

弹性动力学的等效内含物法和 两椭球异质体的散射场

李 灏 钟伟芳 李功赋

(华中工学院, 1984年7月10日收到)

摘 要

用 Gurtin 变分原理推导了一般线弹性动力学的多异质体问题的等效性方程。用“等效内含物法”求得两椭球异质体对入射弹性波的散射场和散射横截面的近似表达式, 并给出了计算实例。

一、引 言

弹性体内的异质体对弹性波的散射问题在工程实际上具有重要的意义。例如在材料的无损探伤以及探矿等问题中, 都需要把异质体产生的散射弹性波同埋藏的异质体的几何、物理特性联系起来, 在探伤问题中还需要将散射波同断裂力学参数联系起来。但是除了球形异质体的散射场可以用分离变量法求得以级数形式表达的解析解外^[1,2,3], 非球形异质体问题因为邻接条件的困难, 无法求得精确解。因此, 许多计算散射场的近似方法应运而生^[4,5,6], “等效内含物法”便是其中一种^[7,8]。这种方法的基本思想就是通过解一个与异质体等效的内含物问题来代替异质体散射问题。这里“内含物”(inclusions)是指弹性体内分布有“特征应变”和“特征体力”的区域。“特征应变”(eigen-strain)泛指“自发应变”, 例如温度应变、相转换应变以及塑性应变。在没有周围介质的约束时, “特征应变”将不伴随应力。“特征应变”和“特征体力”是为了使“内含物”问题能与异质体问题等效而引入的。内含物问题有 Green 积分解。

文献[7]首次在动力学领域应用等效内含物法, 将复合材料和周期分布的特征应变等效, 但它只是用这种概念去帮助选取试探函数(trial function)而用 Ritz 变分法求解。文献[8]用等效内含物法分析了仅含一个椭球异质体产生的弹性动力学场, 但由于未引进“等效特征体力”的概念, 所导出的等效性方程不能正确反映密度的差别的影响, 也不能正确地计算应力场。

本文就一般线弹性动力学的多异质体问题用 Gurtin 变分原理推导了等效性方程, 指出在动力学情况下, 与异质体等效的内含物中必须分布“特征体力”才能使等效成立。并用此方法求得两椭球异质体对弹性波的散射场的近似表达式。算例表明所得之解有足够精确性。

二、一般情况下弹性动力学的等效性方程

问题 I 异质体问题

考虑一弹性常数为 c_{ijkl} , 质量密度常数为 ρ 的弹性体 D , 其内有 N 个异质体 (inhomo-

genicities), $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}, \dots, \Omega^{(N)}$, 它们的密度常数和弹性常数分别为 $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \dots, \rho^{(N)}$, $c_{ijkl}^{(1)}, c_{ijkl}^{(2)}, \dots, c_{ijkl}^{(N)}$. 一般弹性动力学的数学提法为

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} c_{ijkl} u_{k,l}, & \mathbf{x} \in D' \\ c_{ijkl}^{(\alpha)} u_{k,l}, & \mathbf{x} \in \Omega^{(\alpha)} \end{cases} \quad (\alpha=1, 2, \dots, N) \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \begin{cases} \rho \dot{u}_i, & \mathbf{x} \in D' \\ \rho^{(\alpha)} \dot{u}_i, & \mathbf{x} \in \Omega^{(\alpha)} \end{cases} \quad (\alpha=1, 2, \dots, N) \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} c_{ijkl} u_{k,l}^{(\text{out})} n_j^{(\alpha)} &= c_{ijkl}^{(\alpha)} u_{k,l}^{(\text{in})} n_j^{(\alpha)} \\ u_i^{(\text{out})} &= u_i^{(\text{in})} \end{aligned} \right\} \mathbf{x} \in \partial\Omega^{(\alpha)} \quad (\alpha=1, 2, \dots, N) \quad (2.3)$$

$$c_{ijkl} u_{k,l} n_j = \bar{p}_i, \quad \mathbf{x} \in \partial D \quad (2.4)$$

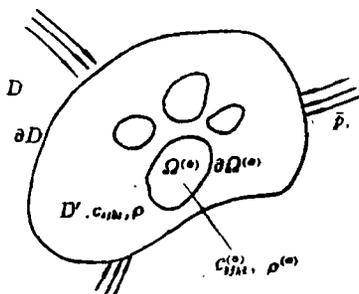


图 1

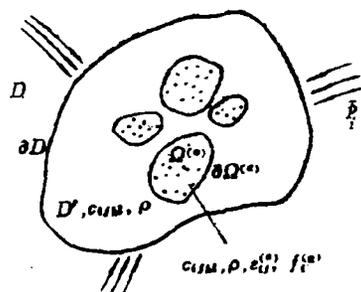


图 2

$$u_i(\mathbf{x}, 0) = u_{i0}(\mathbf{x}), \quad \dot{u}_i(\mathbf{x}, 0) = \dot{u}_{i0}(\mathbf{x}) \quad (t=0) \quad (2.5)$$

但是要解这一套方程, 特别是要满足邻接条件 (2.3) 是不容易的. 因此考虑另一与之等效的问题.

