应用数学和力学，第6卷第5期（1985年5月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

强非线性振子的渐近分析

戴 世 强

（中国科学院力学研究所，1984年5月24日收到）

摘　要

本文提出一种渐近方法，用来分析一类强非线性自治振动系统，给出了振幅和相位所满足的方程，并确定了极限环的振幅和稳定性。

一、引　言

如所周知，应用奇异摄动法可以有效地处理弱非线性问题[1,2]，但处理强非线性问题则较为困难。Кузмак[3]和Luke[4]曾用两变量展开法研究过有缓变系数的强非线性系统和非线性波 Whitham[5]用平均变分法讨论过非线性波问题，最近，Burton[6]提出了一种时间变换法，分析了强非线性振子的极限环性态。在本文中，我们提出一种较为简捷有效的摄动方法，不仅可以给出强非线性振动系统的极限环振幅，而且可以鉴定此极限环的稳定性。

假设强非线性自治振动可用如下方程描述：

$$\frac{d^2u}{dt^2}+g(u)=\varepsilon f\left(u,\frac{du}{dt}\right) \tag{1.1}$$

其中，g、f为它们的宗量的非线性解析函数，$\varepsilon>0$为小参数。我们还假设：对应于$\varepsilon=0$的退化问题有周期解。下一节我们概述求解(1.1)的方法；接着用此法分析一个特例——修正的van der Pol方程，得到了与文献[6]一致的结果，并且判定所得的极限环是稳定的。本文的方法可望应用于其它一些强非线性振动和波动问题的分析。

二、方 法 的 描 述

当$\varepsilon=0$时，方程(1.1)化为

$$\frac{d^2u}{dt^2}+g(u)=0 \tag{2.1}$$

假定(2.1)有周期解

$$u=u_0(a,\psi) \tag{2.2}$$

其中a为振幅(常数)，ψ为相位因子，u_0为ψ的常周期函数，不失一般性，设该周期为2π，而且

$$\frac{d\psi}{dt}=B_0(a) \tag{2.3}$$

亦即(2.1)的解的周期为

$$T=\frac{2\pi}{B_0(a)} \tag{2.4}$$

由于(2.1)为非线性方程，所以周期是振幅的函数。容易证实，$u_0(a,\psi)$满足

$$B_0^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial\psi^2}+g(u_0)=0 \tag{2.5}$$

现在我们假设(1.1)的解仍有(2.2)的形式，只是

$$\left.\begin{aligned}&\frac{da}{dt}=\varepsilon A_1(a)+O(\varepsilon^2)\\&\frac{d\psi}{dt}=B_0(a)+\frac{d\theta}{dt}=B_0(a)+[\varepsilon B_1(a)+O(\varepsilon^3)]\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

$$\psi=\int_{t_0}^{t}B_0(a)dt+\theta(t) \tag{2.7}$$

也就是说，a和θ是时间t的缓变函数，因此，

$$\frac{du_0}{dt}=B_0u_{0\psi}+\frac{da}{dt}u_{0a}+\frac{d\theta}{dt}u_{0\psi} \tag{2.8}$$

设

$$\frac{da}{dt}u_{0a}+\frac{d\theta}{dt}u_{0\psi}=0 \tag{2.9}$$

于是有

$$\frac{d^2u_0}{dt^2}=B_0^2u_{0\psi\psi}+\frac{da}{dt}[B_0u_{0a\psi}+B_0'(a)u_{0\psi}]+\frac{d\theta}{dt}B_0u_{0\psi\psi} \tag{2.10}$$

把(2.2)、(2.8)～(2.10)代入(1.1)，发现$u_0(a,\psi)$仍满足(2.5)，同时有

$$\frac{da}{dt}[B_0u_{0a\psi}+B_0'(a)u_{0\psi}]+\frac{d\theta}{dt}B_0u_{0\psi\psi}=\varepsilon f(u_0,B_0u_{0\psi}) \tag{2.11}$$

从(2.9)、(2.11)解得

$$\begin{aligned}&\mathscr{D}\frac{da}{dt}=\varepsilon\, u_{0\psi}f(u_0,B_0u_{0\psi})\\&\mathscr{D}\frac{d\theta}{dt}=-\varepsilon u_{0a}f(u_0,B_0u_{0\psi})\end{aligned} \tag{2.12}$$

