frac{1}{(\lambda_a^i)^2} + \frac{1}{(\lambda_b^i)^2} \right] \end{aligned} \quad (1.8a)$$

式中 $A_i = (1 + \varphi^2) [(\lambda_a^i)^2 \text{sh} \lambda_a^i + (\lambda_b^i)^2 K_i \sin \lambda_b^i] + \varphi \Omega_i (\text{sh} \lambda_a^i + K_i \sin \lambda_b^i)$

$B_i = (1 + \varphi^2) [(\lambda_a^i)^2 \text{ch} \lambda_a^i + (\lambda_b^i)^2 \cos \lambda_b^i] + \varphi \Omega_i (\text{ch} \lambda_a^i - \cos \lambda_b^i)$

$K_i = \frac{\lambda_a^i [(\lambda_a^i)^2 \varphi (1 + \varphi^2) + (1 + \varphi^2 \Omega_i)]}{\lambda_b^i [(\lambda_b^i)^2 \varphi (1 + \varphi^2) - (1 + \varphi^2 \Omega_i)]}$

$\lambda_a^i = \sqrt{\lambda_1^i}, \quad \lambda_b^i = \sqrt{-\lambda_2^i}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{\psi^2 - \varphi \Omega_i \pm \sqrt{(\varphi^2 + \varphi \Omega_i)^2 + 4\Omega_i}}{2(1 + \psi^2 \varphi)}$

$\varphi = EI/S_w H^2, \quad \psi = H\sqrt{S_f/EI}$ 称结构参数. $\Omega_i = m\omega_i^2 H^2/EI$ 称第 i 个无量纲频率参数, 其中 m 为结构物单位高度上的质量. EI 为剪力墙抗弯刚度. $S_f(S_w)$ 称框架(剪力墙)抗剪刚度.

由振动方程(1.6)可推得体系动力响应的下列有关数字特征:

1) 输入为非平稳随机地震激励的响应

1° 水平位移

$$\begin{aligned} R_y(X, t, \tau) = & \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_y(t - \eta_1) A(\eta_1 - \tau) \exp(-j\omega\eta_1) d\eta_1 \right. \\ & \left. \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h_y(t - \eta_2) A(\eta_2) \exp(j\omega\eta_2) d\eta_2 \right] S_f(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega \end{aligned} \quad (1.9)$$

比较(1.4)与(1.9)两式, 可得到

$$S_y(X, t, \omega) = M_y(t, \omega) M_y^*(t, \omega) S_f(\omega) \quad (1.10)$$

式中 $M_y = \int_{-\infty}^{\infty} A(\eta) \exp(-j\omega\eta) h_y(t-\eta) d\eta$ (1.11)

$$h_y(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{HY_i c_i \exp(-\xi_i \omega t)}{\bar{\omega}_i} \sin \bar{\omega}_i t & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (1.12)$$

式中 $\bar{\omega}_i = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$ ，称阻尼振动频率； $h_y(t)$ 称脉响应函数； $M_y(t, \omega)$ ， $M_y^*(t, \omega)$ 称强度函数，且互为共轭。它们可用快速傅立叶变换(F.F.T)求得。

2° 剪力墙弯矩

$$R_M(X, t, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ M_1(t, \omega) M_1^*(t, \omega) + \left[\frac{EIm}{S_w} + \sum_{i=1}^n \frac{EImH}{S_w} Y_i c_i \right]^2 A^2(t) + \left[\frac{EIm}{S_w} + \sum_{i=1}^n \frac{EImH}{S_w} Y_i c_i \right] A(t) [M_1 \exp(j\omega t) + M_1^* \exp(-j\omega t)] \right\} S_f(\omega) d\omega \quad (1.13)$$

$$S_M(X, t, \omega) = \left\{ M_1(t, \omega) M_1^*(t, \omega) + \left[\frac{EIm}{S_w} + \sum_{i=1}^n \frac{EImH}{S_w} Y_i c_i \right]^2 A^2(t) + \left[\sum_{i=1}^n \frac{EImH}{S_w} Y_i c_i + \frac{EIm}{S_w} \right] A(t) [M_1 \exp(j\omega t) + M_1^* \exp(-j\omega t)] \right\} S_f(\omega) \quad (1.14)$$