问题 I 内含物问题

在这一问题中, 认为弹性体 D 是均匀的, 即弹性常数和质量密度常数到处都是 c_{ijkl} 和 ρ , 而在原来有异质体的区域内分布有“特征应变”, $\varepsilon_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, \dots, \varepsilon_{ij}^{(N)}$. 是否需要分布“特征体力”有待证明. 因此用 f_i^* 表示弹性体 D 所受体力. f_i^* 可能与问题 I 中的 f_i 不一样.

控制此问题的一套数学方程是:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} c_{ijkl} u_{k,l}, & \mathbf{x} \in D' \\ c_{ijkl} (u_{k,l} - \varepsilon_{kl}^{(\alpha)}), & \mathbf{x} \in \Omega^{(\alpha)} \end{cases} \quad (\alpha=1, 2, \dots, N) \quad (2.6)$$

$$\sigma_{ij,j} + f_i^* = \rho \dot{u}_i, \quad \mathbf{x} \in D$$

$$\left. \begin{aligned} c_{ijkl} u_{k,l}^{(\text{out})} n_j^{(\alpha)} &= c_{ijkl} (u_{k,l}^{(\text{in})} - \varepsilon_{kl}^{(\alpha)}) n_j^{(\alpha)} \\ u_i^{(\text{out})} &= u_i^{(\text{in})} \end{aligned} \right\} \mathbf{x} \in \Omega^{(\alpha)} \quad (\alpha=1, 2, \dots, N) \quad (2.7)$$

外边界条件和初始条件同 (2.4), (2.5).

现在问: 能否选择和怎样选择适当的 $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}$ ($\alpha=1, 2, \dots, N$) 和 f_i^* 使由问题 I 的一套方程所得之解恰好就是问题 I 的解.

当然,若让这两套线性方程未知函数的系数相等,自然两套方程会有相同的解,但显然没法通过选择 $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}$ ($\alpha=1, 2, \dots, N$) 和 f_i^* 来使系数相等. 是否可以把各个方程的右边移到左边,再让这两套右边均为零的方程的左边相等起来,而实现两问题的等价呢^[8]? 也不行. 试想,若是某个方程乘了一个因子(右边仍为零)再让两套方程的左边相等,岂不又得出了一套等效性方程?

下面,用变分原理推导使两问题等效的等效性方程.

问题 I 的数学提法也可用变分原理表达. 根据 Gurtin 变分原理^[13], 真实位移应使

$$\delta A = 0 \quad (2.8)$$

$$\text{其中 } A = \iiint_D \left(\frac{1}{2} c_{ijkl} u_{k,l} * u_{i,j} + \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i * \dot{u}_i - \rho \dot{u}_{i0} u_i - f_i * u_i \right) dV - \iint_{\partial D} \bar{p}_i * u_i dS \quad (2.9)$$

式中算子“*”表示两时间函数的卷积,即

$$f_i * u_i = \int_0^t f_i(t-\tau) u_i(\tau) d\tau$$

弹性常数和质量密度随区域而异. 最后一项的面积分只在边界 ∂D 上给定了面力 \bar{p}_i 的部分进行.

问题 II 也可用变分原理表述. 当给定了 $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}$ ($\alpha=1, 2, \dots, N$) 和 f_i^* 时, 问题 II 的位移场也应使

$$\delta A^* = 0 \quad (2.10)$$

其中

$$\begin{aligned} A^* = & \iiint_{D'} \left(\frac{1}{2} c_{ijkl} u_{k,l} * u_{i,j} + \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i * \dot{u}_i - \rho \dot{u}_{i0} u_i - f_i^* * u_i \right) dV \\ & - \iint_{\partial D} \bar{p}_i * u_i dS + \sum_{\alpha} \iiint_{\Omega^{(\alpha)}} \left[\frac{1}{2} c_{ijkl} (u_{k,l} - \varepsilon_{kl}^{(\alpha)}) * (u_{i,j} - \varepsilon_{ij}^{(\alpha)}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i * \dot{u}_i - \rho \dot{u}_{i0} u_i - f_i^* * u_i \right] dV \end{aligned} \quad (2.11)$$

D' 是 D 挖去了 $\Omega^{(\alpha)}$ ($\alpha=1, 2, \dots, N$) 剩余的部分.

(2.10) 的变分只对 u_i , $u_{i,j}$ 进行. 给定一个 $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}$ ($\alpha=1, 2, \dots, N$), f_i^* , 便可得一个位移场 u_i , 这样得到之 u_i 显然是问题 I 之可能位移场, 这是因为两问题的边界条件相同. 要使之能成为真实位移场, 尚须满足变分式 (2.8), 即 $\delta A = 0$. 也就是说, 使两问题等效的 $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}$ ($\alpha=1, 2, \dots, N$), f_i^* 须使按 $\delta A^* = 0$ 得出的位移场 u_i 满足 $\delta A = 0$, 用数学语言说, 在 $\delta A^* = 0$ 的条件下使 $\delta A = 0$, 或引入拉格朗日乘子 ζ , 等价地表示成

$$\delta A + \zeta \delta A^* = 0 \quad (2.12)$$

将 (2.9), 和 (2.11) 代入上式, 并注意到

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{1}{2} \dot{u}_i * \dot{u}_i \right) &= \dot{u}_i * \delta \dot{u}_i = \int_0^t \dot{u}_i(t-\tau) \delta \dot{u}_i(\tau) d\tau \\ &= \dot{u}_i(t-\tau) \delta u_i(\tau) \Big|_0^t - \int_0^t \delta u_i(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \dot{u}_i(t-\tau) d\tau \\ &= \dot{u}_{i0} \delta u_i + \dot{u}_i * \delta u_i \end{aligned} \quad (2.13)$$