其中

$$\mathscr{D}=u_{0\psi}(B_0u_{0a\psi}+B_0'u_{0\psi})-B_0u_{0a}u_{0\psi\psi} \tag{2.13}$$

对(2.12)的两端在一个周期$(t,t+T)$内取平均，相当于关于ψ在$(\psi,\psi+2\pi)$内取平均，而且把$\frac{da}{dt}$、$\frac{d\theta}{dt}$看成在此周期内不变，我们得到

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon A_1(a) \tag{2.14}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\varepsilon B_1(a) \tag{2.15}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&A_1=\frac{F_1(a)}{D(a)}, \quad B_1=\frac{G_1(a)}{D(a)} \\
&D=\int_0^{2\pi}\mathscr{D}d\psi \\
&F_1=\int_0^{2\pi}u_{0\psi}f(u_0,B_0u_{0\psi})d\psi \\
&G_1=-\int_0^{2\pi}u_{0a}f(u_0,B_0u_{0\psi})d\psi
\end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

于是问题归结成求解方程组(2.14)(2.15)；若

$$F_1(a)=0 \tag{2.17}$$

有解$a=a_0$，则a_0就是极限环的振幅。

容易看出，这里描述的方法是Крылов-Боголюбов平均法[7]的自然推广，К-Б 方法的原型不能用来处理强非线性问题，用本方法则能处理了。

三、应　　用

我们用上节描述的方法来研究修正的van der Pol方程：

$$\frac{d^2u}{dt^2}-u+u^3=\varepsilon(1-u^2)\frac{du}{dt} \tag{3.1}$$

这时(2.5)变成

$$B_0^2\frac{\partial^2u_0}{\partial\psi^2}-u_0+u_0^3=0 \tag{3.2}$$

我们仅考察以$u_0=0$为中心的振动(参看[2，§3.6])，(3.2)的解为

$$u_0=a\ \mathrm{cn}(\Psi,k), \quad \Psi=\frac{2K\psi}{\pi} \tag{3.3}$$

$$B_0^2=\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2(a^2-1), \quad k^2=\frac{a^2}{2(a^2-1)} \tag{3.4}$$

式中$\mathrm{cn}(\Psi,k)$是模为k的Jacobi椭圆余弦函数，$K=K(k)$为第一类完全椭圆积分。利用[8]中给出的公式算得（参看附录A，B)

$$u_{0\psi}=-\frac{2Ka}{\pi}\mathrm{sn}\Psi\mathrm{dn}\Psi \tag{3.5}$$

$$u_{0a}=\mathrm{cn}\Psi+\frac{1}{a^2-1}\ \frac{k^2}{k'^2}\mathrm{sn}^2\Psi\mathrm{cn}\Psi-\frac{1}{(a^2-1)k'^2}\left[E(\Psi)-\Psi\frac{E}{K}\right]\mathrm{sn}\Psi\mathrm{dn}\Psi \tag{3.6}$$

$$B_0'=\frac{B_0}{a}\left[1+\frac{2}{a^2-2}\ \frac{E}{K}\right] \tag{3.7}$$

$$f(u_0,B_0u_{0\psi})=-a\sqrt{a^2-1}\,(1-a^2\mathrm{cn}^2\Psi)\mathrm{sn}\Psi\mathrm{dn}\Psi \tag{3.8}$$

式中，$\mathrm{sn}\Psi$和$\mathrm{dn}\Psi$是模为k的Jacobi椭圆函数，$E(\Psi)$为第二类正规椭圆积分，$E=E(k)$为第二类完全椭圆积分，而

$$k'^2=1-k^2=\frac{a^2-2}{2(a^2-1)} \tag{3.9}$$

由(2.16)，(3.4)～(3.9)得到（见附录B）

$$A_1=\frac{1}{15aK}[(3a^4-5a^2-2)K-2(3a^4-6a^2-1)E] \tag{3.10}$$

$$B_1=0 \tag{3.11}$$

从而得到振幅和相位因子满足的方程

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon A_1(a)+O(\varepsilon^2),\quad \frac{d\psi}{dt}=B_0(a)+O(\varepsilon^2) \tag{3.12}$$