式中 $M_1 = \int_{-\infty}^{\infty} A(\eta) \exp(-j\omega\eta) h_1(t-\eta) d\eta$ (1.15)

$$h_1(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \left[\frac{E\bar{I}}{H} Y_i' + \frac{EImH}{S_w} Y_i c_i \right] \frac{c_i \exp(-\xi_i \omega t)}{\bar{\omega}_i} \sin \bar{\omega}_i t & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (1.16)$$

式中 $\bar{I} = I(1 + S_f/S_w)$

3° 剪力墙剪力

$$R_V(X, t, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ M_2(t, \omega) M_2^*(t, \omega) + \left[\sum_{i=1}^n \frac{EImH}{S_w} Y_i' c_i \right]^2 A^2(t) + \left[\sum_{i=1}^n \frac{EImH}{S_w} Y_i' c_i \right]^2 A(t) [M_2 \exp(j\omega t) + M_2^* \exp(-j\omega t)] \right\} S_f(\omega) d\omega \quad (1.17)$$

$$S_V(X, t, \omega) = \left\{ M_2(t, \omega) M_2^*(t, \omega) + \left[\sum_{i=1}^n \frac{EImH}{S_w} Y_i' c_i \right]^2 A^2(t) + \left[\sum_{i=1}^n \frac{EImH}{S_w} Y_i' c_i \right]^2 A(t) [M_2 \exp(j\omega t) + M_2^* \exp(-j\omega t)] \right\} S_f(\omega) \quad (1.18)$$

式中 $M_2 = \int_{-\infty}^{\infty} A(\eta) \exp(-j\omega\eta) h_2(t-\eta) d\eta$ (1.19)

$$h_2(t) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^n \left(\frac{E\bar{I}}{H^2} Y_i'' + S_f Y_i' + \frac{EIm}{S_w} Y_i \omega_i^3 \right) \frac{c_i \exp(-\xi_i \omega_i t)}{\bar{\omega}_i} \sin \bar{\omega}_i t & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (1.20)$$

4° 框架总剪力

$$R_{V_f}(X, t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_3(t-\eta_1) A(\eta_1-\tau) \exp(-j\omega\eta_1) d\eta_1 \right. \\ \left. \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h_3(t-\eta_2) A(\eta_2) \exp(j\omega\eta_2) d\eta_2 \right] S_f(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega \quad (1.21)$$

$$S_{V_f}(X, t, \tau) = M_3(t, \omega) M_3^*(t, \omega) S_f(\omega) \quad (1.22)$$

$$\text{式中 } M_3 \int_{-\infty}^{\infty} A(\eta) h_3(t-\eta) \exp(-j\omega\eta) d\eta \quad (1.23)$$

$$h_3(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{S_f Y_i' c_i \exp(-\xi_i \omega_i t)}{\bar{\omega}_i} \sin \bar{\omega}_i t & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (1.24)$$

如果地震加速度模型(1.1)中 $A(t)$ 为

$$A(t) = (a_0 + a_1 t) \exp(-pt) \quad (1.25)$$

以及 $f(t)$ 的功率谱密度函数为

$$S_f(\omega) = A_1 \exp(-\omega^2 C^2) + A_2 \omega^2 \exp(-4\omega^2 C^2) \quad (1.26)$$

式中 a_0, a_1, p, A_1, A_2, C 为地震参数。文献[1]给出了几个地震参数值。这样，通过傅立叶变换，可直接积分出响应的强度函数 M_y 及 M_i ($i=1, 2, 3$)，即

$$M_y = \exp(-p-j\omega)t \{ (a_0 + a_1 t) H_y(jp-\omega) - ja_1 H_y'(jp-\omega) \} \quad (1.27)$$

$$M_i = \exp(-p-j\omega)t \{ (a_0 + a_1 t) H_i(jp-\omega) - ja_1 H_i'(jp-\omega) \} \quad (1.28)$$