其中已用到 $\delta u_i(0)=0$, 变分与导数可交换顺序是显然的.

这样便得到

$$\begin{aligned} \delta A + \xi \delta A^* = & \iiint_D \left\{ (c_{ijhl} u_{h,l} + \xi c_{ijhl} u_{h,l}) * \delta u_{i,j} + [(\rho \dot{u}_i - f_i) + \xi(\rho \dot{u}_i - f_i^*)] * \delta u_i \right\} dV \\ & + \sum_{\alpha=1}^N \iiint_{\Omega^{(\alpha)}} \left\{ [c_{ijhl}^{(\alpha)} u_{h,l} + \xi c_{ijhl} (u_{h,l} - \varepsilon_{hl}^{(\alpha)})] * \delta u_{i,j} + [(\rho^{(\alpha)} \dot{u}_i - f_i) \right. \\ & \left. + \xi(\rho \dot{u}_i - f_i^*)] * \delta u_i \right\} dV - \iint_{\partial D} (\bar{p}_i + \xi \bar{p}) * \delta u_i dS \\ = & 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

由于 $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}$, f_i^* 的相互独立性, δu_i 与 $\delta u_{i,j}$ 可独立地取值^[7], 于是得到

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} c_{ijhl} u_{h,l} + \xi c_{ijhl} u_{h,l} = 0 \\ (\rho \dot{u}_i - f_i) + \xi(\rho \dot{u}_i - f_i^*) = 0 \end{aligned} \right\} \mathbf{x} \in D' \\ & \left. \begin{aligned} c_{ijhl}^{(\alpha)} u_{h,l} + \xi c_{ijhl} (u_{h,l} - \varepsilon_{hl}^{(\alpha)}) = 0 \\ \rho^{(\alpha)} \dot{u}_i - f_i + \xi(\rho \dot{u}_i - f_i^*) = 0 \end{aligned} \right\} \mathbf{x} \in \Omega^{(\alpha)} \quad (\alpha=1, 2, \dots, N) \\ & \bar{p} + \xi \bar{p} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D \end{aligned}$$

解之可得

$$\begin{aligned} \xi &= -1 \\ f_i^* &= f_i, \quad \mathbf{x} \in D' \\ & \left. \begin{aligned} (c_{ijhl}^{(\alpha)} - c_{ijhl}) u_{h,l} + c_{ijhl} \varepsilon_{hl}^{(\alpha)} = 0 \\ (\rho^{(\alpha)} - \rho) \dot{u}_i + (f_i^* - f_i) = 0 \end{aligned} \right\} \mathbf{x} \in \Omega^{(\alpha)} \quad (\alpha=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (2.15)$$

可见在 $\Omega^{(\alpha)}$ ($\alpha=1, 2, \dots, N$) 内, f_i^* 并不等于异质体问题中的体力 f_i , 将其差值

$$f_i^{(\alpha)} = f_i^* - f_i, \quad \mathbf{x} \in \Omega^{(\alpha)} \quad (\alpha=1, 2, \dots, N) \quad (2.16)$$

叫做在 $\Omega^{(\alpha)}$ 中的“等效特征体力”, 它的引入是为了等效质量密度差异 $\Delta \rho^{(\alpha)}$ 的效果. (2.15) 式就是等效特征应变 $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}$ 和体力 $f_i^{(\alpha)}$ ($\alpha=1, 2, \dots, N$) 所应满足的“等效性方程”, 在谐波的散射问题中, (2.15) 式成为

$$\left. \begin{aligned} -(\rho^{(\alpha)} - \rho) \omega^2 u_i + f_i^{(\alpha)} &= (\rho^{(\alpha)} - \rho) \omega^2 u_i^{(0)} \\ (c_{ijhl}^{(\alpha)} - c_{ijhl}) u_{h,l} + c_{ijhl} \varepsilon_{hl}^{(\alpha)} &= -(c_{ijhl}^{(\alpha)} - c_{ijhl}) u_{h,l}^{(0)} \end{aligned} \right\} \quad (\alpha=1, 2, \dots, N) \quad (2.17)$$