其中A_1和B_0分别由(3.10)和(3.4)给定。令

$$A_1(a)=0$$

得到极限环振幅

$$a=a_0=1.8396 \tag{3.13}$$

Burton用时间变换法算得

$$a_0=1.8433$$

由此可见，两种结果非常接近。不难算得

$$A_1'(a_0)=-0.9599<0 \tag{3.14}$$

因而这一极限环是稳定的，用[6]中的方法不能判定这种稳定性。

四、讨　论

（1） 本文提出的方法较为简捷有效，由于选定了切合于强非线性系统的零阶解形式，即非正弦函数的周期解，因而能较好地把握渐近解的性质，从而可以避免解[6]中那样的无穷多个谐波平衡方程。

（2） 本文的方法可望用于其它的强非线性振动系统（例如受非线性阻尼的单摆的大幅度振动等等）以及连续介质中的强非线性振动和波动。

（3） 如果要得到高阶解，需要把 Крылов-Боголюбов-Митропольский 方法加以推广，我们以后将另行讨论。

附 录 A

本文中用到一些椭圆积分公式，列举如下[8]

$$\frac{dK}{dk}=\frac{1}{kk'^2}(E-k'^2K),\quad \frac{dE}{dk}=\frac{1}{k}(E-K) \tag{A.1}$$

$$\frac{d}{dv}(\mathrm{cn}\,v)=-\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,v \tag{A.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial k}[\mathrm{cn}(v,k)]=\frac{\mathrm{sn}v\mathrm{dn}v}{kk'^2}\left[-k'^2v+E(v)-k^2\frac{\mathrm{sn}v\mathrm{cn}v}{\mathrm{dn}v}\right] \tag{A.3}$$

$$C_2=\int_0^{4K}\mathrm{cn}^2v\,dv=\frac{4}{k^2}(E-k'^2K) \tag{A.4}$$

$$C_4=\int_0^{4K}\mathrm{cn}^4v\,dv=\frac{4}{3k^2}[2(2k^2-1)E+(2-3k^2)k'^2K] \tag{A.5}$$

$$C_6=\int_0^{4K}\mathrm{cn}^6 v dv=\frac{1}{5k^2}[3k'^2C_2+4(2k^2-1)C_4] \tag{A.6}$$

$$\int_0^{4K}\left[E(v)-v\frac{E}{K}\right]\mathrm{sn}v\ \mathrm{dn}v\ \mathrm{cn}^3 v\ dv=\frac{1}{4}\left[\left(k'^2-\frac{E}{K}\right)C_4+k^2C_6\right] \tag{A.7}$$

附 录 B

对第三节中的若干计算作些说明.

计算u_{0a}时，要考虑到k对a的依赖关系，需要利用(A.1)～(A.3)

$$u_{0a}=\mathrm{cn}\Psi+a\frac{dk}{da}\ \frac{2\psi}{\pi}\ \frac{dK}{dk}\ \frac{d}{d\Psi}\mathrm{cn}\Psi+a\frac{dk}{da}\ \frac{\partial}{\partial k}\mathrm{cn}(\Psi,k)$$

$$=\mathrm{cn}\Psi-a\frac{dk}{da}\frac{2\psi}{\pi}\frac{E-k'^2K}{kk'^2}\mathrm{sn}\Psi\mathrm{dn}\Psi+a\frac{dk}{da}\ \frac{\mathrm{sn}\Psi\mathrm{dn}\Psi}{kk'^2}\left[-k'^2\Psi+E(\Psi)-k^2\frac{\mathrm{sn}\Psi\mathrm{cn}\Psi}{\mathrm{dn}\Psi}\right] \tag{B.1}$$

由(3.4)得

$$a\frac{dk}{da}=-\frac{k}{a^2-1} \tag{B.2}$$

从而可导得(3.6)中的u_{0a}，它显然是ψ的周期为2π的函数.

