文章编号: 1000_0887(2004) 10_1076_07

高维同宿环扭曲分支与稳定性*

金银来[1,2], 朱德明[2]

(1. 临沂师范学院 数学系, 山东临沂 276005;
2. 华东师范大学 数学系, 上海 200062)

(李继彬推荐)

摘要: 利用沿同宿环的线性变分方程的线性独立解作为在同宿环的小管状邻域内的局部坐标系来建立 Poincar 映射, 研究了高维系统扭曲同宿环的分支问题• 在非共振条件和共振条件下, 获得了 1_同宿环、1_周期轨道、2_同宿环、2_周期轨道和两重 2_同期轨道的存在性、存在个数和存在区域• 给出了相关的分支曲面的近似表示• 同时, 研究了高维系统同宿环和平面系统非扭曲同宿环的稳定性•

关 键 词: 局部坐标; Poincar 映射; 扭曲分支; 1_周期轨; 2_周期轨; 稳定性
中图分类号: O175.12; O177.91　　文献标识码: A

1 引言与假设

近几年来, 随着非线性科学的发展和对混沌现象的深入研究, 有关高维系统同宿环的分支问题也得到了广泛研究并获得了许多结果(参见[1~8])• 特别地, 文[3, 4]论述了余维为 2 的同宿分支, 文[5, 6]考虑了退化情况的同宿环分支• 本文, 我们研究高维空间扭曲同宿环的分支和稳定性•

考虑下列 C^r 系统

$$\dot{z} = f(z) + g(z, \mu), \tag{1}$$

以及未扰系统

$$\dot{z} = f(z), \tag{2}$$

其中 $r \geqslant 3$, $z \in R^{m+n}$, $\mu \in R^l$, $l \geqslant 2$, $0 \leqslant |\mu| \ll 1$, $f(0) = 0$, $g(z, 0) = 0$• 为简单起见我们不妨设 $g(0, \mu) = 0$• 首先给出如下假设:

(H1) 奇点 $z = 0$ 为(2) 的双曲奇点, 其稳定流形 W_0^s 和不稳定流形 W_0^u 分别为 m 维和 n 维的• $-\rho_1$ 和 λ_1 为 $Df(0)$ 的简单实特征值, 使得 $Df(0)$ 的其余任意特征值 λ 满足 $\mathrm{Re}\,\lambda < -\rho_0 < -\rho_1 < 0$ 或者 $\mathrm{Re}\,\lambda > \lambda_0 > \lambda_1 > 0$, 其中 λ_0 和 ρ_0 为某正数•

(H2) 系统(2) 有一条同宿环 $\Gamma = \left\{z = r(t) : t \in \mathbf{R}, r(\pm\infty) = 0\right\}$• $\dim(T_{r(t)} W^u \cap T_{r(t)} W^s) = 1$•

---

* 收稿日期: 2002_06_18; 修订日期: 2004_03_16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371040)
作者简介: 金银来(1966—), 男, 山东苍山人, 教授, 博士, 主要研究方向为常微分方程定性与分支理论(联系人. Tel: +86_539_8013703; Fax: +86_539_8297761; E_mail: jinyinlai@sina.com.cn)•

(H3) $\lim_{t\to+\infty}(T_{r(t)}W^{u}+T_{r(t)}W^{s})=T_0W_0^{uu}+T_0W_0^{s}$,

$\lim_{t\to-\infty}(T_{r(t)}W^{u}+T_{r(t)}W^{s})=T_0W_0^{u}+T_0W_0^{ss}$,

其中, $W_0^{ss}\subset W_0^{s}$ 和 $W_0^{uu}\subset W_0^{u}$ 分别为 $z=0$ 的强稳定流形和强不稳定流形• $T_0W_0^{ss}$ 为所有实部小于 $-\rho_0$ 的特征值所对应的广义特征子空间, $T_0W_0^{uu}$ 为所有实部大于 λ_0 的特征值所对应的广义特征子空间•

(H3) 称为强倾斜性质• 易知当假设(H1) 成立时, 假设(H2) 和(H3) 是通有的•

2 局部坐标与 Poincar 映射

众所周知, W^{s} 和 W^{u} 是 C^{r} 的[8,9], $\Gamma\cap W_0^{s}$, $\Gamma\cap W_0^{u}$, W^{ss} 和 W^{uu} 是 C^{1} 的•