其中 $u_i^{(0)}$ 是入射波, u_i 与前面式子中的 u_i 意义不同, 在这里 u_i 表示由异质体或等效的内含物引起的散射场(即总位移场为 $u_i^{(0)} + u_i$), 而 u_i 可表示为 $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}, f_i^{(\alpha)}$ ($\alpha=1, 2, \dots, N$) 的 Green 积分^[9]

$$u_m(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N \iiint_{\Omega^{(\alpha)}} [f_i^{(\alpha)}(\mathbf{x}') g_{im}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) - c_{ijhl} \varepsilon_{hl}^{(\alpha)}(\mathbf{x}') g_{im,j}(\mathbf{x}', \mathbf{x})] dx'_1 dx'_2 dx'_3 \quad (2.18)$$

所以 (2.17) 实质上是一个关于未知函数 $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}, f_i^{(\alpha)}$ ($\alpha=1, 2, \dots, N$) 的积分微分方程

组。对静力学，由 $\dot{u}_i=0$ 得 $f_i^{(0)}=0$ ，(2.15) 退化为 Eshelby 的等效性方程^[11]。

三、两椭球异质体的散射场及其散射横截面

设无限大各向同性弹性体 D 内有两个异质椭球体 Ω^I, Ω^{II} ，(如示意图3)

平面入射波为：

$$u_i^{(0)}(\mathbf{x}, t) = u_0 b_i \exp [i(kc, x_i^0 - \omega t)] \quad (3.1)$$

其中

$$k = \begin{cases} \alpha = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}}, & \text{纵波} \\ \beta = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu}}, & \text{横波} \end{cases} \quad (3.2)$$

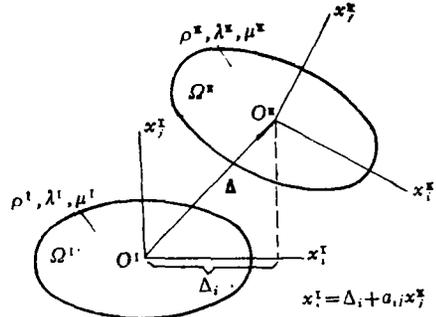


图 3

将两椭球体内的等效特征体力 f_i^I, f_i^{II} 和等效特征应变 $\varepsilon_{ij}^I, \varepsilon_{ij}^{II}$ 在各自坐标系内展成幂级数：

$$\left. \begin{aligned} f_i^{(\gamma)}(\mathbf{x}^{(\gamma)}) &= \Delta\rho^{(\gamma)} \omega^2 u_0 (A_i^{(\gamma)} + A_i^{(\gamma)u} x_u^{(\gamma)} + A_i^{(\gamma)uv} x_u^{(\gamma)} x_v^{(\gamma)} + \dots) \\ c_{ijkl} \varepsilon_{hl}^{(\gamma)}(\mathbf{x}^{(\gamma)}) &= \Delta\lambda^{(\gamma)} k u_0 (B_{ij}^{(\gamma)} + B_{ij}^{(\gamma)u} x_u^{(\gamma)} + B_{ij}^{(\gamma)uv} x_u^{(\gamma)} x_v^{(\gamma)} + \dots) \end{aligned} \right\} (\gamma = I, II) \quad (3.3)$$

其中 $\Delta\rho^{(\gamma)} = \rho^{(\gamma)} - \rho, \Delta\lambda^{(\gamma)} = \lambda^{(\gamma)} - \lambda, \gamma = I, II$ 。

则将等效性方程(2.17)离散成代数方程组^[9]

$$\left. \begin{aligned} (h^I - I)A^I + h^{II}A^I - H^I B^I - H^{II}B^I &= -u_0^I \\ h^{II}A^I + (h^I - I)A^I - H^{II}B^I - H^I B^I &= -u_0^I \\ d^I A^I + d^{II}A^I + (-D^I + I)B^I - D^{II}B^I &= -U_0^I \\ d^{II}A^I + d^I A^I - D^{II}B^I + (-D^I + I)B^I &= -U_0^I \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

解得 A, B 系数即确定了等效特征体力和应变，代入(2.18)便得散射位移场为

$$u_i = u_i^I + u_i^{II} a_{ij} \quad (3.5)$$

$$u_i^{(\gamma)}(\mathbf{x}^{(\gamma)}) = \int_{\Omega^{(\gamma)}} [g_{im}(\mathbf{x}'^{(\gamma)}, \mathbf{x}^{(\gamma)}) f_m^{(\gamma)}(\mathbf{x}'^{(\gamma)}) - g_{im,n}(\mathbf{x}'^{(\gamma)}, \mathbf{x}^{(\gamma)}) c_{mnpq} \varepsilon_{pq}^{(\gamma)}(\mathbf{x}'^{(\gamma)})] dV'^{(\gamma)} \quad (\gamma = I, II) \quad (3.6)$$

其中 Green 函数是已知的：

$$g_{im}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \left\{ \beta^2 \delta_{im} \frac{\exp[i\beta R]}{R} + \left[\frac{\exp[i\beta R]}{R} - \frac{\exp[i\alpha R]}{R} \right]_{,im} \right\}$$

其中 $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = [(x_i - x'_i)(x_i - x'_i)]^{\frac{1}{2}}$