计算(3.10)给出的A_1的过程较为繁复．因为

$$A_1=\frac{F_1(a)}{D(a)} \tag{B.3}$$

我们分别计算$F_1(a)$和$D(a)$，由(2.16)和(3.1)，

$$F_1(a)=B_0\int_0^{2\pi}(1-u_0^2)u_{0\psi}^2\,d\psi=-B_0\int_0^{2\pi}\left(u_0-\frac{1}{3}u_0^3\right)u_{0\psi\psi}d\psi=-\frac{1}{B_0}\ \frac{2\pi}{K}\int_0^{4K}\left(u_0^2-\frac{4}{3}u_0^4+\frac{1}{3}u_0^6\right)d\Psi$$

$$=-\frac{a^2}{3B_0}\ \frac{2\pi}{K}[3C_2-4a^2C_4+a^4C_6]$$

利用(A.4)～(A.6)导得

$$F_1(a)=\frac{a}{B_0}\ \frac{2\pi}{k^2}\ \frac{a}{30}\left[(3a^4-5a^2-2)-2(3a^4-6a^2-1)\frac{E}{K}\right] \tag{B.4}$$

再来计算$D(a)$

$$D(a)=\int_0^{2\pi}[u_{0\psi}(B_0u_{0a\psi}+B_0'u_{0\psi})]-B_0u_{0a}u_{0\psi\psi}]d\psi$$

由分部积分,

$$D(a)=-\int_0^{2\pi}(2B_0u_{0a}+B_0'u_0)u_{0\psi\psi}\,d\psi=I_1+I_2 \tag{B.5}$$

利用(A.2)～(A.7)，得到

$$I_1=-2B_0\int_0^{2\pi}u_{0a}u_{0\psi\psi}d\psi$$

$$=\frac{2a}{B_0}\ \frac{\pi}{2K}\left\{-\frac{5}{2}\ \frac{k^4}{k'^2}C_6+\left[a^2+\frac{2a^2+3}{2(a^2-1)}\ \frac{k^2}{k'^2}-\frac{1}{2}\ \frac{k^2}{k'^2}\left(k'^2-\frac{E}{K}\right)\right]C_4\right.$$

$$\left.-\left[1+\frac{1}{a^2-1}\ \frac{k^2}{k'^2}-\frac{1}{2(a^2-1)}\left(1-\frac{E}{k'^2K}\right)\right]C_2\right\}$$

$$=\frac{a}{B_0}\ \frac{2\pi}{k^2}\left[\frac{1}{3}(a^2+1)-\frac{2}{3}\ \frac{E}{K}-\frac{2}{3(a^2-2)}\left(\frac{E}{K}\right)^2\right] \tag{B.6}$$

$$I_2=-B_0'\int_0^{2\pi}u_0u_{0\psi\psi}\,d\psi=\frac{a}{B_0}\cdot\frac{\pi}{2K}(a^2C_4-C_2)\left(1+\frac{2}{a^2-2}\cdot\frac{E}{K}\right)$$

$$=\frac{a}{B_0}\cdot\frac{2\pi}{k^2}\left[\frac{a^2-2}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{E}{K}+\frac{2}{3(a^2-2)}\left(\frac{E}{K}\right)^2\right] \tag{B.7}$$

把(B.6)、(B.7)代入(B.5)，得到

$$D=\frac{a}{B_0}\cdot\frac{2\pi}{k^2}\cdot\frac{1}{2}a^2 \tag{B.8}$$

把(B.4)、(B.8)代入(B.3)就导出(3.10)所给出的A_1.

参 考 文 献

[1] 钱伟长，奇异摄动理论及其在力学中的应用，科学出版社(1981).

[2] Kevorkian, J. and J. D. Cole, *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Springer-Verlag, New York (1981).

[3] Кузмак Г. Е., Асимптотические решения дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, *ПММ*, 23(1959), 515—526.

[4] Luke, J. C., A perturbation method for nonlinear dispersive wave problems, *Proc. Roy. Soc. Ser.* A292 (1966), 403—412.

[5] Whitham, G. B., *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1974).

[6] Burton, T. D., Non-linear oscillator limit cycle analysis using a time transformation approach, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 17 (1982), 7—19.

[7] Боголюбов Н. Н. и Ю. А. Митропольский, *Асимптотические Методы в Теории Нелинейных Колебаний*, (Изд. 4), Издательство «Наука» Москва (1974).

[8] Byrd, P. F. and M. D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, 2nd Ed., Springer-Verlag, New York (1971).

Asymptotic Analysis of Strongly Nonlinear Oscillators

Dai Shi-qiang

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing*)

Abstract

In this paper, an asymptotic method is presented for the analysis of a class of strongly nonlinear autonomous oscillators. The equations governing the amptitude and phase factor are established, as well as the amplitude and stability of the corresponding limit cycle are determined.