假设 $z=0$ 的小邻域 U 充分小, 那么, 存在一个 C^{r} 变换使得系统(1) 在 U 中具有下述形式:

$$\begin{cases}\dot{x}=[\lambda_1(\mu)+\cdots]x+O(u)[O(u)+O(y)+O(v)],\\ \dot{y}=[-\rho_1(\mu)+\cdots]y+O(v)[O(v)+O(x)+O(u)],\\ \dot{u}=[B_1(\mu)+\cdots]u+O(x)[O(x)+O(y)+O(v)],\\ \dot{v}=[-B_2(\mu)+\cdots]v+O(y)[O(y)+O(x)+O(u)],\end{cases}\tag{3}$$

其中, $|\mu|\ll 1$, $\lambda_1(0)=\lambda_1$, $\rho_1(0)=\rho_1$, $\mathrm{Re}\,\sigma(B_1(0))>\lambda_0$, $\mathrm{Re}\,\sigma(-B_2(0))<-\rho_0$, $z=(x,y,u^{*},v^{*})^{*}$, $x,y\in R^{1}$, $u\in R^{n-1}$, $v\in R^{m-1}$, 此处符号 $*$ 表示转置•

记 $r(t)=(r_1(t),r_2(t),(r_3(t))^{*},(r_4(t))^{*})^{*}$, $r(-T^{2})=(\delta,0,\delta_u^{*},0^{*})^{*}$, $r(T^{1})=(0,\delta,0^{*},\delta_v^{*})^{*}$, 其中 $|\delta_u|=o(\delta)$, $|\delta_v|=o(\delta)$, $\delta>0$ 且充分小使得 $\{(x,y,u^{*},v^{*})^{*}: |x|,|y|,|u|,|v|<2\delta\}\subset U$• 考虑线性变分系统

$$\dot{z}=(Df(r(t)))z\tag{4}$$

及其伴随系统

$$\dot{\phi}=-(Df(r(t)))^{*}\phi\tag{5}$$

与[4~7] 类似的, 不难知道系统(4) 有基本解矩阵 $Z(t)=(z_1(t),z_2(t),z_3(t),z_4(t))$ 满足

$$z_1(t)\in(T_{r(t)}W^{s})^{c}\cap(T_{r(t)}W^{u})^{c},$$
$$z_2(t)=-\dot{r}(t)/|\dot{r}(T^{1})|\in T_{r(t)}W^{s}\cap T_{r(t)}W^{u},$$
$$z_3(t)\in(T_{r(t)}W^{s})^{c}\cap T_{r(t)}W^{u},\quad z_4(t)\in T_{r(t)}W^{s}\cap(T_{r(t)}W^{u})^{c},$$

$$Z(-T^{2})=\begin{pmatrix}w_{11}&w_{21}&0&w_{41}\\ w_{12}&0&0&w_{42}\\ w_{13}&w_{23}&I&w_{43}\\ 0&0&0&w_{44}\end{pmatrix},\quad Z(T^{1})=\begin{pmatrix}1&0&w_{31}&0\\ 0&1&w_{32}&0\\ 0&0&w_{33}&0\\ w_{14}&w_{24}&w_{34}&I\end{pmatrix},$$

其中, $w_{21}<0$, $w_{12}\neq 0$, $\det w_{44}\neq 0$, $\det w_{33}\neq 0$• 同时, 当 δ 充分小时, $\|w_{1j}(w_{12})^{-1}\|\ll 1, j\neq 2$; $\|w_{2j}(w_{21})^{-1}\|\ll 1, j\neq 3,4$; $\|w_{3j}(w_{33})^{-1}\|\ll 1, j\neq 3$; $\|w_{4j}(w_{44})^{-1}\|\ll 1, j\neq 4$•

记 $w_{12}=\Delta|w_{12}|$, 我们称 Γ 为非扭曲的如果 $\Delta=1$, 称 Γ 为扭曲的如果 $\Delta=-1$• 本文我们考虑扭曲的情况•

这样, 我们选取 $z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$, $z_4(t)$ 作为沿 Γ 的局部坐标系• 该方法与[4] 中类似, 但要比之更容易得多•