式中 H_y, H_i ($i=1, 2, 3$)称频响函数。其值为

$$H_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_y(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (1.29)$$

$$H_i(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_i(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.30)$$

式中 $h_y(t), h_i(t)$ ($i=1, 2, 3$)由(1.12), (1.16), (1.20), (1.24)等式确定。 H_y', H_i' 分别是 H_y, H_i 对 ω 的一次导数。

这样由(1.27), (1.28)等式就可求出响应的功率谱密度函数。

2) 输入为平稳随机地震激励的响应

此时地震模型中 $A(t)=1$ ，以及利用(1.5)式的关系，其位移和内力响应的自相关函数和谱密度函数与上述形式相同。但强度函数 M_y 与 M_i ($i=1, 2, 3$)可写成

$$M_y = \exp(-j\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} h_y(\eta) \exp(j\omega\eta) d\eta = \exp(-j\omega t) H_y^*(\omega) \quad (1.31)$$

$$\text{以及 } M_y^* = \exp(j\omega t) H_y(\omega) \quad (1.32)$$

$$\text{同样 } M_i = \exp(-j\omega t) H_i^*(\omega) \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.33)$$

$$\text{以及 } M_i^* = \exp(j\omega t) H_i(\omega) \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.34)$$

式中 $H_y(\omega)$ 与 $H_i(\omega)$ 由(1.29)与(1.30)两式确定。 $H_y^*(\omega), H_i^*(\omega)$ 与 $H_y(\omega), H_i(\omega)$ 互为共轭。

二、动力可靠性的确定

结构分析的目的在于确定设计内力以及对安全度的评价。作者认为 Corotic⁽³⁾ 提出的可靠性公式具有较高的精确度。

1) 对于非平稳随机过程的动力可靠性公式

$$P_s(\lambda, -\lambda) = \exp\left\{-\int_0^T F(t)dt\right\} \quad (2.1)$$

式中

$$F(t) = \frac{\omega_2(t)}{\pi} \exp\left\{-\frac{r^2(t)}{2}\right\} \frac{1 - \exp\left[-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} q(t)r(t)\right]}{1 - \exp[-r^2(t)/2]}$$

$$= 2\nu_0^+(t) \left[\frac{1 - \exp\left\{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda q(t)}{\sigma_x(t)}\right\}}{\exp\left\{\frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2(t)}\right\} - 1} \right] \quad (2.2)$$

式中 $\nu_0^+ = \omega_2(t)/2\pi$, $\sigma_x = \sqrt{\alpha_0}$ 以及 α_i ($i=0,1,2$), $q(t)$, $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ 为谱参数。

$$\alpha_i(t) = 2 \int_0^\infty \omega^i S(t, \omega) d\omega \quad (2.3)$$

$$\omega_1(t) = \frac{\alpha_1(t)}{\alpha_0(t)} \quad (2.4)$$

$$\omega_2(t) = \left\{ \frac{\alpha_2(t)}{\alpha_0(t)} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.5)$$

$$q(t) = \left\{ 1 - \frac{\alpha_1^2(t)}{\alpha_0(t)\alpha_2(t)} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

容易证明 $0 \leq q(t) \leq 1$ 。

2) 对于平稳随机过程的动力可靠性公式

$$P_s(\lambda, -\lambda) = \exp\left\{ -\frac{\omega_2}{\pi} T \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \frac{1 - \exp\left[-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} qr\right]}{1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)} \right\} \quad (2.7)$$

此时谱参数均与时间无关，其计算参数与非平稳过程相同。其中 T 是确定值。

如所周知，可靠性的概念基于如下假定，即认为动力响应第一次达到某种限定的力学指标或结构极限承载能力之后，结构物就要发生破坏。因此，动力可靠性也称首次偏移概率。

由上面求出体系动力响应的数字特征之后，就可对安全度作出评价。通常根据结构物的重要性，赋以不同的概率可靠度 $P_0 = P_s(\lambda, -\lambda)$ ，就可解出设计所要求的位移和内力参数 λ 值。