因此

$$u_i^{(\gamma)}(\mathbf{x}^{(\gamma)}) = u_0 [A_m^{(\gamma)} h_{im}^{(\gamma)} + A_m^{(\gamma)u} h_{im}^{(\gamma)u} + \dots - B_{mn}^{(\gamma)} H_{imn}^{(\gamma)} - B_{mn}^{(\gamma)u} H_{imn}^{(\gamma)u} - \dots] \quad (\gamma = I, II) \quad (3.7)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} h_{im}^{(\gamma)}(\mathbf{x}^{(\gamma)}) &= \Delta\rho^{(\gamma)}/\rho E_{im}^{(\gamma)}(\mathbf{x}^{(\gamma)}), \quad h_{im}^{(\gamma)u}(\mathbf{x}^{(\gamma)}) = \Delta\rho^{(\gamma)}/\rho E_{im}^{(\gamma)u}(\mathbf{x}^{(\gamma)}), \dots \\ H_{imn}^{(\gamma)}(\mathbf{x}^{(\gamma)}) &= \Delta\lambda^{(\gamma)}/\mu \cdot k/\beta^2 E_{imn}^{(\gamma)}(\mathbf{x}^{(\gamma)}), \quad H_{imn}^{(\gamma)u}(\mathbf{x}^{(\gamma)}) = \Delta\lambda^{(\gamma)}/\mu \cdot k/\beta^2 E_{imn}^{(\gamma)u}(\mathbf{x}^{(\gamma)}), \dots \end{aligned} \right\} \quad (\gamma = \text{I}, \text{II}) \quad (3.8)$$

且

$$\left. \begin{aligned} E_{im}^{(\gamma)}(\mathbf{x}^{(\gamma)}) &= \frac{1}{4\pi} \left[\beta^2 \delta_{im} \Phi^{(\gamma)} + \Phi_{;im}^{(\gamma)} - \Psi_{;im}^{(\gamma)} \right] \\ E_{im}^{(\gamma)u}(\mathbf{x}^{(\gamma)}) &= \frac{1}{4\pi} \left[\beta^2 \delta_{im} \Phi^{(\gamma)u} + \Phi_{;im}^{(\gamma)u} - \Psi_{;im}^{(\gamma)u} \right] \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (\gamma = \text{I}, \text{II}) \quad (3.9)$$

而

$$\Phi^{(\gamma)}(\mathbf{x}^{(\gamma)}) = \iiint_{\Omega^{(\gamma)}} \exp[i\beta R]/R \, dV^{(\gamma)}, \quad \Phi^{(\gamma)u}(\mathbf{x}^{(\gamma)}) = \iiint_{\Omega^{(\gamma)}} x_u^{(\gamma)} \exp[i\beta R]/R \, dV^{(\gamma)}, \dots \quad (\gamma = \text{I}, \text{II}) \quad (3.10)$$

将上式中的 β 换为 α 即得 $\Psi^{(\gamma)}$, $\Psi^{(\gamma)u}$, ... ($\gamma = \text{I}, \text{II}$).

对于 Ω^I , Ω^I 为椭球体的情形如(3.10)的 Φ -积分已有显式解析表达式^[10], 因此(3.7)中的大小 h -函数都是已知的显式函数. 对于许多情形, (3.7)只须取很少的几项便可获得足够精确的近似解.

在许多实际问题中, 例如探矿和探伤, 往往只对远离异质体的散射场感兴趣, 对于这种情况, (3.7)可以有更简单的表达式.

在两球心中点建 \mathbf{x} -坐标系(图4), 记 $r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_i x_i}$, $l_i = x_i/r$, $l_i^I = a_{qi} l_i$, 由图可见, 当 r 充分大时, 有

$$\left. \begin{aligned} R^I &\sim r - x_i^I l_i + \frac{1}{2} \Delta_i l_i, \quad R^I \sim r - x_i^I l_i^I - \frac{1}{2} \Delta_i l_i \\ 1/R^I &\sim 1/r, \quad 1/R^I \sim 1/r \\ \frac{\partial^n}{\partial x_i \partial x_j \dots \partial x_k} \left(\frac{\exp[i\beta R^I]}{R^I} \right) &\sim (i\beta)^n \frac{\exp[i\beta r]}{r} l_{i_1} \dots l_{i_n} \exp[-i\beta l_i x_i^I] \cdot \exp[i\beta \Delta_i l_i / 2] \\ \frac{\partial^n}{\partial x_i \partial x_j \dots \partial x_k} \left(\frac{\exp[i\beta R^I]}{R^I} \right) &\sim (i\beta)^n \frac{\exp[i\beta r]}{r} l_{i_1} \dots l_{i_n} \exp[-i\beta l_i^I x_i^I] \cdot \exp[-i\beta \Delta_i l_i / 2] \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