记 $N=(n_1,0,n_3^{*},n_4^{*})^{*}$, $h(t)=r(t)+Z(t)N$• 定义 $S_2=\{z=h(-T^{2}):|x|,$

$|y|, |u|, |v| < 2\delta\}$, $S_1 = \{z = h(T^1): |x|, |y|, |u|, |v| < 2\delta\}$ 分别为 Γ 在 $t = -T^2$ 和 $t = T^1$ 处的截面•

下面我们考虑 Poincaré 映射 $F = F_2 \circ F_1: S_1 \mapsto S_1$, 其中 $F_1: q_1 \in S_1 \mapsto q_2 \in S_2$ 由 $z = 0$ 的小邻域内的流(近似的, 我们取系统(3) 在 $z = 0$ 处的线性系统的流) 来诱导, $F_2: q_2 \in S_2 \mapsto q_3 \in S_1$ 由 $z = 0$ 的小邻域外部 Γ 的小管状邻域内的(1) 的流来构造•

记 $q_2 = (x_2, y_2, u_2^*, v_2^*)^* = r(-T^2) + Z(-T^2)N_2$, $q_j = (x_j, y_j, u_j^*, v_j^*)^* = r(T^1) + Z(T^1)N_j$, $j = 1, 3$, $N_i = (n_{i,1}, 0, (n_{i,3})^*, (n_{i,4})^*)^*$, $i = 1, 2, 3$• 由 $Z(-T^2)$ 和 $Z(T^1)$ 的表达式便可得到 $x_2 \approx \delta$, $y_j \approx \delta$, $j = 1, 3$ 以及

$$\begin{cases} n_{j,1} = x_j - w_{31}(w_{33})^{-1}u_j, \\ n_{j,3} = (w_{33})^{-1}u_j, \\ n_{j,4} = -w_{14}x_j + (w_{14}w_{31} + w_{24}w_{32} - w_{34})(w_{33})^{-1}u_j + v_j - \delta_v, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} n_{2,1} = (w_{12})^{-1}[y_2 - w_{42}(w_{44})^{-1}v_2], \\ n_{2,3} = u_2 - \delta_u + a_0(w_{12})^{-1}y_2 + [a_3 - w_{23}(w_{21})^{-1}a_1](w_{44})^{-1}v_2, \\ n_{2,4} = (w_{44})^{-1}v_2, \end{cases} \tag{7}$$

其中 $a_0 = w_{11}w_{23}(w_{21})^{-1} - w_{13}$, $a_j = -w_{4j} + w_{1j}(w_{12})^{-1}w_{42}$, $j = 1, 3$•

设 $z = h(t)$ 为(1) 在 Γ 的小邻域的解, 代入(1) 并利用 $\dot{r}(t) = f(r(t))$, $\dot{Z}(t) = Df(r(t))Z(t)$ 以及一些简单计算即得 F_2 定义为

$$n_{3,j} = n_{2,j} + M_j\mu + \text{h.o.t.}, \qquad j = 1, 3, 4• \tag{8}$$

其中 $$M_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_j^*(t)g_\mu(r(t), 0)\,\mathrm{d}t, \qquad j = 1, 3, 4$$

称为 Melnikov 向量, $\Phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t), \phi_4(t)) = (Z^{-1}(t))^*$ 为(5) 的基础解矩阵•

下面我们构造 F_1• 不失一般性我们假设 $\beta = \rho_1/\lambda_1 \geqslant 1$• 记 $\beta(\mu) = \rho_1(\mu)/\lambda_1(\mu)$, $\tau = \tau(\mu)$ 为从 q_1 到 q_2 的时间, $s = s(\mu) = e^{-\lambda_1(\mu)\tau}$, 利用(3) 在 $z = 0$ 处的线性近似并忽略高阶项, 不难得到 F_1 定义为:

$$x_1 \approx s\delta, \quad y_2 \approx s^{\beta(\mu)}\delta, \quad u_1 \approx s^{B_1(\mu)/\lambda_1(\mu)}u_2, \quad v_2 \approx s^{B_2(\mu)/\lambda_1(\mu)}v_1, \tag{9}$$