三、算 例

考虑一幢八层的二跨框剪结构，层高三.6m，跨度为4.5m，以及开间为3.4m。结构物的几何尺寸和有关参数：

截面积：剪力墙为 $0.2 \times 4.5\text{m}^2$ ，框架柱为 $0.4 \times 0.4\text{m}^2$ ，框架梁为 $0.25 \times 0.6\text{m}^2$ ；材料的弹性常数为 $E = 2.5 \times 10^6 \text{T/m}^2$ ； $\xi_1 = \xi_2 = 7\%$ ， $t_0 = 20\text{sec}$ ；结构自重为 130T/m 。

描述结构特性的两个参数，其计算结果为： $\psi = 2.883757$ ， $\varphi = 0.005859$ 。结构物的前三个频率分别由电算可得：7.474，28.787，63.849，如图1所示。

考虑地震为平稳随机过程, 地震加速度的功率谱由 (1.5) 式确定. 若赋以概率可靠性为 99.1%, 则得到结构物的最大水平位移包络线如图 2 中的实线所示. 为了与确定性方法比较, 它相当于 9 度抗震设防. 按我国地震规范提供的计算结果如图 2 中的虚线所示. 它处在水平位移包络线的左侧. 这表明由动力可靠性确定的位移包络线是比较合理的.

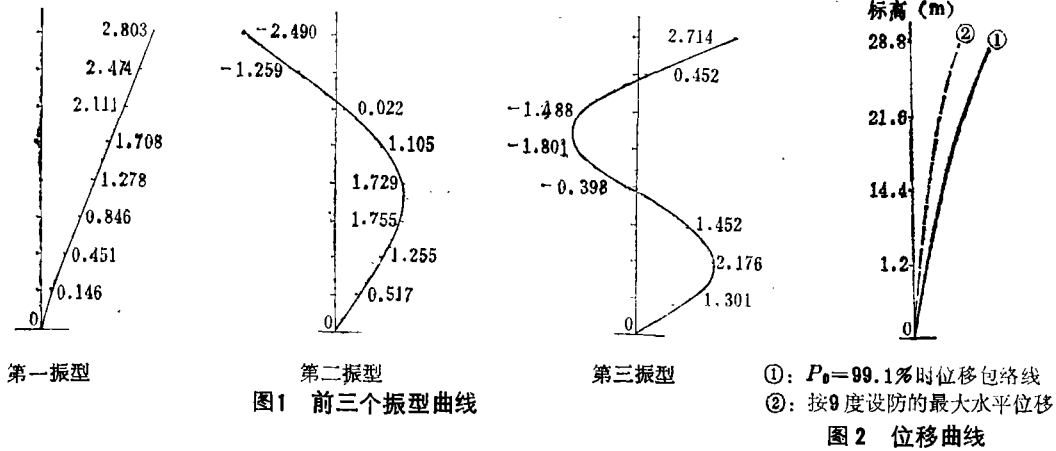


图 1 前三个振型曲线

图 2 位移曲线

参 考 文 献

- [1] 星谷勝, «随机振动分析», 地震出版社 (1977).
- [2] Hart, Garg C., Earthquake design of building damping, *ASCE*, 101, ST.1 (1975).
- [3] Ross, B. Corotic, First passage of nonstationary random process, *ASCE*, EM.2 (1972).
- [4] Basu, Amiya K. and Ashoh K. Nagpal, Dynamic characteristics of frame-wall system, *ASCE*, 108, ST.6 (1982).

An Analysis on Response of Structure to Random Earthquake Excitation

Yu Jia-sheng

(Department of Civil Engineering, Zhejiang University, Zhejiang)

Chang Jian-hao

(Institute of Building Design, Lishui, Zhejiang)

Abstract

In this paper the response of elastic structure to random earthquake excitation is analysed. For a frame-wall system practical calculating formulas are derived and a program in FORTRAN language is made. The program is checked with a numerical example. The envelope of the lateral displacement of the system and the variation regularity of the internal forces are determined from given values of dynamic reliability (first excursion probability) based on the requirement of the operation of the structures.