这些近似关系, 代入(3.10)便使(3.5)成为

$$u_i(\mathbf{x}) = u_i^I(\mathbf{x}) + u_j^I(\mathbf{x}) a_{ij} = R_i(\theta, \varphi) \frac{\exp[i\alpha r]}{r} + Q_i(\theta, \varphi) \frac{\exp[i\beta r]}{r} \quad (3.12)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} R_i(\theta, \varphi) &= l_j \left[l_j F_j^I(\alpha) \exp\left[i \frac{\alpha}{2} \Delta_i l_i\right] + l_j^I F_j^I(\alpha) \exp\left[-i \frac{\alpha}{2} \Delta_i l_i\right] \right] \\ Q_i(\theta, \varphi) &= (\delta_{ij} - l_i l_j) F_j^I(\beta) \exp\left[i \frac{\beta}{2} \Delta_i l_i\right] + (a_{ij} - l_i l_j^I) F_j^I(\beta) \exp\left[-i \frac{\beta}{2} \Delta_i l_i\right] \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

而

$$F_i^{(\gamma)}(\eta) = u_0 \Delta\rho^{(\gamma)}/\rho (A_i^{(\gamma)} S^{(\gamma)}(\eta) + A_i^{(\gamma)u} S^{(\gamma)u}(\eta) + \dots)$$

$$-iu_0\Delta\lambda^{(\nu)}/\mu\cdot\eta k/\beta^2\cdot l_q(B_{iq}^{(\nu)}S^{(\nu)}(\eta)+B_{iq}^{(\nu)u}S^{(\nu)u}(\eta)+\dots) \quad (\nu=I, II; \eta=\alpha, \beta) \quad (3.14)$$

$$\left. \begin{aligned} S^{(\nu)}(\eta) &= \frac{\eta^2}{4\pi} \iiint_{\Omega^{(\nu)}} \exp[-i\eta l_p^{(\nu)} x_p^{(\nu)}] dV^{(\nu)} \\ S^{(\nu)u}(\eta) &= \frac{\eta^2}{4\pi} \iiint_{\Omega^{(\nu)}} x_u^{(\nu)} \exp[-i\eta l_p^{(\nu)} x_p^{(\nu)}] dV^{(\nu)} \end{aligned} \right\} (\nu=I, II; \eta=\alpha, \beta) \quad (3.15)$$

对于 Ω^I, Ω^{II} 为椭球的情形, S^I, S^{II}, \dots 是可以算出来的, 例如

$$S^I(\alpha) = a_1^I a_2^I a_3^I [\sin(\alpha W^I)/\alpha - W^I \cos(\alpha W^I)] / (W^I)^3$$

$$W^I = \sqrt{l_1^I (a_1^I)^2 + l_2^I (a_2^I)^2 + l_3^I (a_3^I)^2}$$

由(3.12)可见, 两个异质椭球体引起的散射远场是球面波(已略去时间因子 $\exp[-i\omega t]$). 无论入射波是横波还是纵波, 散射波都既有横波又有纵波, 波幅随方向而异, 根据波幅和方向的关系, 可获得一些有关 Ω^I, Ω^{II} 的几何、物理信息.

“散射横截面”(scattering cross section) P 是综合衡量障碍物的散射效果的物理量^[1,5], P 的意义是: 透过一包围障碍物的封闭曲面 S 的能流量相当于入射波透过一面积为 P 的垂直横截面的能流量. 其计算公式为

$$P = \langle \oiint_S I_i n_i dS \rangle / \langle I^0 \rangle$$

其中能流矢量 $I_i = \sigma_{ij} \dot{u}_j$, $I^0 = c_i \sigma_{ij}^{(0)} \dot{u}_j^{(0)}$, 尖括号 $\langle \cdot \rangle$ 表示对时间平均.

“微分散射横截面”(differential scattering cross section) $dP/d\Omega$ 是某一观察方向散射效果的度量, 这里 $d\Omega$ 是立体角的微元.

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\langle I_i n_i dS / I^0 \rangle}{d\Omega} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\langle \sigma_{ij} \dot{u}_j l_i r^2 \rangle}{(I^0)} \quad (3.16)$$

将(3.12)和(3.1)代入上式, 便可得本问题的 $dP/d\Omega$:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{R_i R_i^* k / \alpha + Q_i Q_i^* k / \beta}{u_i^{(0)} u_i^{(0)*}} \quad (3.17)$$

而

$$P = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (dP/d\Omega) \sin\theta d\theta \quad (3.18)$$

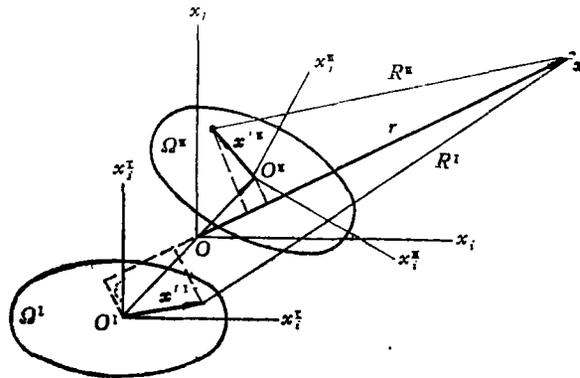


图 4

四、算 例

本节算例都只取(3.3)关于特征应变和特征体力的展开式的第一项作为近似,即作均匀等效特征应变和均匀等效特征体力的近似.计算表明,此种近似是比较可靠的.