(s, u_2, v_1) 称为 Silnikov 坐标•

如此我们便定义了 Poincaré 映射 $F = F_2 \circ F_1: S_1 \mapsto S_1$ 如下:

$$\begin{cases} n_{3,1} = (w_{12})^{-1}\delta s^{\beta(\mu)} + M_1\mu + \text{h.o.t.}, \\ n_{3,3} = u_2 - \delta_u + [w_{11}w_{23}(w_{21})^{-1} - w_{13}](w_{12})^{-1}\delta s^{\beta(\mu)} + M_3\mu + \text{h.o.t.}, \\ n_{3,4} = (w_{44})^{-1}s^{B_2(\mu)/\lambda_1(\mu)}v_1 + M_4\mu + \text{h.o.t.}• \end{cases} \tag{10}$$

注 2.1　F 在区域 $s > 0$ 内关于 $Q = (s, v_1, u_2)$ 为 C^{r-2}, 在边界上至少是 C^1 的•

3　Γ 的 1_同宿环和 1_周期轨分支

由(6) 和(10) 得到分支方程 $G(s, v_1, u_2) = (G_1, G_3, G_4) = F(q_1) - q_1 = 0$ 如下:

$$\begin{cases} \delta[(w_{12})^{-1}s^{\beta(\mu)} - s] + M_1\mu + \text{h.o.t.} = 0, \\ u_2 - \delta_u + [w_{11}w_{23}(w_{21})^{-1} - w_{13}](w_{12})^{-1}\delta s^{\beta(\mu)} + M_3\mu + \text{h.o.t.} = 0, \\ -v_1 + \delta_v + w_{14}\delta s + (w_{44})^{-1}s^{B_2(\mu)/\lambda_1(\mu)}v_1 + M_4\mu + \text{h.o.t.} = 0• \end{cases} \tag{11}$$

显然, 在(1) 的 1_同宿环和 1_周期轨与方程(11) 的满足 $s \geqslant 0$ 的解 Q 之间分别存在一一对

应关系• 首先我们假设

(A1) (非共振条件)• $\rho_1 > \lambda_1$

记$\partial G = \partial G/\partial Q$• 易知$\det\partial G|_{Q=0,\mu=0} \neq 0$• 由隐函数定理得, 在$(Q, \mu) = (0, 0)$附近, (11)有唯一解$s = s(\mu)$, $u_2 = u_2(\mu)$, $v_1 = v_1(\mu)$满足$s(0) = 0$, $u_2(0) = 0$, $v_1(0) = 0$• 于是得到下述定理成立•

定理 3.1 如果假设(H1)~(H3)和(A1)成立, 那么, 当$|\mu|$充分小时, 系统(1)在Γ附近至多存在一个1_同宿环或者一个1_周期轨• 而且, 该1_同宿环和1_周期轨不能共存•

下面我们考虑1_同宿环和1_周期轨分支曲面• 由(11)可知方程$(G_3, G_4) = 0$总有唯一解$u_2 = u_2(s, \mu)$, $v_1 = v_1(s, \mu)$, $0 \leqslant s$, $|\mu| \ll 1$, 代入$G_1 = 0$得到

$$(w_{12})^{-1}s^{\beta(\mu)} - s + \delta^{-1}M_1\mu + \text{h.o.t.} = 0 \tag{12}$$

如果(12)有解$s = 0$, 那么(12)化为

$$M_1\mu + \text{h.o.t.} = 0 \tag{13}$$

所以, 如果$M_1 \neq 0$, 那么在$\mu = 0$的小邻域内(13)定义了一个$l-1$维的曲面L, L在$\mu = 0$处有法向量M_1•

显然, 如果$M_1\mu > 0$, 那么, 方程(12)有唯一解满足$s > 0$• 如果$M_1\mu < 0$, 那么, 方程(12)不存在任何满足$s \geqslant 0$的解• 至此, 我们已经证明了下述定理•

定理 3.2 如果$M_1 \neq 0$, 那么, 在$\mu = 0$附近存在$l-1$维的曲面L, L在$\mu = 0$处有法向量M_1, 使得当且仅当$\mu \in L$时, 系统(1)在Γ附近存在唯一同宿环•

如果$M_1\mu > 0$, 那么, 系统(1)在Γ附近存在唯一周期轨• 如果$M_1\mu < 0$, 那么, 系统(1)在Γ附近不存在任何1_同宿环和1_周期轨•

下面我们假设

(A2) (共振条件)• $\lambda_1(\mu) \equiv \lambda$, $\rho_1(\mu) = \lambda + \alpha(\mu)\lambda$, $\alpha(\mu) \in R^1$, $|\alpha(\mu)| \ll 1$, $\alpha(0) = 0$•

此时, (12)化为

$$s^{1+\alpha(\mu)} = w_{12}(s - \delta^{-1}M_1\mu) + \text{h.o.t.} \tag{14}$$

记$N(s)$和$V(s)$分别为(14)式的左边和右边, 那么系统(1)有1_同宿环和1_周期轨的充要条件分别为$N(0) = V(0)$和$N(s_0) = V(s_0)$, $s_0 > 0$• 根据(14)知$N(0) = 0$, $V(0) = -\delta^{-1}w_{12}M_1\mu + \text{h.o.t.}$, 并且当$s > 0$时有$\dot{N}(s) = (1 + \alpha(\mu))s^{\alpha(\mu)} > 0$, $\dot{V}(s) = w_{12} < 0$•

不妨假设$s = 0$时(14)化为$M_1\mu = \beta_0(\mu)$• 于是不难得到下述定理成立•

定理 3.3 假设(H1)~(H3)和(A2)成立, $M_1 \neq 0$, 那么, 对$|\mu| \ll 1$, 下述结论成立:

1) 在$\mu = 0$的邻域内, 存在$l-1$维的曲面Σ, 使得, 当$\mu \in \Sigma$时, 系统(1)在Γ附近存在唯一的1_同宿环而无任何1_周期轨道•

2) 如果$M_1\mu > \beta_0(\mu)$, 那么系统(1)在Γ附近存在唯一1_周期轨道而无任何1_同宿环•

4　Γ的2_同宿环和2_周期轨分支

此时, 将从q_1到q_2的时间重新记作τ_1, $s_1 = e^{-\lambda_1(\mu)\tau_1}$• 记$F_1(q_3) = q_4$, τ_2为从q_3到q_4的时间, $s_2 = e^{-\lambda_1(\mu)\tau_2}$• $F(q_3) = q_5 = q_1$• 那么, 分支方程$G^2 = (F(q_1) - q_3, F(q_3) - q_1) = 0$为:

$$\delta[(w_{12})^{-1}s_1^{\beta(\mu)} - s_2] + M_1\mu + \text{h.o.t.} = 0, \tag{15a}$$

$$u_2 - \delta_u + [w_{11}w_{23}(w_{21})^{-1} - w_{13}](w_{12})^{-1}\delta s_1^{\beta(\mu)} + M_3\mu + \text{h.o.t.} = 0, \tag{15b}$$

$$-v_3+\delta_v+w_{14}\delta_{s_2}+(w_{44})^{-1}s_1^{B_2(\mu)/\lambda_1(\mu)}v_1+M_4\mu+\text{h.o.t.}=0, \tag{15c}$$

$$\delta[(w_{12})^{-1}s_2^{\beta(\mu)}-s_1]+M_1\mu+\text{h.o.t.}=0, \tag{15d}$$

$$u_4-\delta_u+[w_{11}w_{23}(w_{21})^{-1}-w_{13}](w_{12})^{-1}\delta s_2^{\beta(\mu)}+M_3\mu+\text{h.o.t.}=0, \tag{15e}$$

$$-v_1+\delta_v+w_{14}\delta_{s_1}+(w_{44})^{-1}s_2^{B_2(\mu)/\lambda_1(\mu)}v_3+M_4\mu+\text{h.o.t.}=0\cdot \tag{15f}$$

首先我们假设(A1)成立• 记 $Q^2=(s_1,s_2,v_1,u_2,v_3,u_4)$, 经简单计算可知

$$\det\partial G^2\mid_{Q^2=0,\mu=0}\neq 0,$$

所以,在 $(Q^2,\mu)=(0,0)$ 附近,(15)有唯一解

$$s_1=s_1(\mu),\ u_2=u_2(\mu),\ v_1=v_1(\mu),\ s_2=s_2(\mu),\ u_4=u_4(\mu),\ v_3=v_3(\mu) \tag{16}$$