图6是无限大锗质材料内含一铝质球体,平面纵波入射时精确解^[1,2,3]和近似解的比较,横坐标是无量纲波数 ka_1 ,纵坐标是散射横截面.从图可见,作均匀等效特征应变和均匀等效特征体力的近似所得之解与精确解吻合得很好.

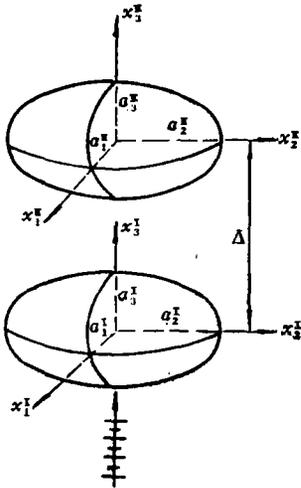


图 5

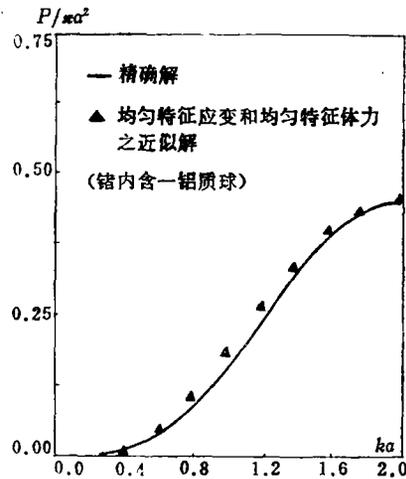


图 6

图5是所计算异质椭球体的几何位置示意图.为了用平面图形罗列计算结果的方便,特选这样的情形作为算例:即两椭球相同大小,平行排列,且 $a_1=a_2$.一般情形并不给计算带来更大困难.

图7是锗质材料内嵌有两铝质椭球时,分别在入射纵波和入射横波下总散射横截面(已用 πa_1^2 正规化)随两椭球球心之间的距离变化的图形.图8则是两空洞椭球体的情形.从这两图可以看出,当两椭球体相距较近时,散射横截面远远大于一个椭球体的散射横截面(图

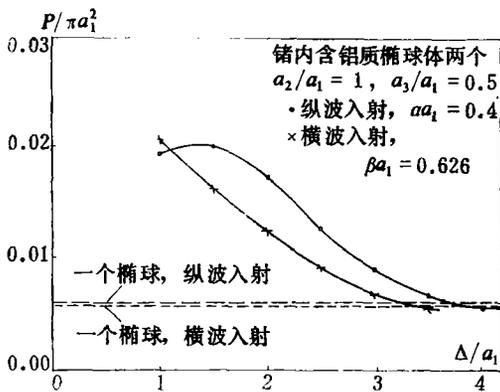


图 7

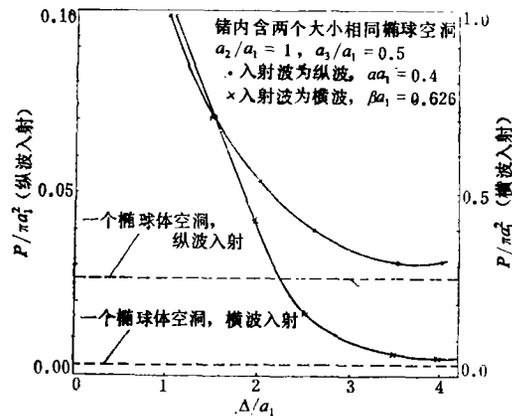


图 8

中用虚线表示)。这说明两椭球体相互作用较甚, 空洞情形尤甚。而当球心之间距离达 $3.5a_1-4a_1$ 时, 散射横截面基本接近一个椭球体时的散射横截面。所以 $3.5a_1-4a_1$ (此值与各轴比例有关) 可作为两椭球体相互作用的范围。

图 9 是相应于图 7 中的纵波曲线的微分横截面的极坐标图。极径是微分横截面 $dP/d\Omega$ 的大小 (已用 P 正规化), 极角 θ 的 0° 选为入射波的入射方向, 极角大小表示观察方向与入射方向的夹角。从这些图可以看出, 随着球心间距 Δ 的增大, 最大的散射方向由逆入射方向转向顺入射方向。且在入射方向的第一个峰值总是在 $40^\circ \approx \sin^{-1}(a/\beta)$ 处, 当距离较大时微分散射截面的最大值也停留在这个方向。

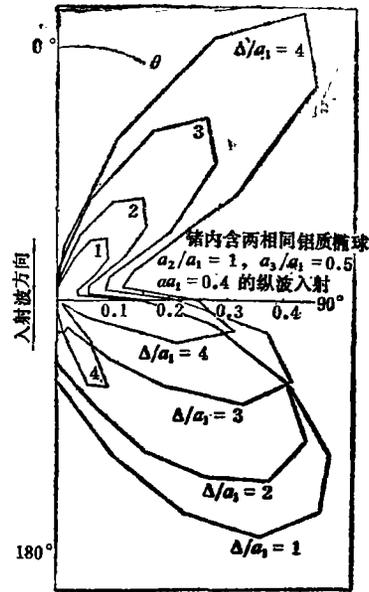


图 9 $dP/d\Omega$ 的极坐标图

五、讨论和结论

本文对两个椭球体求解的具体方法, 很容易推广应用于多个椭球体。如果对非椭球形的区域能像[10]一样, 得出形如(3.10)式的 Φ -积分, 此方法也可以用于非椭球形的异质体的散射问题求解。可见形如(3.10)式的 Φ -积分是使用等效内含物法的一个关键。另外本文的方法只要对 $a_3 \rightarrow 0$ 的情形作适当数学处理便可用于多个盘状裂纹的动力学问题。