满足 $s_1(0)=0,\ u_2(0)=0,\ v_1(0)=0,\ s_2(0)=0,\ u_4(0)=0,\ v_3(0)=0$•

显然,一条1_同宿环对应于(16)的一个解 $s_1=s_2=0$, 而一条1_周期轨也对应于(16)的一个解 $s_1=s_2>0$• 由解的唯一性即可得到系统(1)不存在任何2_同宿环和2_周期轨•

如果 $s_1>0,\ s_2=0$ 或者 $s_1=0,\ s_2>0$, 那么,由(15)的第1式和第4式可得到矛盾• 所以,下述定理成立•

定理4.1 如果假设(H1)~(H3)和(A1)成立, $M_1\neq 0$, 那么,对 $0\leqslant|\mu|\ll 1$, 系统(1)在 Γ 附近不存在任何的2_同宿环和2_周期轨道•

注4.1 对任何的 k_同宿环和 k_周期轨, $k\geqslant 2$, 定理4.1仍然成立•

下面我们假设(A2)成立• 与第3节类似,我们只需考虑下述方程的解:

$$s_1^{1+\alpha(\mu)}=w_{12}(s_2-\delta^{-1}M_1\mu)+\text{h.o.t.},\quad s_2^{1+\alpha(\mu)}=w_{12}(s_1-\delta^{-1}M_1\mu)+\text{h.o.t.}\cdot \tag{17}$$

若(17)有解 $s_1>0,\ s_2=0$, 则(17)化为

$$s_1=\delta^{-1}M_1\mu+\text{h.o.t.},\ (\delta^{-1}M_1\mu+\text{h.o.t.})^{1+\alpha(\mu)}=-\delta^{-1}w_{12}M_1\mu+\text{h.o.t.}\cdot \tag{18}$$

在区域 $M_1\mu>0$, $|\mu|\ll 1$ 中,(18)的第二个方程定义了一个 $l-1$ 维的曲面 L_1, 使得当 $\mu\in L_1$ 时,系统(1)在 Γ 附近存在唯一2_同宿环•

若(17)有解 $s_1>0,\ s_2>0$, 那么(17)化为

$$((w_{12})^{-1}s_2^{1+\alpha(\mu)}+\delta^{-1}M_1\mu)^{1+\alpha(\mu)}=w_{12}(s_2-\delta^{-1}M_1\mu)+\text{h.o.t.}\cdot \tag{19}$$

记 $N(s_2)$ 和 $V(s_2)$ 分别为上式的左边和右边,那么 $N(s_2)$ 和 $V(s_2)$ 在某点相切当且仅当(19)及下式同时成立•

$$(1+\alpha(\mu))^2(s_2^{1+\alpha(\mu)}+\delta^{-1}w_{12}M_1\mu)^{\alpha(\mu)}=(w_{12})^{2+\alpha(\mu)}+\text{h.o.t.}\cdot \tag{20}$$

经简单计算可解得

$$s_2=[-w_{12}/(1+\alpha(\mu))^2]^{1/\alpha(\mu)}+\text{h.o.t.}\cdot \tag{21}$$

显然(19)和(20)有解(21)的必要条件为 $\Delta=-1$ 且 $(1+w_{12})\alpha(\mu)>0$• 把(21)代入(19)或者(20)得

$$\delta^{-1}M_1\mu=\beta_*(\mu):=(-w_{12})^{1/(\alpha(\mu))}[1+(1+\alpha(\mu))^{-2-2/(\alpha(\mu))}]+\text{h.o.t.}\cdot \tag{22}$$

令(18)定义的曲面为 $\delta^{-1}M_1\mu=\beta^*(\mu)$• 注意到任何一条1_周期轨道同时也对应于(19)的一个解 $s_1=s_2>0$, 从而有下述定理成立:

定理4.2 如果假设(H1)~(H3)和(A2)成立,且 $M_1\neq 0$, $(1+w_{12})\alpha(\mu)>0$, 那么,在 $\mu=0$ 的充分小邻域内存在两个 $l-1$ 维的曲面 Σ_*、Σ^*, 分别由(22)和(18)定义,使得

1) 当 $\mu\in\Sigma_*$ 时系统(1)在 Γ 附近存在唯一的2重2_周期轨道•

2) 当 μ 满足 $M_1\mu < \beta_*(\mu)$ 时, 系统(1) 在 Γ 附近不存在任何 2_同宿环和 2_周期轨道•

3) 当 μ 满足 $\beta_*(\mu) < M_1\mu < \beta^*(\mu)$ 时, 系统(1) 在 Γ 附近恰存在一条 1_周期轨道和一条 2_周期轨道•

4) 当 $\mu \in \Sigma^*$ 时, 系统(1) 在 Γ 附近恰存在一条 2_同宿环和一条 1_周期轨道•

5) 当 μ 满足 $M_1\mu > \beta^*(\mu)$ 时, 系统(1) 在 Γ 附近恰存在一条 1_周期轨道•

5 Γ 的稳定性

首先假定(A1) 成立, 由 $\beta(\mu)$ 的连续性可知, 当 $|\mu| \ll 1$ 时有 $\beta(\mu) > 1$, 不妨记 $\beta(\mu) := \beta$• 于是, 当 $\mu = 0$ 时, (10) 化为

$$\begin{cases} n_{3,1} = (w_{12})^{-1}\delta s^{\beta} + \text{h.o.t.}, \\ n_{3,3} = u_2 - \delta_u + [w_{11}w_{23}(w_{21})^{-1} - w_{13}](w_{12})^{-1}\delta s^{\beta} + \text{h.o.t.}, \\ n_{3,4} = (w_{44})^{-1}s^{B_2(0)/\lambda_1}v_1 + \text{h.o.t.} \end{cases} \tag{23}$$

由(9) 得 $s \approx \delta^{-1}x_1$, $u_2 \approx s^{-B_1(0)/\lambda_1}u_1$, 代入(23), 得

$$n_{3,1} = (w_{12})^{-1}(\delta^{-1}x_1)^{\beta-1}x_1 + \text{h.o.t.} \tag{24}$$

以及 $n_{3,3} = O(s^{-B_1(0)/\lambda_1}u_1)$, $n_{3,4} = O((w_{44})^{-1}s^{B_2(0)/\lambda_1}v_1)$• 由(6) 得, $x_1 \approx n_{1,1}$, $u_1 = w_{33}n_{1,3}$, $v_1 = O(n_{1,4})$, $x_3 \approx n_{3,1}$, $u_3 = w_{33}n_{3,3}$, $v_3 = O(n_{3,4})$• 由于当 $s \ll 1$ 时有 $\mathrm{Re}\,\sigma(-B_1(0)) < 0$, $\mathrm{Re}\,\sigma B_2(0) > 0$, 所以 $u_3 = w_{33}n_{3,3} \gg u_1$, $v_3 = O(n_{3,4}) \ll v_1$•

下面我们考虑 F 在域 $S_1 = \{(x, y, u, v) \in S_1, 0 \leqslant |x| < \delta_1 < \delta\}$ 上的限制• 截线段 $L_x = \{0 \leqslant |x| < \delta_1, y = \delta, u = 0, v = 0\}$ 近似的映为另一线段 $L_x' = \{0 \leqslant |x| < \gamma\delta_1, y = \delta, u = 0, v = 0\}$, 其中当 $\gamma < 1(\gamma > 1)$ 时 γ 称为收缩(扩张) 率• 由(24) 的第一个方程以及上述讨论易知当 $0 < x_1 < \delta_1 \ll 1$, $\beta > 1$ 时, $\gamma = |(w_{12})^{-1}|(\delta^{-1}x_1)^{\beta-1} < 1$•

类似的可以考虑 $\beta < 1$ 的情况并获得当 $0 < x_1 < \delta_1 < \delta \ll 1$ 时, $\gamma = |(w_{12})^{-1}|(\delta^{-1}x_1)^{\beta-1} > 1$• 于是下述定理成立:

定理 5.1 假设(H1) ~ (H3) 和(A1) 成立• 如果 $\beta > 1$, 那么同宿环 Γ 为弱稳定的, 此时 Γ 有一个 $m+1$ 维的局部稳定流形和一个 n 维局部不稳定流形• 如果 $\beta < 1$, 那么同宿环 Γ 为弱不稳定的, 此时 Γ 有一个 m 维的局部稳定流形和一个 $n+1$ 维的局部不稳定流形•

下面设(A2) 成立, 与非共振情况类似的可得 $u_3 \gg u_1$, $v_3 \ll v_1$ 以及 $x_3 \approx (w_{12})^{-1}x_1$• 于是我们有:

定理 5.2 假设(H1) ~ (H3) 和(A2) 成立• 如果 $|(w_{12})^{-1}| < 1$, 那么同宿环 Γ 为弱稳定的, 此时 Γ 的局部稳定流形和局部不稳定流形分别是 $m+1$ 维和 n 维的• 如果 $|(w_{12})^{-1}| > 1$, 那么同宿环 Γ 为弱不稳定的, 此时 Γ 的局部稳定流形和局部不稳定流形分别是 m 维和 $n+1$ 维的•

注 5.1 如果(1) 是 2 维系统, $z = (x, y)$, $x, y \in R^1$, 那么假设(H1) ~ (H3) 和 $\Delta = 1$ 是自然成立的• 在共振情况下不难得到 $w_{12} = 1/\sigma$, 其中

$$\sigma = \exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\right)(r(t))\,\mathrm{d}t\right\}$$

为 C^2 变换下的不变量[10, 11], $f(z) = (f_1(z), f_2(z))^*$•

[参 考 文 献]

[1] Arnold V I. Geometric Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations[M]. Second Edition. New York: Springer_Verlag, 1983.

[2] 李继彬, 冯贝叶. 稳定性, 分支与混沌[M]. 昆明: 云南科技出版社, 1995.

[3] Chow S N, Deng B, Fiedler B. Homoclinic bifurcation at resonant eigenvalues[J]. J Dyna Syst Diff Equs, 1990, **2**(2): 177—244.

[4] ZHU De_ming. Problems in homoclinic bifurcation with higher dimensions[J]. Acta Math Sinica (N S), 1998, **14**(3): 341—352.

[5] JIN Yin_lai, ZHU De_ming. Degenerated homoclinic bifurcations with higher dimensions[J]. Chinese Ann Math, Ser B, 2000, **21**(2): 201—210.

[6] 金银来, 李先义, 刘兴波. 非扭曲高维同宿分支[J]. 数学年刊, A 辑, 2001, **22**(4): 473—478.

[7] JIN Yin_lai, ZHU De_ming. Bifurcations of rough heteroclinic loops with three saddle points[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2002, **18**(1): 199—208.

[8] Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos[M]. New York: Springer_Verleg, 1990.

[9] Fenichel N. Persistence and smoothness of invariant manifold for flows[J]. Indiana Univ Math J, 1971, **21**(2): 193—226.

[10] ZHU De_ming. Homoclinic bifurcation with codimension 3[J]. Chinese Ann Math, Series B, 1994, **15**(2): 205—216.

[11] 朱德明. 坐标变换的不变量[J]. 华东师范大学学报, 1998, (1): 19—21.

Twisted Bifurcations and Stability of Homoclinic Loop With Higher Dimensions

JIN Yin_lai[1,2], ZHU De_ming[2]

(1. Department of Mathematics, Linyi Teachers' University, Linyi, Shandong 276005, P.R.China;
2. Department of Mathematics, East China Normal Univeristy, Shanghai 200062, P.R.China)

Abstract: By using the linear independent solutions of the linear variational equation along the homoclinic loop as the demanded local coordinates to construct the Poincar map, the bifurcations of twisted homoclinic loop for higher dimensional systems are studied. Under the nonresonant and resonant conditions, the existence, number and existence regions of the 1_homoclinic loop, 1_periodic orbit, 2_homoclinic loop, 2_periodic orbit and 2_fold 2_periodic orbit were obtained. Particularly, the asymptotic repressions of related bifurcation surfaces were also given. Moreover, the stability of homoclinic loop for higher dimensional systems and nontwisted homoclinic loop for planar systems were studied.

Key words: local coordinate; Poincar map; twisted bifurcation; 1_periodic orbit; 2_periodic orbit; stability