对特征体力和特征应变作均匀分布的简化所得计算结果在 $ka \leq 2$ 的范围内与精确解吻合得相当好 (所有计算曲线都是用 PDP-11/70 机的绘图软件所绘), 但随着无量纲波数 ka 继续增加, 却出现了明显偏离精确解的趋向。这是因为异质体对入射波的散射是有一定的频率构成的。对 $ka \leq 2$ 的频率范围, 主振型是对应于特征体力和特征应变均匀分布的情形的。但过了这个范围, 对应于均匀分布的模态振型便减弱了。到了 $ka=5$, 均布简化所得散射横截面为零, 这说明对应于特征体力, 特征应变为均匀分布的振型已经弱得很了, 入射波不能激起其振荡。所以对于 $ka > 2$ 的情形须在(3.3)式中取较多的项才能得到足够精度的解。

对两椭球异质体的计算结果表明当 $\Delta \geq 3.5a_1$ 时, 两椭球体的相互作用已十分微弱, 这与静力学中的相应问题的结论十分相似^[12] (Mura 等人计算两球体的弹性静力学场的结论表明当两球心相隔 $4a$ 距离时, 两球相互作用可忽略。), 因此对一系列间距大于 $3.5a_1$ 的椭球群, 可单个地计算其散射场。

两套形式不相同的数理方程, 能通过调整某些参量函数而得到相同的解吗? 本文关于等效性方程的推导事实上给出了解决这类普遍的等效问题的一个方法。因为大多数数理微分方程总可以等价于一个变分方程, 即给定微分方程总可以找到相应的泛函求逗留值。所以用条件变分原理讨论两套方程等效可作为一个普遍办法。

参 考 文 献

- [1] Ying, C. F. and R. Truell, Scattering of a plane longitudinal wave by a spherical obstacle in an isotropically elastic solid, *J. App. Phys.*, **27**, 9 (1956), 1086—1097.
- [2] Einspruch, N. G., E. J. Witterholt and R. Truell, Scattering of a plane transverse wave by a spherical obstacle in an elastic medium, *J. App. Phys.*, **31**, 5 (1960), 806—818.
- [3] Johnson, G. and R. Truel, Numerical computations of elastic scattering cross section, *J. App. Phys.*, **36**, 11 (1965), 3466—3475.
- [4] Mal, A. K. and L. Knopoff, Elastic wave velocities in two-component systems, *J. Inst. Math. Applics.*, **3** (1967), 376—387.
- [5] Gubernatis, J. E., E. Domany and J. A. Krumhansl, Formal aspects of the theory of the scattering of ultrasound by flaws in elastic materials, *J. App. Phys.*, **48**, 7 (1977), 2804—2811.
- [6] Gubernatis, J. E., E. Domany, J. A. Krumhansl and M. Huberman, The born approximation in the theory of the scattering of elastic waves by flaws, *J. App. Phys.*, **48**, 7 (1977), 2812—2819.
- [7] Wheeler, P. and T. Mura, Dynamic equivalence of composite material and eigenstrain problems, *J. App. Mechanics, ASME*, **40** (1973), 498—502.
- [8] Fu, L. S. and T. Mura, The determination of elastodynamic fields of an ellipsoidal inhomogeneity, *J. App. Mechanics, ASME*, **50** (1983), 390—396.
- [9] 钟伟芳、李功赋, 用等效内含物法分析两椭球异质体的弹性动力学问题, 硕士论文, 华中工学院 (1984), 5.
- [10] 李灏、钟伟芳、李功赋, 用位势理论计算与异质体的弹性动力学问题有关的体积分, (待发表).
- [11] Eshelby, J. D., The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems, *Proceedings of the Royal Society, London*, **241** (1957).
- [12] Moschovidis, Z. A. and T. Mora, Two-ellipsoidal inhomogeneities by the equivalent inclusion method, *ASME, J. App. Mechanics*, **42** (1975), 847—852.
- [13] Gurtin, M. E., Variational principles for linear elastodynamics, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16**, 1 (1964), 34.

On the Method of Equivalent Inclusions in Elastodynamics and the Scattering Fields of Two Ellipsoidal Inhomogeneities

Li Hao Zhong Wei-fang Li Gong-fu

(Huazhong University of Science and Technology, Wuhan)

Abstract

Gurtin's Variational Principle is used to derive the equivalence equations for general linear elastodynamical problems of multiple inhomogeneities. An approximate expression on scattering field of two ellipsoidal inhomogeneities is obtained by the method of equivalent inclusions. And some numerical examples are presented.